

Jeux, Synthèse et Contrôle

G. Sénizergues, Université de Bordeaux

Année 2016-2017¹

1. dernière mise à jour : 22 novembre 2016

Table des matières

1	Mathématiques sociales	7
1.1	Préférences	7
1.2	Choix social	14
1.3	Agrégation des préférences	18
2	Les jeux	19
2.1	Jeux extensifs à information complète	19
2.2	Jeux sous forme stratégique	19
2.3	Jeux matriciels finis	21
3	Équilibres de Nash	23
3.1	Théorème de Kakutani	23
3.1.1	Préliminaires géométriques	23
3.1.2	Lemme de Sperner	28
3.1.3	Théorème de Brouwer	29
3.1.4	Théorème de Kakutani	30
3.2	Théorème de Nash	33
3.3	Théorème minimax	34
4	Jeux de longueur ω	37
4.1	Terminologie	37
4.2	Détermination	38
5	Opérations sur les jeux	39
5.1	Dualité	39
5.2	Complétion	39
5.3	Bisimulation	40
5.3.1	Dépliage	40
5.3.2	Bisimulation générale	41
5.4	Retournement	44
6	Automates alternants	49
6.1	Préliminaires ensemblistes	49
6.2	Automates sur les arbres	50
6.2.1	Automates alternants	50
6.2.2	Cas des mots infinis	51
6.2.3	Automates non-déterministes	52
6.3	Opérations sur les langages reconnaissables	54

6.4	Problèmes de décision	59
7	Logique monadique du second ordre	61
7.1	Syntaxe et sémantique	61
7.2	Reconnaissabilité versus définissabilité	63
7.3	Théories du second ordre monadique	68
7.3.1	MSO du monoïde libre	68
7.3.2	Transferts de décidabilité	69
8	Annexe	71
9	References	77

Introduction

L'acception la plus courante du terme "théorie des jeux" comporte d'une part l'étude des problèmes soulevés par les prises de décision collectives, ce que nous appellerons les "mathématiques sociales", d'autre part l'étude des jeux proprement dits (au sens que prend ce terme dans la vie courante) et aussi des "jeux" comme modélisations de situations où des agents interagissent (comme dans une économie de marché par exemple). Outre ces deux thèmes classiques, nous montrerons comment certains résultats de la théorie des jeux peuvent être utiles en théorie des automates et en logique.

Les mathématiques sociales Nous abordons la modélisation mathématique du comportement d'un être rationnel dans des situations de choix, alors que ses informations sont incertaines. La notion centrale est celle de *préférence rationnelle*, qui a été axiomatisée par [Von Neumann et Morgenstern, 1944].

Nous étudions ensuite les procédés par lesquels une *assemblée*, dont chaque individu possède une échelle de préférences, peut se mettre d'accord sur une *décision* (problème du choix social), un ordre de priorité (problème d'agrégation des préférences), un couplage (problème des mariages stables).

Les jeux Les jeux de plateau comme les échecs, le go, les dames, l'awélé, le backgammon, le poker, etc ... sont clairement des jeux, selon le sens commun du terme. Dans ce contexte on s'intéresse surtout à connaître qui est *gagnant*, et avec quelle *stratégie*.

Les interactions entre producteurs, vendeurs, acheteurs, diplomates, militaires, bienfaiteurs, profiteurs, traîtres, alliés fidèles, prédateurs, proies, etc ... peuvent aussi être modélisées par des jeux. De ce point de vue on s'intéresse aux *équilibres* qui peuvent s'établir "naturellement" entre ces acteurs. Le théorème de Nash (qui a valu un prix Nobel ... d'économie, à son auteur en 1994) est un résultat-clé de ce sujet.

Les automates et la logique Un automate *déterministe* ne "joue pas", on le voit volontiers comme un mécanisme froid et prévisible. S'il est *non-déterministe*, on peut le voir comme un acteur qui maximise quelque chose (un booléen). Si l'automate est *alternant* (ses transitions comportent non-seulement des choix non-déterministes, mais aussi des conjonctions de mouvements) alors on peut le voir comme un jeu opposant un "prouveur" (qui cherche à montrer que l'objet est correct) et un "attaquant" (qui cherche à montrer que l'objet est incorrect).

Cette métaphore nous amène à appliquer des théorèmes de théorie des jeux (théorème de *détermination*, existence de *stratégies sans-mémoire*) à des problèmes de théorie des automates ou de logique :

- comment synthétiser un contrôleur à partir d'une spécification logique ?
- comment savoir si un énoncé formel sur les entiers (ou les mots, ou les arbres) est vrai ?

- quelle est la structure de l'ensemble des modèles d'une formule logique (i.e. l'ensemble des objets qui rendent vrai un énoncé formel) ?

Chapitre 1

Mathématiques sociales

1.1 Préférences

On examine ici par quelles types de relations binaires on peut représenter les “préférences” des acteurs d’un jeu (qui lui-même peut modéliser une économie de marché, un groupe d’organiseurs d’une activité, etc ...) On se donne un ensemble d’“alternatives” Z qui est fini. On note $\Delta(Z)$ l’ensemble des mesures de probabilité sur Z . Nous considérerons ici qu’un élément de $\Delta(Z)$ est une application $p : Z \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $\sum_{z \in Z} p(z) = 1$.

On modélise les préférences d’un acteur par une relation binaire \preceq sur $\Delta(Z)$. La signification intuitive de $p \preceq q$ est alors “ p est préféré à q ”.

Fonction d’utilité Appelons *fonction d’utilité* toute application $u : Z \rightarrow \mathbb{R}$. On note alors $\tilde{u} : \Delta(Z) \rightarrow \mathbb{R}$ son extension définie par

$$\tilde{u}(p) := \sum_{z \in Z} p(z)u(z)$$

autrement dit \tilde{u} associe à toute distribution de probabilité p l’*espérance* de la “variable aléatoire” u (pour cette distribution). Étant donnée une application $h : E \rightarrow (F, \leq)$ (où E est un ensemble et (F, \leq) est un ensemble muni d’un préordre linéaire \leq) on définit la relation binaire \preceq_h par : pour tous $e, e' \in E$

$$e \preceq_h e' \Leftrightarrow h(e) \leq h(e')$$

On vérifie aisément que pour toute application h , la relation \preceq_h est un préordre linéaire i.e. pour tous $e, f, g \in E$:

$$\begin{aligned} e &\preceq_h e \\ e \preceq_h f \wedge f \preceq_h g &\Rightarrow e \preceq_h g \\ e \preceq_h f \vee f \preceq_h e & \end{aligned}$$

Axiomes de von Neumann et Morgenstern

Le but de ce paragraphe est de montrer que, sous réserve qu’une relation de préférence \preceq vérifie certains axiomes (qu’il semble raisonnable de prêter à des acteurs rationnels), cette relation est nécessairement définie par une fonction d’utilité u sur les éléments de Z .

1- Axiomes de Préordre linéaire (AXpl) : $\forall p, q, r \in \Delta(Z), \lambda \in]0, 1[$,

$$p \preceq p \quad (\text{réflexivité})$$

$$p \preceq q \wedge q \preceq r \Rightarrow p \preceq r \text{ (transitivité)}$$

$$p \preceq q \vee q \preceq p \text{ (linéarité)}$$

2- Axiome d'Indépendance (AXind) : $\forall p, q, r \in \Delta(Z), \lambda \in]0, 1[$,

$$p \prec q \Rightarrow \lambda p + (1 - \lambda)r \prec \lambda q + (1 - \lambda)r$$

3- Axiome de Continuité (AXcon) : $\forall p, q, r \in \Delta(Z), \lambda \in]0, 1[$,

$$p \prec q \prec r \Rightarrow \exists \varepsilon \in]0, 1[, (1 - \varepsilon)p + \varepsilon r \prec q \prec \varepsilon p + (1 - \varepsilon)r$$

On rappelle que, dans les axiomes (AXind)(AXcon), $p \prec q$ signifie : $p \preceq q \wedge \neg(q \preceq p)$.

Théorème 1.1.1 (Von-Neuman-Morgenstern 1944) *Soit \preceq une relation binaire sur $\Delta(Z)$. La relation \preceq satisfait les axiomes (AXpl)(AXind)(AXcon) si et seulement si, il existe une fonction $u : Z \rightarrow \mathbb{R}$ telle que \preceq coïncide avec le préordre $\preceq_{\tilde{u}}$.*

(En fait les axiomes que nous considérons, sont une variante des axiomes originaux de [Von-Neuman-Morgenstern 1944] et sont dûs à [Jen67]).

On peut aisément vérifier que, pour toute application $u : Z \rightarrow \mathbb{R}$, la relation $\preceq_{\tilde{u}}$ satisfait les axiomes (AXpl)(AXind)(AXcon).

Considérons maintenant une relation binaire \preceq qui vérifie les axiomes (AXpl)(AXind)(AXcon). La fin de cette section consiste à mettre en évidence une application $u : Z \rightarrow \mathbb{R}$ puis à démontrer que \preceq coïncide avec $\preceq_{\tilde{u}}$.

Un premier point délicat consiste à démontrer qu'une version large de l'axiome d'Indépendance est vraie.

Lemme 1.1.2 *Pour tous $p, q, r \in \Delta(Z), \lambda \in]0, 1[$,*

$$p \preceq q \Rightarrow \lambda p + (1 - \lambda)r \preceq \lambda q + (1 - \lambda)r$$

Nous noterons (AXindl), pour "axiome d'indépendance *large*", ce nouvel axiome. Nous "préparons le terrain" avec les faits 1.1.3-1.1.8, puis donnons une preuve de ce lemme.

Fait 1.1.3 *Soient $q \prec r$ et $\lambda \in]0, 1[$. Alors $q \prec \lambda q + (1 - \lambda)r$.*

Preuve : Par (AXind) :

$$q \prec r \Rightarrow \lambda q + (1 - \lambda)q \prec \lambda q + (1 - \lambda)r$$

donc

$$q \prec \lambda q + (1 - \lambda)r.$$

□

Fait 1.1.4 *Soient $p \prec r$ et $q \in \Delta(Z)$ tels que , $\forall \lambda \in]0, 1[, p \prec \lambda q + (1 - \lambda)r$. Alors $p \preceq q$*

Preuve : Soient p, q, r vérifiant les hypothèses du lemme. Notons (H) l'hypothèse additionnelle :

$$p \succ q.$$

Alors, par (AXcon)

$$\exists \varepsilon > 0, p \succ (1 - \varepsilon)q + \varepsilon r$$

mais, par l'hypothèse du lemme (où l'on choisit $\lambda := 1 - \varepsilon$)

$$p \prec (1 - \varepsilon)q + \varepsilon r$$

contradiction.

L'hypothèse (H) est donc fautive, i.e.

$$p \preceq q.$$

□

Fait 1.1.5 Soient $p \approx q$ et $q \prec r$ et $\lambda \in]0, 1[$. Alors $\lambda p + (1 - \lambda)r \approx \lambda q + (1 - \lambda)r$.

Preuve : Par le Fait 1.1.3 :

$$\forall \mu \in]0, 1[, q \prec \mu q + (1 - \mu)r$$

et comme $p \approx q$:

$$\forall \mu \in]0, 1[, p \prec \mu q + (1 - \mu)r$$

On en déduit que , pour tout $\mu \in]0, 1[$:

$$\begin{aligned} \lambda p + (1 - \lambda)r &\prec \lambda(\mu q + (1 - \mu)r) + (1 - \lambda)r && \text{(AXind)} \\ &= (\lambda\mu)q + (1 - \lambda\mu)r \\ &= \mu(\lambda q + (1 - \lambda)r) + (1 - \mu)r \quad . \end{aligned}$$

Par le Fait 1.1.4, on en déduit que :

$$\lambda p + (1 - \lambda)r \preceq \lambda q + (1 - \lambda)r.$$

□

Fait 1.1.6 Soient $p \approx q$ et $q \succ r$ et $\lambda \in]0, 1[$. Alors $\lambda p + (1 - \lambda)r \approx \lambda q + (1 - \lambda)r$.

Preuve : Le préordre \succ vérifie les mêmes axiomes que le préordre \prec . Le Fait 1.1.5 est donc valide pour \succ . □

Fait 1.1.7 Soient $p \approx q$ et $\lambda \in]0, 1[$. Alors $p \approx \lambda p + (1 - \lambda)q$.

Preuve : Soit r tel que $p \prec r$. Alors $q \prec r$. Donc

$$\begin{aligned} \lambda p + (1 - \lambda)q &\prec \lambda p + (1 - \lambda)r && \text{(AXind)} \\ &\prec \lambda r + (1 - \lambda)r && \text{(AXind)} \\ &= r && . \end{aligned}$$

Comme cette inégalité est vérifiée par tout r tel que $p \prec r$,

$$\lambda p + (1 - \lambda)q \preceq p$$

Par le même raisonnement, où l'on remplace le préordre \preceq par le préordre \succeq , on obtient que

$$\lambda p + (1 - \lambda)q \succeq p$$

et finalement

$$\lambda p + (1 - \lambda)q \approx p.$$

□

Fait 1.1.8 Soient $p \approx q \approx r$ et $\lambda \in]0, 1[$. Alors $\lambda p + (1 - \lambda)r \approx \lambda q + (1 - \lambda)r$.

Preuve : Par le Fait 1.1.7 on a les deux équivalences :

$$p \approx \lambda p + (1 - \lambda)r, \quad q \approx \lambda q + (1 - \lambda)r$$

donc

$$\lambda p + (1 - \lambda)r \approx \lambda q + (1 - \lambda)r.$$

□

Preuve du Lemme 1.1.2 :

1- si $p \approx q$; alors les faits 1.1.5, 1.1.6 et 1.1.8 couvrent les 3 cas possibles $p \prec r, p \succ r, p \approx r$ et permettent de conclure, dans chaque cas, que $\lambda p + (1 - \lambda)r \approx \lambda q + (1 - \lambda)r$

2- si $p \prec q$, alors l'axiome (AXind) permet de conclure.

q.e.d.

Nous reprenons maintenant le cours de la preuve du théorème 1.1.1 ; nous pouvons utiliser désormais les axiomes (AXpl)(AXind)(AXcon) et aussi (AXindl) (grâce au Lemme 1.1.2).

Lemme 1.1.9 Il existe $\underline{z}, \bar{z} \in Z$ tels que, pour tous $z \in Z$ $\delta_{\underline{z}} \preceq \delta_z \preceq \delta_{\bar{z}}$.

Preuve : La relation \preceq restreinte au sous-ensemble $\{\delta_z \mid z \in Z\}$ de $\Delta(Z)$ est un préordre linéaire. Comme ce sous-ensemble est fini il admet un plus petit (resp. plus grand) élément pour le préordre. Soient $\underline{z} \in Z$ (resp. $\bar{z} \in Z$) tel que $\delta_{\underline{z}}$ est minimum (resp. $\delta_{\bar{z}}$ est maximum) : ils vérifient la conclusion du lemme. □

Lemme 1.1.10 $\forall p \in \Delta(Z), \delta_{\underline{z}} \preceq p \preceq \delta_{\bar{z}}$.

Preuve : Toute mesure de probabilité p sur Z est de la forme :

$$p = \sum_{k=1}^m p_k \delta_{z_k}$$

pour un entier $m \geq 1$ et $\forall k \in [1, m], z_k \in Z$.

Montrons par récurrence sur m que $\delta_{z_1} \preceq p$.

Base : $m=1$

Comme δ_{z_1} est minimum, $\delta_{z_1} \preceq \delta_{z_1} = p$.

Base : $m=n+1$ où $n \geq 1$.

Si $p_1 = 1$, alors par le cas de base, $\delta_{z_1} \preceq p$.

Supposons $p_1 < 1$. Alors

$$p = p_1 \delta_{z_1} + \sum_{k=2}^{n+1} p_k \delta_{z_k}.$$

On sait que $\delta_{z_1} \preceq \delta_{z_1}$ et $\delta_{z_1} \preceq \frac{\sum_{k=2}^{n+1} p_k \delta_{z_k}}{1-p_1}$ (par hyp. de récurrence). On en déduit :

$$\begin{aligned} \delta_{z_1} &= p_1 \delta_{z_1} + (1-p_1) \delta_{z_1} \\ &\preceq p_1 \delta_{z_1} + (1-p_1) \delta_{z_1} && \text{(AXindl)} \\ &\preceq p_1 \delta_{z_1} + (1-p_1) \frac{\sum_{k=2}^{n+1} p_k \delta_{z_k}}{1-p_1} && \text{(AXindl)} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} p_k \delta_{z_k} \\ &= p \end{aligned}$$

□

Lemme 1.1.11 Pour tous nombres réels $1 > \alpha > \beta > 0$ et pour tous $p, q \in \Delta(Z)$,

$$p \succ q \Rightarrow \alpha p + (1-\alpha)q \succ \beta p + (1-\beta)q.$$

Preuve : Soient α, β, p, q vérifiant les hypothèses du lemme. Alors

$$\begin{aligned} p &= \frac{\beta}{\alpha} p + (1 - \frac{\beta}{\alpha}) p \\ &\succ \frac{\beta}{\alpha} p + (1 - \frac{\beta}{\alpha}) q && \text{(AXind)} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \alpha p + (1-\alpha)q &\succ \alpha [\frac{\beta}{\alpha} p + (1 - \frac{\beta}{\alpha}) q] + (1-\alpha)q && \text{(AXind)} \\ &= \beta p + (1-\beta)q \end{aligned}$$

□

Lemme 1.1.12 Soit $p \in \Delta(Z)$ tel que $\delta_{\underline{z}} \prec p \prec \delta_{\overline{z}}$. Alors, il existe un unique $\alpha^* \in]0, 1[$ tel que

$$p \approx \alpha^* \delta_{\overline{z}} + (1 - \alpha^*) \delta_{\underline{z}}$$

Preuve :

1- L'unicité de α^* résulte du Lemme 1.1.11.

2- Soit $p \in \Delta(Z)$ tel que

$$\delta_{\underline{z}} \prec p \prec \delta_{\overline{z}}. \quad (1.1)$$

Posons

$$\alpha^* := \sup\{\alpha \in [0, 1] \mid p \succeq \alpha \delta_{\overline{z}} + (1 - \alpha) \delta_{\underline{z}}\} \quad (1.2)$$

Vu les inégalités (1.1), par (AXcon)

$$\exists \varepsilon > 0, p \succ \varepsilon \delta_{\overline{z}} + (1 - \varepsilon) \delta_{\underline{z}},$$

donc

$$\alpha^* \geq \varepsilon > 0.$$

Comme α^* est le sup de l'ensemble E en membre droit de (1.2), tout $\beta \in]0, \alpha^*[$ est un non-majorant du même ensemble, i.e.

$$\forall \beta \in]0, \alpha^*[, \exists \alpha \in]\beta, \alpha^*], p \succeq \alpha \delta_{\overline{z}} + (1 - \alpha) \delta_{\underline{z}}.$$

et comme $\alpha > \beta$, par le Lemme 1.1.11

$$\forall \beta \in]0, \alpha^*[, p \succeq \beta \delta_{\overline{z}} + (1 - \beta) \delta_{\underline{z}}. \quad (1.3)$$

Distinguons 3 cas.

Cas 1 : $p \succ \alpha^* \delta_{\overline{z}} + (1 - \alpha^*) \delta_{\underline{z}}$.

Alors $\alpha^* < 1$ (sinon $p \succ \delta_{\overline{z}}$, contrairement au Lemme 1.1.10).

Par (AXcon), il existe $\varepsilon \in]0, 1[$ tel que

$$p \succ (1 - \varepsilon) [\alpha^* \delta_{\overline{z}} + (1 - \alpha^*) \delta_{\underline{z}}] + \varepsilon \delta_{\overline{z}}. \quad (1.4)$$

Fixons un ε vérifiant (1.4) et posons

$$\beta := (1 - \varepsilon) \alpha^* + \varepsilon.$$

Alors

$$\beta > (1 - \varepsilon) \alpha^* + \varepsilon \alpha^* = \alpha^*. \quad (1.5)$$

L'inégalité (1.4) sécrit aussi

$$p \succ \beta \delta_{\overline{z}} + (1 - \beta) \delta_{\underline{z}}$$

ce qui montre que $\beta \leq \alpha^*$, contredisant (1.5).

Ce cas ne peut pas se produire.

Cas 2 : $p \prec \alpha^* \delta_{\overline{z}} + (1 - \alpha^*) \delta_{\underline{z}}$.

Par (AXcon), il existe $\varepsilon \in]0, 1[$ tel que

$$p \prec (1 - \varepsilon) [\alpha^* \delta_{\overline{z}} + (1 - \alpha^*) \delta_{\underline{z}}] + \varepsilon \delta_{\underline{z}}. \quad (1.6)$$

Fixons un ε vérifiant (1.6) et posons

$$\beta := (1 - \varepsilon)\alpha^*.$$

L'inégalité (1.6) sécrit aussi

$$p \prec \beta\delta_{\bar{z}} + (1 - \beta)\delta_{\underline{z}}.$$

Or $\beta \in]0, \alpha^*[$, donc cette inégalité contredit l'inégalité (1.3).

Ce cas ne peut pas se produire.

Cas 3 : $p \approx \alpha^*\delta_{\bar{z}} + (1 - \alpha^*)\delta_{\underline{z}}$.

C'est le seul cas possible, ce qui prouve le Lemme. \square

Lemme 1.1.13 *Supposons que $\delta_{\underline{z}} \prec \delta_{\bar{z}}$ et soit $p \in \Delta(Z)$. Alors, il existe un unique $\alpha^* \in [0, 1]$ tel que*

$$p \approx \alpha^*\delta_{\bar{z}} + (1 - \alpha^*)\delta_{\underline{z}}$$

Preuve :

1- Si $\delta_{\underline{z}} \prec p \prec \delta_{\bar{z}}$, la conclusion est établie par le Lemme 1.1.12.

2- Pour $p = \delta_{\bar{z}}$, $\alpha^* = 1$ convient et pour $p = \delta_{\underline{z}}$, $\alpha^* = 0$ convient.

3- Par (AXind), pour tout $\alpha \in [0, 1[$

$$\delta_{\bar{z}} = \alpha\delta_{\bar{z}} + (1 - \alpha)\delta_{\bar{z}} \succ \alpha\delta_{\bar{z}} + (1 - \alpha)\delta_{\underline{z}}$$

ce qui montre l'unicité de la valeur $\alpha^* = 1$ pour $p = \delta_{\bar{z}}$. Par un argument similaire 0 est la seule valeur possible pour $p = \delta_{\underline{z}}$. \square

Désormais, pour tout $p \in \Delta(Z)$, on note $\alpha^*(p)$ le nombre réel fourni par la conclusion du Lemme 1.1.13. Autrement dit, α^* est une *application* $\Delta(Z) \rightarrow [0, 1]$.

Lemme 1.1.14 *Supposons que $\delta_{\underline{z}} \prec \delta_{\bar{z}}$. Soit $p, q \in \Delta(Z)$,*

1- $p \prec q \Leftrightarrow \alpha^*(p) < \alpha^*(q)$

2- $p \approx q \Leftrightarrow \alpha^*(p) = \alpha^*(q)$

Autrement dit : α^* est strictement croissante.

Preuve : Par le Lemme 1.1.11 :

$$\alpha^*(p) < \alpha^*(q) \Rightarrow p \prec q,$$

ce qui entraîne trivialement que

$$\alpha^*(p) > \alpha^*(q) \Rightarrow p \succ q,$$

et par transitivité de la relation \approx :

$$\alpha^*(p) = \alpha^*(q) \Rightarrow p \approx q.$$

Comme les trois cas de figure $p \prec q, p \succ q, p \approx q$ sont disjoints, on conclut que les implications réciproques des 3 implications ci-dessus sont vraies. \square

Lemme 1.1.15 *Supposons que $\delta_{\underline{z}} \prec \delta_{\bar{z}}$. L'application α^* préserve les combinaisons convexes i.e. $\forall p, q \in \Delta(Z), \lambda \in]0, 1[$,*

$$\alpha^*(\lambda p + (1 - \lambda)q) = \lambda \alpha^*(p) + (1 - \lambda) \alpha^*(q)$$

Preuve : Soient $p, q \in \Delta(Z), \lambda \in]0, 1[$. Par définition de α^* (i.e. via le Lemme 1.1.13) :

$$p \approx \alpha^*(p) \delta_{\bar{z}} + (1 - \alpha^*(p)) \delta_{\underline{z}}, \quad q \approx \alpha^*(q) \delta_{\bar{z}} + (1 - \alpha^*(q)) \delta_{\underline{z}}.$$

En utilisant deux fois de suite (AXindl) on obtient :

$$\begin{aligned} \lambda p + (1 - \lambda)q &\approx \lambda[\alpha^*(p) \delta_{\bar{z}} + (1 - \alpha^*(p)) \delta_{\underline{z}}] + (1 - \lambda)[\alpha^*(q) \delta_{\bar{z}} + (1 - \alpha^*(q)) \delta_{\underline{z}}] \\ &= [\lambda \alpha^*(p) + (1 - \lambda) \alpha^*(q)] \delta_{\bar{z}} + [\lambda(1 - \alpha^*(p)) + (1 - \lambda)(1 - \alpha^*(q))] \delta_{\underline{z}}. \end{aligned}$$

L'unicité de α^* prouve alors que :

$$\alpha^*(\lambda p + (1 - \lambda)q) = \lambda \alpha^*(p) + (1 - \lambda) \alpha^*(q).$$

□

Preuve du Théorème 1.1.1.

Cas 1 : $\delta_{\underline{z}} \approx \delta_{\bar{z}}$.

Toute fonction constante $u : Z \rightarrow \mathbb{R}$ convient.

Cas 2 : $\delta_{\underline{z}} \prec \delta_{\bar{z}}$.

Soit $u : Z \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$u(z) := \alpha^*(\delta_z)$$

On vérifie que $p \preceq q \Leftrightarrow \tilde{u}(p) \leq \tilde{u}(q)$.

q.e.d.

1.2 Choix social

Nous mettons sous forme mathématique le problème suivant : comment une assemblée de N individus, placés devant un éventail de choix A , peut prendre une décision (collective donc) alors que les préférences des individus peuvent être “divergentes”. On appelle “fonction de choix” la fonction qui, prenant en argument la suite des préférences, fournit en résultat l'élément de A qui est choisi.

Nous étudierons en TD différentes fonctions de choix concrètes. Nous définissons ici quelques propriétés de ces fonctions. Puis nous démontrons que certaines qualités qui semblent souhaitables (par exemple s'il s'agit d'élire un législateur, un magistrat ou un dirigeant) ne peuvent être simultanément vérifiées.

Axiomes sur les fonctions de choix.

On considère un entier N (le nombre d'électeurs), un ensemble fini A (l'ensemble des alternatives), l'ensemble \mathcal{L}_A des ordres linéaires sur A et une application $f : \mathcal{L}_A^N \rightarrow A$ (une fonction de choix).

Pareto-efficiente

f est dite Pareto-efficiente ssi, pour tout $\vec{P} \in \mathcal{L}_A^N$,

$$[\forall i \in [1, N], \forall b \in A, a P_i b] \Rightarrow f(\vec{P}) = a$$

i.e. si tous les électeurs classent a premier, a est élu.

Non-manipulable

f est dite manipulable ssi, il existe $\vec{P} \in \mathcal{L}_A^N, i \in [1, N], P'_i \in \mathcal{L}_A$, tels que, pour $\vec{P}' = (P_1, \dots, P_{i-1}, P'_i, P_{i+1}, \dots, P_N)$

$$f(\vec{P}') P_i f(\vec{P})$$

i.e. l'électeur i , en *mentant* sur ses préférences, obtient un résultat *meilleur* du point de vue de ses préférences.

Monotone

f est dite monotone ssi, pour tous $\vec{P}, \vec{Q} \in \mathcal{L}_A^N$

$$[f(\vec{P}) = a \text{ et } , \forall i \in [1, N], \forall b \in A, a P_i b \Rightarrow a Q_i b] \Rightarrow f(\vec{Q}) = a$$

i.e. si le candidat a est élu par la suite de préférences \vec{P} , et si dans \vec{Q} a a un meilleur rang dans chaque préférence, alors le candidat a est aussi élu par \vec{Q} .

Neutre

On voit ici \mathcal{L}_A comme l'ensemble des bijections $[1, |A|] \rightarrow A$. Pour tout ensemble E , on note \mathcal{S}_E l'ensemble des bijections de E dans E .

L'application f est dite Neutre *vis à vis des électeurs* ssi, pour tous $\sigma \in \mathcal{S}_{[1, N]}, \vec{P} \in \mathcal{L}_A^N$ on a

$$f(\vec{P} \circ \sigma) = f(\vec{P})$$

L'application f est dite Neutre *vis à vis des candidats* ssi, pour tous $\tau \in \mathcal{S}_A, \vec{P} \in \mathcal{L}_A^N$ on a

$$f(\tau \circ \vec{P}) = \tau(f(\vec{P}))$$

Dictateur

Un entier $i \in [1, N]$ est un dictateur (pour f) ssi, pour tout $\vec{P} \in \mathcal{L}_A^N$

$$f(\vec{P}) = a \Leftrightarrow [\forall b \in A, a P_i b.]$$

Théorème 1.2.1 (Muller-Satterthwait 1977) *Soit A un ensemble de cardinal ≥ 3 .*

Si $f : \mathcal{L}_A^N \rightarrow A$ est Pareto-efficiente et monotone, alors f est dictatoriale.

Preuve : La preuve consiste, partant des hypothèses sur f , à construire des scénarios successifs (i.e. des formes de listes de préférences), de plus en plus généraux, pour lesquels on connaît les résultat de f . Le dernier scénario est si général que l'on peut conclure que f est dictatoriale.

Chaque scénario est décrit par un tableau de la liste des préférences des électeurs : pour tout $i \in [1, N]$, le candidat préféré du i -ème électeur (i.e. l'élément minimum de l'ordre lineaire P_i) est en première ligne de la i -ème colonne.

Etape 1 :

1	2	...	N	(1.7)
a	a	...	a	
⋮	⋮	⋮	⋮	
⋮	⋮	⋮	⋮	
⋮	⋮	⋮	⋮	
b	b	...	b	

Comme f est Pareto-efficiente, dans le scénario (1.7),

$$f(\vec{P}) = a$$

1	2	...	N
b	b	...	b
a	a	...	a
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

(1.8)

dans le scénario (1.8),

$$f(\vec{P}) = b.$$

1	2	...	i	$i+1$...	N
b	b	...	b	a	...	a
a	a	...	a	\vdots	...	\vdots
\vdots						
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	b	\vdots	b

(1.9)

Montrons que, dans le scénario (1.9),

$$f(\vec{P}) \in \{a, b\}.$$

En effet, si dans le scénario (1.9), $f(\vec{P}) = c \notin \{a, b\}$, alors, par monotonie

1	2	...	i	$i+1$...	N
a	a	...	a	a	...	a
b	b	...	b	\vdots	...	\vdots
\vdots						
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	b	\vdots	b

(1.10)

dans le scénario (1.10), on aurait $f(\vec{P}) = c$, ce qui contredirait la Pareto-efficience.

Il existe un entier $n \in [1, N]$ tel que :

1	...	$n-1$	n	$n+1$...	N
b	...	b	a	a	...	a
a	...	a	\vdots	\vdots	...	\vdots
\vdots						
\vdots	\vdots	\vdots	b	b	\vdots	b

(1.11)

1	...	$n-1$	n	$n+1$...	N
b	...	b	b	a	...	a
a	...	a	a	\vdots	...	\vdots
\vdots						
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	b	\vdots	b

(1.12)

dans le scénario (1.11), $f(\vec{P}) = a$ et dans le scénario (1.12), $f(\vec{P}) = b$.

1	...	$n-1$	n	$n+1$...	N
b	...	b	a	a	...	a
a	...	a	b	\vdots	...	\vdots
\vdots						
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	b	\vdots	b

(1.13)

Comme f est monotone, les scénarios (1.11)(1.13) ont le même résultat par f :

$$f(\vec{P}) = a.$$

Etape 2 :

1	...	$n-1$	n	$n+1$...	N
b	...	b	b	\vdots	...	\vdots
\vdots	...	\vdots	a	\vdots	...	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	a	\vdots	a
a	\vdots	a	\vdots	b	\vdots	b

(1.14)

Comme f est monotone, le résultat b dans le scénario (1.12) entraîne que, dans le scénario (1.14), $f(\vec{P}) = b$.

1	...	$n-1$	n	$n+1$...	N
b	...	b	a	\vdots	...	\vdots
\vdots	...	\vdots	b	\vdots	...	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	a	\vdots	a
a	\vdots	a	\vdots	b	\vdots	b

(1.15)

Examinons le scénario (1.15) :

- si $f(\vec{P}) = b$, alors par monotonie on aurait $f(\vec{P}) = b$ dans le scénario (1.13), ce qui n'est pas
- si $f(\vec{P}) = c \notin \{a, b\}$, alors par monotonie on aurait $f(\vec{P}) = c$ dans le scénario (1.14), ce qui n'est pas.

donc $f(\vec{P}) = a$.

Etape 3 :

Soit $c \notin \{a, b\}$. Considérons le scénario :

1	...	$n-1$	n	$n+1$...	N
\vdots	...	\vdots	a	\vdots	...	\vdots
c	...	c	c	c	...	c
b	\vdots	b	b	a	\vdots	a
a	\vdots	a	\vdots	b	\vdots	b

(1.16)

Par monotonie, comme dans le scénario (1.15) $f(\vec{P}) = a$, dans le scénario (1.16) $f(\vec{P}) = a$.

Etape 4 :

1	...	$n-1$	n	$n+1$...	N
\vdots	...	\vdots	a	\vdots	...	\vdots
c	...	c	c	c	...	c
b	\vdots	b	b	b	\vdots	b
a	\vdots	a	\vdots	a	\vdots	a

(1.17)

Par comparaison avec le scénario (1.16), dans le scénario (1.17) on a $f(\vec{P}) \in \{a, b\}$.

Mais si $f(\vec{P}) = b$, alors la valeur de f serait encore b dans le scénario (1.18) ci-dessous :

1	...	$n-1$	n	$n+1$...	N
c	...	c	c	c	...	c
\vdots	...	\vdots	a	\vdots	...	\vdots
b	\vdots	b	b	b	\vdots	b
a	\vdots	a	\vdots	a	\vdots	a

(1.18)

ce qui contredirait la Pareto-efficience. Donc dans le scénario (1.17) $f(\vec{P}) = a$.

Etape 5 :

Soit $\vec{P} \in \mathcal{L}_A^N$ tel que $P_n = (a, \dots)$ (i.e. a est l'élément préféré de n). Par comparaison avec le scénario (1.17) et en tenant compte de la monotonie de f , $f(\vec{P}) = a$.

Ce raisonnement en 5 étapes est valable pour tout $a \in A$. Donc, pour tout $a \in A$ il existe un entier $n_a \in [1, N]$ qui est un dictateur pour f et a :

$$\forall a \in A, \forall \vec{P} \in \mathcal{L}_A^N, P_{n_a} = (a, \dots) \Rightarrow f(\vec{P}) = a.$$

Si il existe $a \neq a' \in A$ tels que $n_a \neq n_{a'}$, alors, en choisissant un $\vec{P} \in \mathcal{L}_A^N$ tel que $P_{n_a} = (a, \dots)$ et $P_{n_{a'}} = (a', \dots)$ on aurait

$$f(\vec{P}) = a = a',$$

ce qui est contradictoire. Donc il existe un entier $n \in [1, N]$ qui est un dictateur pour f . \square

Théorème 1.2.2 (Gibbard-Satterthwait 1973) *Soit A un ensemble de cardinal ≥ 3 .*

Si $f : \mathcal{S}_A^N \rightarrow A$ est surjective et non-manipulable, alors f est dictatoriale.

Esquisse de preuve : Il suffit de montrer que toute fonction $f : \mathcal{S}_A^N \rightarrow A$ surjective et non-manipulable est aussi Pareto-efficiente et monotone, puis d'appliquer le théorème précédent. \square

1.3 Agrégation des préférences

Théorème de Arrow,
à écrire

Chapitre 2

Les jeux

2.1 Jeux extensifs à information complète

Soit un graphe orienté $A = (V, E)$, biparti, de partition $V = V_1 \cup V_2$, qui est une arborescence de racine $r \in V_1$. Le graphe A est l'*arène* du jeu, V_1 (resp. V_2) est l'ensemble des positions du joueur J1 (resp. J2). Une *partie* est une branche de cet arbre i.e.

$$\pi = v_1, v_2, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n \quad (2.1)$$

avec $v_1 = r$, v_n est une feuille, et pour tout $i \in [1, n - 1]$, $(v_i, v_{i+1}) \in E$. On fixe une partition des feuilles de A : $F = F_1 \cup F_2$.

La partie π est *gagnée* par J1 (resp. J2) ssi $v_n \in F_1$ (resp. $v_n \in F_2$).

Un tel jeu est dit *extensif* (car les positions successives des joueurs sont entièrement décrites par les noeuds de l'arbre) et à *information complète* (car chaque joueur choisit son coup en connaissant le noeud où il se trouve). On appelle *stratégie* de J1 (resp. J2) une fonction $\sigma : V_1 \rightarrow V_2$ (resp. $\tau : V_2 \rightarrow V_1$) telle que : $\text{Dom}(\sigma) = \{v \in V_1, \exists v_2 \in V_2, (v_1, v_2) \in E\}$ (analogue pour τ) et $\sigma \subseteq E$ (resp. $\tau \subseteq E$). Une partie π respecte la stratégie σ (resp. τ) si, pour tout i ,

$$\sigma(v_{2i+1}) = v_{2i+2} \quad (\text{resp.} \quad \tau(v_{2i}) = v_{2i+1}).$$

Une stratégie σ (resp. τ) de J1 (resp. de J2) est *gagnante* ssi toute partie respectant σ (resp. τ) est gagnée par J1 (resp. par J2).

Théorème 2.1.1 (Von Neumann 1923) *Dans un jeu extensif, à information complète et où toute partie se termine, l'un des joueurs a une stratégie gagnante.*

Preuve : On traite d'abord le cas restreint où il existe un nombre L tel que, toute partie a une longueur $\leq L$. Puis on traite le cas général.

Cas restreint

Cas général

□

2.2 Jeux sous forme stratégique

On appelle jeu sous forme stratégique un triplet

$$\Gamma = \langle n, (S_i)_{i \in [1, n]}, (r_i)_{i \in [1, n]} \rangle \quad (2.2)$$

où n est un entier naturel (le nombre de joueurs), chaque S_i est un ensemble (l'ensemble des stratégies du joueur i) et pour tout $i \in [1, n]$, r_i est une application $r_i : S_1 \times \dots \times S_i \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}$ (la fonction de gain du joueur i).

On appelle aussi un tel jeu "jeu matriciel", ce vocable évoquant le fait que l'application r_i peut être vue comme une matrice (lorsque $n = 2$) ou comme une matrice généralisée (un tenseur) lorsque $n \geq 3$. On en voit des exemples classiques sur la feuille de TD no 2 : pile-ou-face, pierre-feuille-ciseaux, dilemme du prisonnier.

La notion d'équilibre, introduite par J.Nash, est la suivante : un choix de stratégies par les n joueurs est stable si, chacun des joueurs ne peut améliorer son gain par un changement "local", c'est à dire :

- en changeant sa propre stratégie
- et en faisant l'hypothèse que les autres joueurs maintiennent leurs stratégies.

On dit dans ce cas que le vecteur de stratégies est un *équilibre de Nash*. De façon plus formelle, dans le cas de deux joueurs, un couple de stratégies (σ, τ) est un équilibre de Nash si :

- pour toute stratégie σ' de J_1 , $r_1(\sigma', \tau) \leq r_1(\sigma, \tau)$
- et pour toute stratégie τ' de J_2 , $r_2(\sigma, \tau') \leq r_2(\sigma, \tau)$.

La notion s'étend naturellement aux jeux à n joueurs.

Définition 2.2.1 (Équilibre de Nash) Soit $\Gamma = \langle n, (S_i)_{i \in [1, n]}, (r_i)_{i \in [1, n]} \rangle$ un jeu sous forme stratégique. Un vecteur de stratégies $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_n)$ est un équilibre de Nash si, pour tout $\xi \in S_i$:

$$R_i(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \xi, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n) \leq R_i(\vec{\sigma}).$$

On utilisera souvent dans la suite la notation $\vec{\sigma}_{-i}$ pour le vecteur $\vec{\sigma}$ où l'on a supprimé la composante d'indice i et la notation $(\vec{\sigma}_{-i}, \xi)$ pour le vecteur $\vec{\sigma}$ où l'on a remplacé la composante d'indice i par la stratégie ξ . Avec ces notations, l'inégalité qui caractérise les équilibres de Nash s'écrit : $\forall \xi \in S_i$,

$$R_i(\vec{\sigma}_{-i}, \xi) \leq R_i(\vec{\sigma}).$$

Deux joueurs et somme nulle Considérons un jeu en forme stratégique à deux joueurs et à somme nulle.

On peut alors décrire les deux applications r_1, r_2 par r_1 seulement. Notons désormais $r := r_1$. Posons

$$\underline{v} := \max_{\sigma \in S_1} \{ \min_{\tau \in S_2} \{ r(\sigma, \tau) \} \}, \quad \bar{v} := \min_{\tau \in S_2} \{ \max_{\sigma \in S_1} \{ r(\sigma, \tau) \} \}$$

On a toujours l'inégalité :

$$\underline{v} \leq \bar{v}.$$

(La preuve est laissée en exercice). L'idée intuitive est que, si J_1 dévoile sa stratégie, puis J_2 peut choisir la meilleure défense, J_1 a un gain plus petit que lorsque c'est au contraire J_2 qui dévoile sa stratégie.

On dit que le jeu stratégique a une valeur lorsque

$$\underline{v} = \bar{v}. \tag{2.3}$$

Lorsque l'égalité (2.3) est réalisée, on appelle *valeur du jeu* ce nombre $v := \underline{v} = \bar{v}$.

2.3 Jeux matriciels finis

Soit Γ un jeu stratégique défini par un triplet de la forme (2.4) où chaque ensemble S_i est *fini*. On dit que Γ est un jeu matriciel fini.

On définit alors l'extension mixte de Γ par

$$\Gamma^m := \langle n, (\Delta(S_i))_{i \in [1, n]}, (R_i)_{i \in [1, n]} \rangle \quad (2.4)$$

où

$$R_i(p_1, \dots, p_i, \dots, p_n) = \mathbb{E}(r_i)$$

i.e. l'espérance du gain du joueur i , pour la loi de probabilité sur $\prod_{i=1}^n S_i$ qui est le produit des lois p_i .

Chapitre 3

Équilibres de Nash

3.1 Théorème de Kakutani

Nous présentons ici un théorème de point fixe qui est l'outil central utilisé par J. Nash pour prouver l'existence d'équilibres dans les extensions mixtes des jeux matriciels finis. Nous procédons en trois étapes :

- le lemme de Sperner
- le théorème de point fixe de Brouwer
- le théorème de Kakutani proprement dit.

3.1.1 Préliminaires géométriques

Rappelons quelques notions géométriques. Notons \mathbb{E}^n l'ensemble \mathbb{R}^n . Il possède une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{R} et aussi une structure d'espace affine sur \mathbb{R} . Soit \mathcal{A} une partie de \mathbb{E}^n . On appelle *combinaison linéaire* de points de \mathcal{A} , tout point de la forme

$$\sum_{i=1}^p \mu_i A_i$$

où $\mu_i \in \mathbb{R}$ et les A_i sont des points de \mathcal{A} .

On appelle *combinaison affine* de points de \mathcal{A} , tout point de la forme

$$\sum_{i=1}^p \mu_i A_i$$

où les A_i sont des points de \mathcal{A} et $\sum_{i=1}^p \mu_i = 1$.

On appelle *combinaison convexe* de points de \mathcal{A} , tout point de la forme

$$\sum_{i=1}^p \mu_i A_i$$

où les A_i sont des points de \mathcal{A} et $\sum_{i=1}^p \mu_i = 1$ et $\forall 1 \leq i \leq p, 0 \leq \mu_i \leq 1$.

Définition 3.1.1 : 1- Une partie $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{E}^n$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{E}^d , ssi elle est fermée par combinaison linéaire ;

2- Une partie $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{E}^n$ est un sous-espace affine de \mathbb{E}^d , ssi elle est fermée par combinaison affine ;

3- Une partie $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{E}^n$ est convexe, ssi elle est fermée par combinaison convexe.

On peut vérifier que \mathcal{A} est convexe ssi, pour toute paire de points $P, Q \in \mathcal{A}$, le segment $[P, Q]$ est inclus dans \mathcal{A} .

Etant donné $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{E}^n$ on note :

$$\text{vect}(\mathcal{A}) = \left\{ \sum_{i=1}^p \mu_i A_i \mid p \geq 0, \mu_i \in \mathbb{R}, A_i \in \mathcal{A} \right\}$$

c'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant \mathcal{A} .

$$\langle \mathcal{A} \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^p \mu_i A_i \mid p \geq 0, \mu_i \in \mathbb{R}, A_i \in \mathcal{A} \right\}$$

c'est le plus petit sous-espace affine contenant \mathcal{A} .

$$\text{conv}(\mathcal{A}) = \left\{ \sum_{i=1}^p \mu_i A_i \mid p \geq 0, \mu_i \in \mathbb{R}, A_i \in \mathcal{A} \right\}$$

c'est la plus petite partie convexe contenant \mathcal{A} ou encore *l'enveloppe convexe* de \mathcal{A} .

Remarquons que si \mathcal{A} est finie, alors $\text{conv}(\mathcal{A})$ est fermé et borné, donc $\text{conv}(\mathcal{A})$ est un convexe compact. Une partie S de \mathbb{E}^n est un *polytope* ssi, il existe une partie finie $V \subseteq \mathbb{E}^n$ telle que

$$S = \text{conv}(V).$$

Une partie S de \mathbb{E}^n est un *simplexe* de dimension d ssi, il existe des points $v^0, \dots, v^d \in \mathbb{E}^n$, affinement indépendants, tels que

$$S = \text{conv}(\{v^0, \dots, v^d\})$$

Les points v^i ($0 \leq i \leq d$) sont les *sommets*¹ de S et les parties de la forme $\text{conv}(V')$ où $V' \subseteq \{v^0, \dots, v^d\}$ sont les *faces* de S .

Définition 3.1.2 Soit $S \subseteq \mathbb{E}^n$. Une triangulation de S est un ensemble de simplexes \mathcal{T} tel que :

- si T' est une face de $T \in \mathcal{T}$, alors $T' \in \mathcal{T}$
- si $T, T' \in \mathcal{T}$, alors $T \cap T'$ est une face commune de T et T'
- $\bigcup_{T \in \mathcal{T}} T = S$

Nous voulons maintenant nous assurer du fait suivant : si T est un $(d-1)$ -simplexe d'une triangulation \mathcal{T} de $S \subseteq \mathbb{E}^d$, alors T ne peut être une face que d'*au plus deux* d -simplexes de \mathcal{T} . Par exemple, pour $d = 3$, un triangle (de \mathcal{T}) ne peut être une face que d'*au plus deux* tétraèdres (de \mathcal{T}). L'argument intuitif est qu'il n'y "pas assez de place" dans \mathbb{E}^d pour contenir trois d -simplexes ayant une $(d-1)$ face commune, sans que deux d'entre eux ne se "chevauchent".

Lemme 3.1.3 Soit $x \in \mathbb{E}^n$ et $r \in \mathbb{R}, r > 0$. Alors la boule $B(x, r)$ est convexe.

(Ce lemme se déduit aisément du fait que la distance sur \mathbb{R}^n est définie par une norme).

Lemme 3.1.4 Soit $S \subseteq \mathbb{E}^d$ un d -simplexe. Alors la frontière de S est l'union des $(d-1)$ -faces de S .

1. on vérifie que l'ensemble S définit entièrement l'ensemble de ses sommets

Preuve : 1- Choisissons le repère affine $(u^i)_{0 \leq i \leq d}$ défini par : u^0 est le vecteur nul et $(u^i)_{1 \leq i \leq d}$ est la base canonique de $\mathbb{E}^d = \mathbb{R}^d$. Considérons l'application "coordonnées affines" dans ce repère, $C_u : \mathbb{E}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$:

$$x = \sum_{i=0}^d \mu_i u^i \mapsto (\mu_0, \dots, \mu_i, \dots, \mu_d) \quad (\text{où } \sum_{i=0}^d \mu_i = 1).$$

Donc

$$C_u(x) = (1 - \sum_{i=1}^d x_i, x).$$

Comme chaque application coordonnée de C_u est continue, C_u est continue.

2- Considérons maintenant un repère affine $(v^i)_{0 \leq i \leq d}$ quelconque.

L'application $h_{v,u} : \sum_{i=0}^d \mu_i v^i \mapsto \sum_{i=0}^d \mu_i u^i$ (pour $\sum_{i=0}^d \mu_i = 1$) est un isomorphisme affine de \mathbb{E}^d dans \mathbb{E}^d , donc est continu. Finalement, l'application $C_v : \mathbb{E}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ qui applique chaque $x \in \mathbb{E}^d$ sur son vecteur de coordonnées barycentriques $C_v(x)$, est la composée de $h_{v,u}$ par C_u , donc est continue.

3- Soient $v^0, \dots, v^d \in \mathbb{E}^n$, des points affinement indépendants de \mathbb{E}^d et S tel que $S = \text{conv}(\{v^0, \dots, v^d\})$.

3.1 Soit $x \in S$ tel que $C_v(x)$ a toutes ses composantes non-nulles :

$$x = \sum_{i=0}^d \mu_i v^i \text{ où } \forall i \in [0, d], \mu_i > 0 \text{ et } \sum_{i=0}^d \mu_i = 1.$$

Soit $\varepsilon = \min\{\mu_i \mid 0 \leq i \leq d\}$. Notons

$$\Delta := \{\vec{\mu} \in \mathbb{R}^{d+1} \mid \sum_{i=0}^d \mu_i = 1\}.$$

Du point de vue des coordonnées barycentriques, toute la boule de rayon ε centrée en $C_v(x)$ est incluse dans $C_v(S)$:

$$B(C_v(x), \varepsilon) \cap \Delta \subseteq C_v(S).$$

Par continuité de C_v , il existe $\varepsilon' > 0$ tel que :

$$C_v(B(x, \varepsilon')) \subseteq B(C_v(x), \varepsilon)$$

et comme $\text{Im}(C_v) = \Delta$

$$C_v(B(x, \varepsilon')) \subseteq C_v(S)$$

et comme C_v est une bijection de \mathbb{E}^d dans Δ

$$B(x, \varepsilon') \subseteq S.$$

3.2 Soit $x \in S$ tel que $C_v(x)$ a au moins une composante nulle. Par exemple supposons que

$$x = \sum_{i=0}^d \mu_i v^i \text{ où } \sum_{i=0}^d \mu_i = 1, \forall i \in [0, d] \mu_i \geq 0 \text{ et } \mu_0 = 0.$$

Soit $i \in [1, d]$ une coordonnée non-nulle de x : $\mu_i > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n} < \mu_i$. Pour tout $m \geq n$ posons :

$$x_m := \left(\sum_{j \notin \{0, i\}} \mu_j v^j \right) + \left(\mu_i + \frac{1}{m} \right) v^i - \frac{1}{m} v^0.$$

Comme $x \in S$,

$$x \in \overline{S}.$$

Comme $x_m \in \mathbb{E}^d \setminus S$ et $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = x$,

$$x \in \overline{\mathbb{E}^d \setminus S}.$$

Finalement

$$x \in \partial(S).$$

De (3.1) et (3.2) on conclut que

$$\partial(S) = \{x \mid C_v(x) \in \Delta \text{ et } \exists i \in [0, d], (C_v(x))_i = 0\}$$

i.e. que

$$\partial(S) = \bigcup_{i \in [0, d]} \text{conv}(\{v^j \mid 0 \leq j \leq d, j \neq i\})$$

□

Lemme 3.1.5 *Soit F une $(d-1)$ -face d'un d -simplexe $S \subseteq \mathbb{E}^d$. Soit H l'hyperplan support de F et $\overline{H^+}$ le demi-espace de frontière H qui contient S . Soit x un point de l'intérieur relatif de F (noté $\text{int}(F)$). Alors, il existe $\epsilon > 0$ tel que*

$$B(x, \epsilon) \cap H^+ \subseteq \overset{\circ}{S}.$$

Preuve : $\partial S \setminus \text{int}(F)$ est l'union de toutes les $(d-1)$ -faces de S autres que F . C'est donc une union finie de parties compactes de \mathbb{E}^d , donc une partie compacte de \mathbb{E}^d . Comme $x \notin S \setminus \text{int}(F)$, qui est compacte, on en déduit que

$$\delta := d(x, \partial S \setminus \text{int}(F)) > 0.$$

Posons

$$\epsilon := \frac{\delta}{2}.$$

Soit v^i le sommet de S qui n'appartient pas à F et soit y un point de $[x, v^i]$ tel que

$$d(x, y) = \epsilon.$$

(Ce point existe car $d(x, v^i) \geq \inf\{d(x, x') \mid x' \in S \setminus \text{int}(F)\} = \delta$.)

1- Par convexité, comme $x, v^i \in S$, le point y aussi appartient à S .

2- Comme $v^i \notin F$, il n'est pas possible que $y \in F$, sinon, par combinaison affine on aurait $v^i \in H$, ce qui contredirait le fait que les $\{v^j \mid 0 \leq j \leq d\}$ sont affinement indépendants. D'autre part, comme $d(x, y) = \delta/2 < \delta$, $y \notin \partial S \setminus \text{int}(F)$. Donc $y \notin \partial S$. Finalement,

$$y \in S \setminus \partial S = \overset{\circ}{S}.$$

3- Soit $z \in B(x, \epsilon) \cap H^+$.

Comme H^+ est convexe, $[y, z] \subseteq H^+$, ce qui entraîne que $[y, z] \cap F = \emptyset$.

Par le Lemme 3.1.3, $\forall t \in [y, z], d(x, t) \leq \varepsilon$, ce qui entraîne que $[y, z] \cap (\partial S \setminus \text{int}(F)) = \emptyset$.

Donc

$$[y, z] \cap \partial S = \emptyset \quad (3.1)$$

Supposons que $z \notin S$. Comme $y \in S$, il existerait un point $t \in [y, z] \cap \partial S$, ce qui est impossible d'après (3.1). Donc $z \in S$. Comme, toujours par (3.1), on a aussi que $z \notin \partial S$, finalement $z \in \overset{\circ}{S}$. \square

Lemme 3.1.6 *Si T est un $(d-1)$ -simplexe d'une triangulation \mathcal{T} de $S \subseteq \mathbb{E}^d$, alors T ne peut être une face que d'au plus deux d -simplexes de \mathcal{T} .*

Preuve : Supposons que $T \subseteq T_i$ pour trois simplexes différents $T_i \in \mathcal{T}$ ($i \in [1, 3]$). Soit H l'hyperplan affine engendré par T . Deux au moins des T_i sont inclus dans le même demi-espace fermé de frontière H : notons-le $\overline{H^+}$ et supposons que

$$T_1, T_2 \subseteq \overline{H^+}.$$

Soit $x \in \text{int}(T)$. Par le Lemme 3.1.5, appliqué successivement à T_1 , puis à T_2 , on obtient un nombre $\varepsilon > 0$ tel que :

$$B(x, \varepsilon) \cap H^+ \subseteq \overset{\circ}{T}_1 \cap \overset{\circ}{T}_2.$$

Comme $B(x, \varepsilon) \cap H^+ \neq \emptyset$ on en déduit qu'il existe un point

$$y \in \overset{\circ}{T}_1 \cap \overset{\circ}{T}_2.$$

Par le Lemme 3.1.4 y n'appartient à aucune face propre de T_1 (ni de T_2). Donc $T_1 \cap T_2$ n'est pas une face de T_1 (ni de T_2), ce qui contredit l'hypothèse que \mathcal{T} est une triangulation. \square

Nous précisons maintenant quel peut être le nombre de d -simplexes de \mathcal{T} qui contiennent un $(d-1)$ -simplexe T d'une triangulation \mathcal{T} . Nous avons vu qu'il y en a au plus deux (Lemme 3.1.6). Nous montrons que, lorsque T est sur le bord de S , il y en a un et lorsque T n'est pas sur le bord, il y en a deux.

Lemme 3.1.7 *Soit T un $(d-1)$ -simplexe d'une triangulation \mathcal{T} d'un simplexe $S \subseteq \mathbb{E}^d$:*
 1- *si $T \subseteq \partial S$, alors T est une face d'un et un seul d -simplexe de \mathcal{T} .*
 2- *sinon, T est une face d'exactly deux d -simplexes de \mathcal{T} .*

Preuve : Soit $H := \langle F \rangle$ (l'hyperplan engendré par F). Soit $x \in \overset{\circ}{T}$. Notons, pour tout $k \in [0, d]$, \mathcal{T}_k (resp. $\mathcal{T}_{\leq k}$) l'ensemble des cellules de \mathcal{T} qui sont de dimension k (resp. $\leq k$). Si $x \in G \in \mathcal{T}_{\leq d-1}$, alors, comme $T \cap G$ est une face de T , $T = G$. Donc $T \notin \bigcup_{G \in \mathcal{T}_{\leq d-1} \setminus \{T\}} G$. Posons

$$d_0 := d(x, \bigcup_{G \in \mathcal{T}_{\leq d-1} \setminus \{T\}} G).$$

1- Plaçons-nous dans le cas où $T \subseteq \partial S$.

Par le Lemme 3.1.4, appliqué à $F := T$, il existe $d_0 > \varepsilon > 0$ tel que

$$B(x, \varepsilon) \cap H^+ \subseteq \overset{\circ}{S}.$$

Soit $y \in B(x, \varepsilon) \cap H^+$. Alors $y \in \overset{\circ}{S} \subseteq S$, donc il existe $T' \in \mathcal{T}_k$ ($0 \leq k \leq d$) tel que

$$y \in T'.$$

Comme $\varepsilon < d_0$, la dimension de T' doit être $k = d$.

Si $x \notin T'$, alors le segment $[x, y]$ couperait $\partial T'$ en un point z et l'on aurait $0 < d(x, z) \leq d(x, y) \leq \varepsilon < d_0$ alors que $z \in G$ pour l'une des cellules $G \in \mathcal{T}_{\leq d-1} \setminus \{T\}$. C'est impossible. Donc $x \in T'$, et comme $T \cap T'$ doit être une face de T , $T \subseteq T'$.

Par le raisonnement du Lemme 3.1.6, il existe au plus une seule autre cellule T'' de dimension d qui contienne T et dans ce cas $T'' \subseteq \overline{H^-}$. Mais ici, $S \cap H^- = \emptyset$, donc ce n'est pas possible.

2- Plaçons-nous dans le cas où $T \not\subseteq S$.

Par le Lemme 3.1.4, $x \in \overset{\circ}{S}$. Donc il existe $d_0 > \varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subseteq S$. Comme $d_0 > \varepsilon$ on a même, pour chaque $\alpha \in \{+, -\}$, l'inclusion

$$B(x, \varepsilon) \cap H^\alpha \subseteq S \setminus \bigcup_{G \in \mathcal{T}_{\leq d-1} \setminus \{T\}} G.$$

Par les arguments du point 1, pour chaque $\alpha \in \{+, -\}$,

$$\exists T_\alpha \in \mathcal{T}_d, T_\alpha \subseteq \overline{H^\alpha} \text{ et } T \subseteq T_\alpha.$$

Ainsi T est une face de deux d -simplexes de \mathcal{T} et, par le Lemme 3.1.6, elle ne peut pas être face de trois d -simplexes de \mathcal{T} . \square

3.1.2 Lemme de Sperner

Définition 3.1.8 Soit S le d -simplexe engendré par les points v^0, \dots, v^d . et T une triangulation de S . Pour tout point $x \in S$, notons (x_0, \dots, x_d) le vecteur des coordonnées barycentriques de x dans le repère affine v^0, \dots, v^d . On pose :

$$L(x) := \{i \in [0, d] \mid x_i > 0\}.$$

Un étiquetage des sommets de T sur $[0, d]$ est une application $\lambda : \text{Som}(T) \rightarrow [0, d]$ telle que,

$$\forall i \in [0, d], \lambda(v^i) = i.$$

L'étiquetage est propre si,

$$\forall x \in \text{Som}(T), \lambda(x) \in L(x).$$

Un simplexe $t \in T$, de dimension d , est dit *complètement étiqueté* ssi l'ensemble des couleurs de ses sommets est exactement $[0, d]$ (i.e. $\lambda(\text{Som}(t)) = [0, d]$).

Lemme 3.1.9 (Sperner) Soit T une triangulation d'un d -simplexe S et soit $\lambda : \text{Som}(T) \rightarrow [0, d]$ un étiquetage propre de T . Alors, T a un nombre impair de simplexes complètement-étiquetés.

Preuve : Par induction sur la dimension de S .

Base : $\dim(S) = 0$.

$S = \{v^0\}$. Donc $T = \{S\}$. Le nombre de simplexes complètement-étiquetés vaut 1.

Induction : $\dim(S) = d > 0$.

Appelons *chambre* tout simplexe $t \in T$ de dimension d . Appelons *porte* tout simplexe $t \in T$, de dimension $(d-1)$, étiqueté par $\{0, 1, \dots, d-1\}$ (exactement).

Rappelons que, par le Lemme 3.1.4, la frontière de S est l'union des simplexes $\langle v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_d \rangle$.

Comptons le nombre de portes sur la frontière de S :

Si $i \neq d$: $\langle v^0, \dots, v^{i-1}, v^{i+1}, \dots, v^d \rangle$ ne contient aucune porte

Si $i = d$: $\langle v^0, \dots, v^{i-1}, v^{i+1}, \dots, v^d \rangle$ contient, par hypothèse de récurrence, un nombre impair de portes.

Comptons le nombre de portes d'une chambre t de T :

Si $\lambda(t) = \{0, 1, \dots, d\}$: une porte

Si $\lambda(t) = \{0, 1, \dots, d-1\}$: deux portes

Si $\lambda(t) \not\supseteq \{0, 1, \dots, d-1\}$: aucune porte

Appelons "chaîne" une suite alternée de portes et de chambres telle que, si une porte et une chambre se touchent, alors la porte est contenue dans la chambre. Une chaîne est dite "simple" si elle ne comporte aucune répétition, ni de porte, ni de chambre. Remarquons que, par le Lemme 3.1.7, toute porte du bord de S est reliée à exactement une chambre et toute porte qui n'est pas sur le bord de S est reliée à exactement deux chambres. Toute porte de la frontière est reliée par une chaîne simple maximale, soit à une autre porte de la frontière, soit à une chambre complètement étiquetée (et une seule). Il y a un nombre impair de portes sur la frontière : un nombre pair d'entre elles sont appariées deux à deux par une chaîne simple ; un nombre impair de ces portes aboutit à une chambre complètement étiquetée. Cette relation entre portes non-appariées de la frontière et chambres complètement étiquetées est une bijection, donc le nombre de chambres complètement étiquetées, *reliées à la frontière* (par une chaîne simple), est impair.

Soit C une chambre complètement étiquetée, non-reliée à la frontière : considérons la chaîne simple maximale c partant de C :

- si elle se termine par une porte P :

— soit P est sur la frontière (ce qui n'est pas),

— soit P touche C , ce qui implique, puisque C n'a qu'une porte et c n'a pas de répétition de porte, que $c = (C, P)$; la porte P , qui n'est pas sur la frontière, appartient aussi à une chambre C' autre que C ; mais alors la chaîne c n'est pas maximale,

- si elle se termine par une chambre C' qui a deux portes :

alors $C \neq C'$ (car la chaîne est simple) ; soit P la seconde porte de C' :

— si P était déjà dans c , alors C' était aussi déjà dans c , ce qui contredit la simplicité de c ;

— si P n'était pas dans c , alors la chaîne (c, P) est simple, ce qui contredit la maximalité de c .

Donc la chaîne simple maximale c partant de C se termine par une chambre $C' \neq C$ qui n'a qu'une porte. Finalement, les chambres complètement étiquetées, *non-reliées à la frontière* sont appariées deux à deux par une chaîne simple, et sont donc en nombre pair.

Le nombre total de chambres complètement étiquetées est donc impair. \square

3.1.3 Théorème de Brouwer

Théorème 3.1.10 (Brouwer 1910) *Soit S un simplexe de dimension d de \mathbb{R}^d et $f : S \rightarrow S$ une application continue. Alors, il existe $x \in S$ tel que $f(x) = x$.*

Preuve : Soit S un simplexe de dimension d de \mathbb{R}^d :

$$S = \langle v^0, \dots, v^i, \dots, v^d \rangle$$

Soit $f : S \rightarrow S$ une application continue. Soit T_δ une triangulation de S de maille δ . Définissons un étiquetage λ_δ des sommets s de T_δ sur $[0, d]$:

$$\lambda_\delta(s) := \min\{i \in [0, d] \mid (s)_i \geq (f(s))_i \text{ et } (s)_i > 0\}. \quad (3.2)$$

Fait 3.1.11 *L'application λ_δ est bien définie.*

Il suffit que l'ensemble en membre droit de (3.2) soit non-vidé : s est combinaison convexe des v^i :

$$s = \sum_{i=0}^d s_i v^i \text{ où } \sum_{i=0}^d s_i = 1 \text{ et } \forall i, s_i \geq 0.$$

Si on avait , $\forall i \in [0, d], s_i > 0 \Rightarrow (s)_i < (f(s))_i$ alors on aurait $1 = \sum_{i=0}^d s_i < \sum_{i=0}^d (f(s))_i = 1$ ce qui est impossible.

Fait 3.1.12 *L'application λ_δ est un étiquetage propre.*

En effet $\lambda_\delta(s)$ est un entier i tel que $s_i > 0$ donc $\lambda_\delta(s) \in L(s)$. q.e.d.

Considérons une suite de triangulations T_δ où δ tend vers 0. Par le lemme de Sperner, chaque triangulation T_δ possède un simplexe Δ_δ complètement étiqueté ; pour tout $i \in [0, d]$ notons

$$x_\delta^i$$

le sommet de Δ_δ étiqueté par i . Comme S est compact, il existe une sous-suite de triangulations telle que chaque suite de points x_δ^i converge (lorsque δ tend vers 0) vers un point $x^i \in S$. Comme δ tend vers 0,

$$x^0 = x^1 = \dots = x^i = \dots = x^d.$$

Notons x ce point.

Fait 3.1.13 *Pour tout $i \in [0, d]$, $(x)_i \geq (f(x))_i$*

Supposons que $(x)_i < (f(x))_i$. Posons $\varepsilon = (f(x))_i - (x)_i$.

Comme f est continue et l'application $v \mapsto (v)_i$ est continue,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^i)_i = (x)_i \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n^i))_i = (f(x))_i$$

Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N \Rightarrow |(x_n^i)_i - (x^i)_i| \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ et } n \geq N \Rightarrow |(f(x_n^i))_i - (f(x^i))_i| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Donc

$$(f(x_N^i))_i \geq \frac{\varepsilon}{3} + (x_N^i)_i$$

ce qui contredit le fait que $\lambda(x_N^i) = i$. q.e.d.

Sachant que $\sum_{i=0}^d (x)_i = \sum_{i=0}^d (f(x))_i$, le fait 3.1.13, entraîne que pour tout $i \in [0, d]$, $(x)_i = (f(x))_i$, donc que $x = f(x)$. \square

3.1.4 Théorème de Kakutani

Nous prouvons tout d'abord ce lemme dont nous déduirons ensuite le théorème de Kakutani.

Lemme 3.1.14 *Soit S un simplexe de dimension d et soit $f \subseteq S \times S$. Si*

1- $\forall x \in S$, $f(x)$ est convexe, non-vidé

2- f est une partie fermée de $S \times S$,

alors $\exists x^* \in S \mid x^* \in f(x^*)$.

Preuve : Soit T^n la nième subdivision barycentrique de S .
Définissons une application $\Phi_n : \text{Som}(T^n) \rightarrow S$ par :

$$\Phi_n(s) := y$$

où l'on choisit $y \in f(s)$ (grâce à l'hypothèse 1, via l'axiome du choix²).

On étend ensuite Φ_n à S tout entier en une application convexe sur chaque cellule de T^n . Par le théorème de point-fixe de Brouwer, Φ_n a un point fixe :

$$x_n \in S, \Phi_n(x_n) = x_n.$$

Comme S est compact, il existe une injection $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et un point $x \in S$ tels que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{\alpha(n)} = x.$$

Montrons maintenant que $x \in f(x)$.

Comme Φ_n est convexe sur chaque cellule de T^n , pour tout n , il existe des sommets x_n^i de même cellule de T^n et des coefficients $\mu_n^i \in [0, 1]$, avec $\mu_n^i \geq 0$ et $\sum_{i=0}^d \mu_n^i = 1$, tels que

$$x_n = \sum_{i=0}^d \mu_n^i \Phi_n(x_n^i) \quad (3.3)$$

Notons $y_n^i := \Phi_n(x_n^i)$ (on sait que $y_n^i \in f(x_n^i)$).

Par extractions successives de suites convergentes (à partir de suites à valeur dans des espaces compacts) on obtient une injection $\beta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que

$$x_{\beta(n)} \rightarrow x, \quad x_{\beta(n)}^i \rightarrow x, \quad \mu_{\beta(n)}^i \rightarrow \mu^i, \quad y_{\beta(n)}^i \rightarrow y^i.$$

Comme la suite $(x_{\beta(n)}^i, y_{\beta(n)}^i)$ a toutes ses valeurs dans f , qui est fermé (hypothèse 2), sa limite appartient à f :

$$y^i \in f(x).$$

En passant à la limite dans l'égalité (3.3) on obtient :

$$x = \sum_{i=0}^d \mu^i y^i$$

avec $\mu^i \geq 0$ et $\sum_{i=0}^d \mu^i = 1$, et comme chaque y^i appartient au convexe $f(x)$ on a bien

$$x \in f(x).$$

□

Théorème 3.1.15 (Kakutani 1941) Soit X un sous-espace compact, convexe de \mathbb{R}^n et $f \subseteq X \times X$. Si

- 1- $\forall x \in X, f(x)$ est convexe, non-vide
 - 2- f est une partie fermée de $X \times X$,
- alors $\exists x^* \in X \mid x^* \in f(x^*)$.

2. on peut aussi choisir y comme le point *lexicographiquement le plus petit*, car $f(x)$ est un fermé borné

Preuve : Soit E le sous-espace affine engendré par X . Notons d sa dimension. Comme X est compact, il existe un simplexe de E , S' , de dimension d , contenant X . Soit P un point de l'intérieur de X dans E (un tel point existe : par exemple l'équibarycentre de $d+1$ points affinement indépendants de X). À un isomorphisme affine près, on peut supposer que $E = \mathbb{R}^d$ et que $P = 0$. On définit alors une application $f' : S' \rightarrow 2^{S'}$ par :

$$f'(s) := f(M(s) \cdot s)$$

où

$$\forall s \in \mathbb{R}^d, M(s) := \max\{m \in [0, 1] \mid m \cdot s \in X\}.$$

Remarquons que f' prolonge f : si $s \in X$ alors $M(s) = 1$.

Remarquons aussi que $\forall s' \in S', \exists s \in X \mid f'(s') = f(s)$. Donc f' vérifie l'hypothèse 1.

Fait 3.1.16 *La fonction $M : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ est continue.*

Montrons tout d'abord que

$$\forall s \in X, \forall \varepsilon > 0, (1 - \varepsilon)s \in \overset{\circ}{X}$$

En effet, comme 0 appartient à $\overset{\circ}{X}$, il existe un rayon $r > 0$ tel que $B(0, r) \subseteq X$. Soit $u \in B(0, \varepsilon \cdot r)$.

$$(1 - \varepsilon)s + u = (1 - \varepsilon) \cdot s + \varepsilon \cdot \frac{u}{\varepsilon}$$

Comme $s \in X$, $\frac{u}{\varepsilon} \in B(0, r) \subseteq X$ et X est convexe

$$(1 - \varepsilon)s + u \in X$$

Nous avons ainsi montré que

$$B((1 - \varepsilon)s, \varepsilon \cdot r) \subseteq X$$

donc que $(1 - \varepsilon)s \in \overset{\circ}{X}$.

Soit $s \in \mathbb{R}^d$ et $m = M(s)$.

cas 1 : $m < 1$.

Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que,

$$(m + \varepsilon)s \notin X, \quad (m - \varepsilon)s \in \overset{\circ}{X}.$$

Comme $\mathbb{R}^d - X$ est ouvert, il existe $r_1 > 0$ tel que

$$\forall s' \in \mathbb{R}^d, \|s' - s\| \leq r_1 \Rightarrow (m + \varepsilon)s' \notin X$$

Comme $\overset{\circ}{X}$ est ouvert, il existe $r_2 > 0$ tel que

$$\forall s' \in \mathbb{R}^d, \|s' - s\| \leq r_2 \Rightarrow (m - \varepsilon)s' \in \overset{\circ}{X}$$

En prenant $r := \min\{r_1, r_2\}$ on obtient que

$$\|s' - s\| \leq r \Rightarrow M(s') \in [m - \varepsilon, m + \varepsilon].$$

cas 2 : $m = 1$.

Par un raisonnement analogue on trouve qu'il existe $r_1 > 0$ tel que

$$\|s' - s\| \leq r_1 \Rightarrow M(s') \in [1 - \varepsilon, 1].$$

q.e.d.

Montrons maintenant que f' est fermée.

Soit $(s_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de couples de f' , convergeant vers un couple $(s, y) \in E$. Par continuité de M :

$$s_n \rightarrow s, \quad M(s_n) \rightarrow M(s), \quad M(s_n) \cdot s_n \rightarrow M(s) \cdot s$$

Comme f est fermée et $\forall n \in \mathbb{N}, (M(s_n) \cdot s_n, y_n) \in f$

$$(M(s) \cdot s, y) \in f$$

donc, par définition de f' ,

$$(s, y) \in f'.$$

Par le Lemme 3.1.14 f' admet un point $x^* \in f'(x^*)$. Mais $\text{Im}(f') \subseteq X$ donc $x^* \in X$ et $x^* \in f(x^*)$. \square

3.2 Théorème de Nash

Théorème 3.2.1 (Nash 1950) *Soit Γ un jeu matriciel fini. Alors, l'extension mixte Γ_m de Γ admet un équilibre de Nash.*

Précisons les notations.

Γ est un jeu à N joueurs. Le joueur i ($i \in [1, N]$) a un ensemble de stratégies (fini) S_i . On rappelle que $\Delta(S_i)$ est l'ensemble des distributions de probabilités sur S_i (c'est un simplexe de dimension $\text{Card}(S_i) - 1$). Pour tout t-uple de "stratégies mixtes" $(\sigma_1, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_N) \in \prod_{i=1}^N \Delta(S_i)$ le *gain* du joueur i est un nombre réel $R_i(\sigma_1, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_N)$:

$$R_i : \prod_{i=1}^N \Delta(S_i) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Chaque R_i est une application "exactement convexe" : $\forall j \in [1, N], p \in [0, 1], \sigma, \sigma' \in S_j$

$$\begin{aligned} R_i(\sigma_1, \dots, \sigma_{j-1}, p\sigma + (1-p)\sigma', \sigma_{j+1}, \dots, \sigma_N) &= p \cdot R_i(\sigma_1, \dots, \sigma_{j-1}, \sigma, \sigma_{j+1}, \dots, \sigma_N) \\ &+ (1-p) \cdot R_i(\sigma_1, \dots, \sigma_{j-1}, \sigma', \sigma_{j+1}, \dots, \sigma_N). \end{aligned}$$

Fait 3.2.2 *L'espace $X := \prod_{i=1}^N \Delta(S_i)$ est une partie compacte et convexe de \mathbb{R}^d , où $d := \sum_{i=1}^N \text{Card}(S_i)$.*

En effet, X est le produit direct des simplexes $\Delta(S_i)$. Comme un produit de convexes est convexe, il est convexe. Comme un produit de fermés bornés est fermé et borné, il est fermé et borné, donc c'est une partie compacte de \mathbb{R}^d . q.e.d.

Définissons pour tout $i \in [1, N]$ l'application $f_i : X \rightarrow 2^{\Delta(S_i)}$ par

$$f_i(\sigma_1, \dots, \sigma_N) = \{\tau \in \Delta(S_i) \mid R_i(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \tau, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_N) \text{ est maximal}\}$$

puis $f : X \rightarrow 2^X$ par

$$f(\vec{\sigma}) := f_1(\vec{\sigma}) \times \dots \times f_i(\vec{\sigma}) \dots \times f_N(\vec{\sigma}).$$

Fait 3.2.3 *Pour tout $\vec{\sigma} \in X$, $f(\vec{\sigma})$ est convexe et non-vide.*

Prouvons-le pour chaque f_i :

- comme R_i est continue et $\Delta(S_i)$ est compact, R_i atteint son maximum, donc $f_i(\vec{\sigma})$ est non-vide
- comme R_i est exactement convexe (en particulier concave), si $R_i(\sigma_{-i}, *)$ atteint son maximum v en τ et en τ' , alors $R_i(\sigma_{-i}, p\tau + (1-p)\tau') = pv + (1-p)v = v$ donc $p\tau + (1-p)\tau' \in f_i(\vec{\sigma})$. L'ensemble $f_i(\vec{\sigma})$ est donc convexe.
- $f(\vec{\sigma})$ est le produit de convexes non-vides, donc est convexe non-vide. q.e.d.

Fait 3.2.4 f est une partie fermée de $X \times X$.

Soit $(\vec{\sigma}(n), \vec{\tau}(n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de f convergeant vers $(\vec{\sigma}, \vec{\tau}) \in X \times X$.

Soit $i \in [1, n]$, soit $\xi \in \Delta(S_i)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par définition de f_i on a :

$$R_i(\vec{\sigma}_{-i}(n), \tau_i(n)) \geq R_i(\vec{\sigma}_{-i}(n), \xi) \quad (3.4)$$

Comme R_i est continue, par passage à la limite dans l'inégalité (3.4) on obtient :

$$R_i(\vec{\sigma}_{-i}, \tau_i) \geq R_i(\vec{\sigma}_{-i}, \xi) \quad (3.5)$$

ce qui montre que $(\vec{\sigma}, \vec{\tau}) \in f$. q.e.d.

Prouvons maintenant le théorème de Nash.

Preuve : D'après le fait 3.2.2 X est une partie convexe compacte de \mathbb{R}^d et, d'après les faits (3.2.3-3.2.4) l'application $f : X \rightarrow 2^X$ vérifie les hypothèses (1) et (2) du théorème de Kakutani. Donc f admet un "point fixe" $\vec{\sigma}^*$ i.e.

$$\vec{\sigma}^* \in f(\vec{\sigma}^*).$$

Par définition de f , cela signifie que : pour tout $\xi \in \Delta(S_i)$:

$$R_i(\vec{\sigma}_{-i}^*, \xi) \leq R_i(\vec{\sigma}_{-i}^*, \sigma_i^*).$$

i.e. $\vec{\sigma}^*$ est un équilibre de Nash. \square

3.3 Théorème minimax

Nous montrons ici que tout jeu mixte associé à un jeu matriciel, à deux joueurs et à somme nulle, possède une *valeur*. La notion de jeu matriciel fini a été introduite au §2.3.

Théorème 3.3.1 (Von Neumann 1928) *Soit Γ un jeu matriciel fini à deux joueurs et à somme nulle. Alors, l'extension mixte Γ^m de Γ a une valeur.*

Preuve : Soit

$$\Gamma = \langle 2, (S_i)_{i \in [1,2]}, (r_i)_{i \in [1,2]} \rangle$$

un jeu matriciel fini à deux joueurs et à somme nulle. D'après le théorème de Nash, il admet au moins un équilibre de Nash $(\sigma, \tau) \in S_1 \times S_2$. On note r la fonction de gain de J1 (et $r_2 = 1 - r$, puisque le jeu a une somme nulle). Comparons chacune des valeurs \underline{v}, \bar{v} au nombre $r(\sigma, \tau)$.

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \min_{\sigma_2 \in S_2} \{ \max_{\sigma_1 \in S_1} \{ r(\sigma_1, \sigma_2) \} \} \\ &\leq \max_{\sigma_1 \in S_1} \{ r(\sigma_1, \tau) \} && \text{puisque } \tau \in S_2 \\ &= r(\sigma, \tau) && \text{puisque c'est un équilibre de Nash.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{v} &= \max_{\sigma_1 \in S_1} \{ \min_{\sigma_2 \in S_2} \{ r(\sigma_1, \sigma_2) \} \} \\ &\geq \min_{\sigma_2 \in S_2} \{ r(\sigma, \sigma_2) \} && \text{puisque } \sigma \in S_1 \\ &= r(\sigma, \tau) && \text{puisque c'est un équilibre de Nash .} \end{aligned}$$

Donc

$$\bar{v} = r(\sigma, \tau) = \underline{v}$$

Le jeu a une valeur, qui est le gain du joueur J1 à l'équilibre de Nash. \square

Chapitre 4

Jeux de longueur ω

4.1 Terminologie

Les jeux que nous examinons dans ce chapitre ont la forme suivante :

$$\mathcal{J} = \langle V_0, V_1, E, W \rangle \quad (4.1)$$

où V_0 (resp. V_1) est un ensemble, l'ensemble des sommets du joueur 0 (resp. 1), $E \subseteq (V_0 \times V_1) \cup (V_1 \times V_0)$ est l'ensemble des arcs du jeu et $W \subseteq (V_0 \cup V_1)^\omega$.

On note $V := V_0 \cup V_1$ (l'ensemble des sommets de l'arène). Le graphe biparti $\langle V_0, V_1, E \rangle$ est l'*arène* du jeu et W est l'ensemble des parties gagnantes (pour le joueur 0) du jeu. Une *partie* du jeu est un élément $\pi \in (V_0 \cup V_1)^\omega$:

$$\pi = v_0, v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots \quad \text{où}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n+1 \in \text{Dom}(\pi) \Rightarrow (v_n, v_{n+1}) \in E, \quad (n \in \text{Dom}(\pi) \text{ et } n+1 \notin \text{Dom}(\pi)) \Rightarrow v_n E = \emptyset.$$

Autrement écrit : une partie est un chemin dans l'arène qui est *maximal* pour l'ordre de prolongement des chemins. La partie π est *gagnée par J0* ssi

$$\pi \in W \text{ ou } (\pi = v_0, v_1, \dots, v_\ell \text{ et } v_\ell \in V_1)$$

La partie π est *gagnée par J1* ssi

$$\pi \in V^\omega \setminus W \text{ ou } (\pi = v_0, v_1, \dots, v_\ell \text{ et } v_\ell \in V_0)$$

On appelle *stratégie* de J0 (resp. J1) une fonction $\sigma : V^*V_1 \rightarrow V_2$ (resp. $\tau : V^*V_2 \rightarrow V_1$) telle que : $\text{Dom}(\sigma) = \{h \cdot v \mid h \in V^*, v \in V_1, \exists v_2 \in V_2, (v_1, v_2) \in E\}$ (analogue pour τ).

Un chemin π respecte la stratégie σ (resp. τ) si, pour tout j ,

$$\begin{aligned} 2j+2 \in \text{Dom}(\pi) &\Rightarrow \sigma(v_0 \cdot v_1 \cdots v_{2j+1}) = v_{2j+2} \quad (\text{resp. }) \\ 2j+1 \in \text{Dom}(\pi) &\Rightarrow \tau(v_0 \cdot v_1 \cdots v_{2j}) = v_{2j+1}. \end{aligned}$$

Une stratégie σ (resp. τ) de J0 (resp. de J1) est *gagnante* sur le sommet $v \in V$ ssi toute partie respectant σ (resp. τ) et commençant sur le sommet v est gagnée par J0 (resp. par J1). Nous dirons que \mathcal{J} est un jeu *de longueur ω* sur une arène. pour tout $v \in V$ nous appelons jeu pointé en v le couple (\mathcal{J}, v) . Une partie de (\mathcal{J}, v) est une partie de \mathcal{J} qui commence en v .

4.2 Détermination

Il est clair que au plus un des joueurs peut posséder une stratégie gagnante pour une même jeu (\mathcal{J}, v) . En revanche quoique, par définition, toute partie soit gagnée par 0 ou bien gagnée par 1, il se peut qu'aucun des joueurs ne possède de stratégie gagnante! (On trouvera dans l'annexe le DM de Novembre 2016, qui consiste à construire un tel jeu; on notera que cette "construction" utilise l'axiome du choix).

Nous dirons que le jeu pointé (\mathcal{J}, v) est *déterminé* si l'un au moins des joueurs possède une stratégie gagnante. On dit qu'un ensemble de mots $L \subseteq A^*$:

- est *clos par préfixe*, ssi, $\forall u, v \in L, u \preceq v$ et $v \in L \Rightarrow u \in L$
- est *extensible par préfixe*, ssi, $\forall u \in L, \exists v \in L, u \prec v$.

Théorème 4.2.1 (Détermination des jeux boréliens, Martin 1975)

Soit $\mathcal{J} = \langle V_0, V_1, E, W \rangle$ un jeu de Gale-Stewart i.e. il existe une partie $V \subseteq \mathbb{N}^*$, close par préfixe et extensible par préfixe, telle que

- $V_i = \{v \in V \mid |v| \equiv i \pmod{2}\}$ (pour $i \in \{0, 1\}$)
- $E = \{(v, v') \mid v' \in V, v \preceq v', |v'| = |v| + 1\}$
- W est un sous-ensemble de $T(V) := \{u \in \mathbb{N}^\omega \mid \forall n \in \mathbb{N}, u(0) \dots u(n-1) \in V\}$.

Si W est un Borélien de $T(V)$ muni de la topologie induite par la topologie produit de \mathbb{N}^ω , alors l'un des deux joueurs a une stratégie gagnante, en partant de ε .

Théorème 4.2.2 (Détermination sans-mémoire des jeux de parité)

Soit $\mathcal{J} = \langle V_0, V_1, E, \Omega \rangle$ un jeu de parité et $v \in V_0 \cup V_1$. L'un des deux joueurs a une stratégie sans-mémoire, gagnante, en partant de ce sommet v .

Chapitre 5

Opérations sur les jeux

Nous examinons dans ce chapitre des opérations sur les jeux de longueur ω définis au chapitre 4.

5.1 Dualité

Définition 5.1.1 Soit $\mathcal{J} = \langle V_0, V_1, E, W \rangle$. Le jeu dual de \mathcal{J} est défini par

$$D(\mathcal{J}) := \langle V'_0, V'_1, E', W' \rangle$$

où

$$V'_0 := V_1, \quad V'_1 := V_0, \quad E' := E, \quad W' := V^\omega \setminus W.$$

Lemme 5.1.2 Soit $\mathcal{J} = \langle V_0, V_1, E, W \rangle$. Soient $v \in V$ et $i \in \{0, 1\}$. Le sommet v est gagnant pour J_i dans le jeu \mathcal{J} si et seulement si v est gagnant pour $J(1-i)$ dans le jeu $D(\mathcal{J})$.

La preuve est facile.

N.B. Aucune hypothèse de détermination du jeu n'est utilisée dans ce lemme.

5.2 Complétion

Nous dirons que le jeu (4.1) est *complet* si et seulement si

$$\forall v \in V_0 \cup V_1, vE \neq \emptyset,$$

ce qui revient à dire que l'arène ne possède pas de “dead-end” ou “cul-de-sac”. Lorsque le jeu \mathcal{J} n'est pas complet, on peut aisément le plonger dans un jeu complet. Posons

$$\text{comp}(\mathcal{J}) := \langle V_0 \cup \{g_0, p_0\}, V_1 \cup \{g_1, p_1\}, E', W' \rangle$$

où

$$E' := E \cup \{(v, g_1) \mid v \in V_0, vE = \emptyset\} \cup \{(v, g_0) \mid v \in V_1, vE = \emptyset\} \cup \{(g_0, p_1), (g_1, p_0), (p_0, g_1), (p_1, g_0)\}$$

et

$$W' := W \cup V^* \cdot \{(g_0 \cdot p_1)^\omega\}.$$

L'idée est que les culs-de-sac de V_0 (resp. V_1) dans le jeu initial \mathcal{J} conduisent maintenant au sommet g_1 (resp. g_0) qui est gagnant pour J_1 (resp. J_0).

Lemme 5.2.1 Soit $\mathcal{J} = \langle V_0, V_1, E, W \rangle$. Soient $v \in V$ et $i \in \{0, 1\}$. La position v est gagnante pour J_i dans le jeu \mathcal{J} si et seulement si v est gagnante pour J_i dans le jeu $\text{comp}(\mathcal{J})$,

La preuve est facile. Remarquons que W' est très proche de W . En particulier, si \mathcal{J} est un jeu de parité (resp. de Büchi, de Muller, etc ...) alors $\text{comp}(\mathcal{J})$ est un jeu de parité (resp. de Büchi, de Muller, etc ...).

5.3 Bisimulation

5.3.1 Dépliage

L'opération de *dépliage* d'un graphe pointé (\mathcal{G}, v) consiste à le transformer en l'arborescence des chemins dans \mathcal{G} partant du sommet pointé v . Étant donné un chemin $c = (v_0, \dots, v_\ell)$ nous utilisons la notation $\iota(c) := v_0$, $\tau(c) := v_\ell$ pour désigner ses extrémités (le sommet *initial* et le sommet *terminal*).

Définition 5.3.1 Soit \mathcal{J} un jeu de la forme (4.1) et v un sommet de \mathcal{J} . On définit le dépliage du jeu \mathcal{J} au point v par

$$\text{depl}(\mathcal{J}, v) = \langle C_0, C_1, E_c, W_c \rangle$$

où C_0 (resp. C_1) est l'ensemble des chemins finis de \mathcal{J} qui commencent par v et qui finissent par un sommet de V_0 (resp. un sommet de V_1).

$$E_c := \{(c, c') \mid \exists v' \in V, c' = c \cdot (v')\}$$

$$W_c := \left\{ \prod_{n=0}^{\infty} (c_n) \mid c_0 = (v), \forall n \in \mathbb{N}, (c_n, c_{n+1}) \in E_c \text{ et } \prod_{n=0}^{\infty} (\tau(c_n)) \in W \right\}.$$

L'expression $\prod_{n=0}^{\infty} (\alpha_n)$ utilisé ci-dessus désigne la suite infinie $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots)$ qui est aussi la concaténation infinie des suites (α_n) . Autrement écrit : une suite de chemins est gagnée par J_0 dans $\text{depl}(\mathcal{J}, v)$ ssi son image par τ est gagnée par J_0 dans \mathcal{J} .

Lemme 5.3.2 Soit \mathcal{J} un jeu de la forme (4.1) et $v \in V$.

$$v \text{ est gagnante pour } J_i \text{ dans } \mathcal{J} \Leftrightarrow v \text{ est gagnante pour } J_i \text{ dans } \text{depl}(\mathcal{J}, v).$$

Preuve : 1- Soit σ une stratégie de J_i qui est gagnante dans le jeu $(\text{depl}(\mathcal{J}, v), v)$. Comme l'arène de $\text{depl}(\mathcal{J}, v)$ est une arborescence, σ est une stratégie positionnelle. Définissons $\sigma_{\mathcal{J}} : V^*V_i \rightarrow V_{1-i}$ par,

$$\sigma_{\mathcal{J}}(v_0 \cdot v_1 \cdots v_n) := \tau(\sigma(v_0 \cdot v_1 \cdots v_n)), \quad \text{si } v_n \in V_i \tag{5.1}$$

(en effet, $v_0 \cdot v_1 \cdots v_n$ est à la fois un chemin de \mathcal{J} et un sommet de $\text{depl}(\mathcal{J}, v)$). Soit $\pi = v_0, v_1 \dots, v_n, v_{n+1}, \dots$ une partie jouée dans \mathcal{J} selon la stratégie $\sigma_{\mathcal{J}}$, avec $v_0 = v$. Soit $\pi' := c_0, c_1 \dots, c_n, c_{n+1}, \dots$ l'unique chemin dans $\text{depl}(\mathcal{J}, v)$ qui relève π par l'application τ et qui commence en $c_0 := (v_0)$. Si $v_n \in V_i$, comme $v_{n+1} = \sigma_{\mathcal{J}}(v_0, v_1 \dots, v_n)$ on a aussi

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= c_n \cdot (v_{n+1}) \\ &= c_n \cdot \sigma_{\mathcal{J}}(c_n) \\ &= c_n \cdot \tau(\sigma(c_n)) \\ &= \sigma(c_n), \end{aligned}$$

ce qui montre que π' est une partie jouée selon σ . La partie π' est donc gagnée par Ji , et comme $\tau(\pi') = \pi$ (l'extension de τ aux suites de sommets du dépliage), la définition de W_c entraîne que $\pi \in W$.

2- Soit $\sigma : V^*V_i \rightarrow V_{1-i}$ une stratégie de Ji qui est gagnante dans le jeu (\mathcal{J}, v) . Comme $C_i = V^*V_i$, en posant

$$\sigma_c(c) := c \cdot (\sigma(c))$$

on obtient une stratégie positionnelle de Ji dans $\text{depl}(\mathcal{J}, v)$. On vérifie que, toute partie π' dans $\text{depl}(\mathcal{J}, v)$ jouée selon σ_c a une image par τ qui est une partie dans (\mathcal{J}, v) jouée selon σ , donc est gagnée par Ji , ce qui entraîne que π' est gagnée par Ji . Donc σ_c est une stratégie gagnante pour Ji dans $\text{depl}(\mathcal{J}, v)$. \square

5.3.2 Bisimulation générale

Soient $\mathcal{J}^1 = \langle V_0^1, V_1^1, E^1, W^1 \rangle$ et $\mathcal{J}^2 = \langle V_0^2, V_1^2, E^2, W^2 \rangle$ des jeux. Notons $V^i := V_0^i \cup V_1^i$ (pour $i \in \{1, 2\}$) l'ensemble des positions du jeu \mathcal{J}^i .

Définition 5.3.3 : On appelle bisimulation du jeu \mathcal{J}^1 par le jeu \mathcal{J}^2 , toute relation binaire $R \subseteq V^0 \times V^1$ vérifiant :

(1) $\text{Dom}(R) = V^1$

(1') $\text{Im}(R) = V^2$

(2) pour tous $v^1, w^1 \in V^1, v^2 \in V^2$ tels que $(v^1, w^1) \in E^1$, $(v^1, v^2) \in R$, il existe $w^2 \in V^2$ tel que $(v^2, w^2) \in E^2$, $(w^1, w^2) \in R$

(2') pour tous $v^2, w^2 \in V^2, v^1 \in V^1$ tels que $(v^2, w^2) \in E^2$, $(v^1, v^2) \in R$, il existe $w^1 \in V^1$ tel que $(v^1, w^1) \in E^1$, $(w^1, w^2) \in R$

(3) pour tous $v^1 \in V^1, v^2 \in V^2, i \in \{0, 1\}$ tels que $(v^1, v^2) \in R$

$v^1 \in V_i^1 \Leftrightarrow v^2 \in V_i^2$

(4) Si $\pi^1 := (v_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$ est une partie de \mathcal{J}^1 , $\pi^2 := (v_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ est une partie de \mathcal{J}^2 , et, $\forall n \in \mathbb{N}, v_n^1 R v_n^2$, alors :

$$\pi^1 \in W^1 \Leftrightarrow \pi^2 \in W^2.$$

$$\begin{array}{ccc} v^1 & \xrightarrow{R} & v^2 \\ \downarrow E^1 & & \downarrow E^2 \\ w^1 & \xrightarrow{R} & w^2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} v^1 & \xrightarrow{R} & v^2 \\ \downarrow E^1 & & \downarrow E^2 \\ w^1 & \xrightarrow{R} & w^2 \end{array}$$

FIGURE 5.1 – Définition 5.3.3, points (2)(2')

N.B. Lorsque R est une fonction (donc une application, par le point (1)) et lorsque le point (2') est remplacé par la condition plus forte :

(2'') pour tous $v^2, w^2 \in V^2, v^1 \in V^1$ tels que $(v^2, w^2) \in E^2$, $(v^1, v^2) \in R$, il existe un *unique* $w^1 \in V^1$ tel que $(v^1, w^1) \in E^1$, $(w^1, w^2) \in R$

on dit que R est un *revêtement*.

Par exemple l'application $\tau : \text{depl}(\mathcal{J}, v) \rightarrow (\mathcal{J}, v)$ vue à la sous-section 5.3.1 est un revêtement.

Lemme 5.3.4 Soient \mathcal{J} un jeu de la forme (4.1) et $v \in V$. L'application $\tau : V_c \rightarrow V$ est une bisimulation du jeu $\text{depl}(\mathcal{J}, v)$ par le jeu \mathcal{J} .

Vérification facile. Nous montrons maintenant que le Lemme 5.3.2 s'étend aux bisimulations quelconques.

Lemme 5.3.5 Soit R une bisimulation du jeu \mathcal{J}^1 par le jeu \mathcal{J}^2 , soit $i \in \{0, 1\}$ et $(v^1, v^2) \in R$. Alors

$$v^1 \text{ est gagnante pour } Ji \text{ dans } \mathcal{J}^1 \Leftrightarrow v^2 \text{ est gagnante pour } Ji \text{ dans } \mathcal{J}^2.$$

Esquisse de preuve :

1- Soit σ une stratégie gagnante de Ji dans le jeu (\mathcal{J}^1, v^1) . On peut construire une stratégie gagnante σ^2 (avec mémoire) de Ji dans le jeu (\mathcal{J}^2, v^2) comme suit :

- après une séquence de coups $v^2 = v_0^2, v_1^2, \dots, v_n^2$ dans \mathcal{J}^2 , Ji garde en mémoire une séquence de coups $v^1 = v_0^1, v_1^1, \dots, v_n^1$ dans \mathcal{J}^1 , qui simule (via R) la séquence de \mathcal{J}^2 ,

- si l'adversaire joue dans v_{n+1}^2 , Ji met à jour sa mémoire avec un sommet v_{n+1}^1 qui maintienne la relation de simulation ; un tel sommet v_{n+1}^1 existe, grâce au point (2') de la Définition 5.3.3 (voir figure 5.2, diagramme de gauche)

- si c'est au tour de Ji de jouer, il ajoute $v_{n+1}^1 := \sigma(v_0^1, v_1^1, \dots, v_n^1)$ à sa mémoire et choisit de jouer un sommet v_{n+1}^2 qui maintienne la relation de simulation ; un tel sommet v_{n+1}^2 existe, grâce au point (2) de la Définition 5.3.3 (voir figure 5.2, diagramme de droite).

2- Comme R^{-1} est une bisimulation du jeu \mathcal{J}^2 par le jeu \mathcal{J}^1 , par le point 1 de cette preuve, toute stratégie gagnante σ de Ji dans le jeu \mathcal{J}^2 conduit à une stratégie gagnante σ^1 de Ji dans le jeu \mathcal{J}^1 .

□

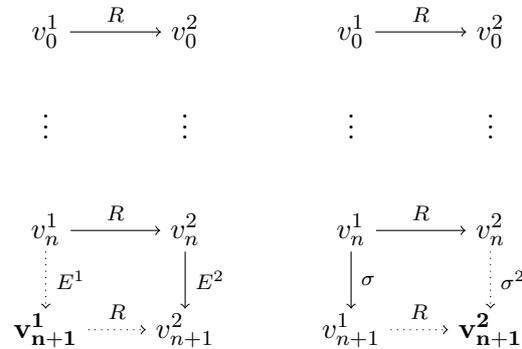


FIGURE 5.2 – σ^2 à partir de σ

Preuve : On fixe un bon ordre \leq_1 sur V^1 (resp. \leq_2 sur V^2) (de tels ordres existent d'après le théorème de Zermelo).

1- Soit R une bisimulation du jeu \mathcal{J}^1 par le jeu \mathcal{J}^2 , $(v^1, v^2) \in R$, $i \in \{0, 1\}$ et $\sigma : (V^1)^* V_i^1 \rightarrow V_{1-i}^1$ une stratégie gagnante de Ji dans \mathcal{J}^1 en partant de v^1 . Nous définissons inductivement une fonction $\mathbf{m} \subseteq (V^2)^* \times (V^2)^*$ (qui est intuitivement une *mémoire* du joueur Ji pour le jeu \mathcal{J}^2) et une fonction $\sigma^2 : (V^2)^* V_i^2 \rightarrow V_{1-i}^2$ (qui est une *stratégie* de Ji dans \mathcal{J}^2) comme suit :

$$\mathbf{m}(v^2) = v^1 \tag{5.2}$$

pour tout chemin dans $\mathcal{J}^2 : (v_0^2, \dots, v_n^2)$, si $(v_0^1, \dots, v_n^1) = \mathbf{m}(v_0^2, \dots, v_n^2)$,

$$\forall w^2 \in V^2, [v_n^2 E^2 w^2, w^1 = \min_{\leq 1} \{w \in V^1 \mid v_n^1 E^1 w \text{ et } v R w^2\}] \Rightarrow [\mathbf{m}(v_0^2, \dots, v_n^2, w^2) = (v_0^1, \dots, v_n^1, w^1)] \quad (5.3)$$

et

$$\forall w^1 \in V^1, [\sigma(v_n^1) = w^1, w^2 = \min_{\leq 2} \{v \in V^2 \mid v E^2 w^1 \text{ et } v R w^2\}] \Rightarrow [\mathbf{m}(v_0^2, \dots, v_n^2, w^2) := (v_0^1, \dots, v_n^1, w^1) \text{ et } \sigma^2(v_0^2, \dots, v_n^2) := w^2]. \quad (5.4)$$

1.1- Assurons-nous que \mathbf{m}, σ^2 sont des fonctions. Ces relations binaires sont définies inductivement, c'est à dire comme plus petit point fixe d'un opérateur \mathcal{O} sur les couples de relations binaires (l'opérateur est défini par les clauses (5.2)(5.3)(5.4)). On vérifie que $\mathbf{m}_0 := \emptyset, \sigma_0^2 := \emptyset$ sont des fonctions. Si \mathbf{m}_n, σ_n^2 sont des fonctions alors $(\mathbf{m}_{n+1}, \sigma_{n+1}^2) := \mathcal{O}(\mathbf{m}_n, \sigma_n^2)$ sont aussi des fonctions. Comme $\mathbf{m}_n \subseteq \mathbf{m}_{n+1}$ et $\sigma_n^2 \subseteq \sigma_{n+1}^2$, on en déduit que

$$\mathbf{m} := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbf{m}_n, \quad \sigma^2 := \bigcup_{n=0}^{\infty} \sigma_n^2$$

sont des fonctions.

1.2- Soit

$$\pi^2 = v_0^2, \dots, v_n^2, v_{n+1}^2, \dots \quad \text{où } v^2 = v_0^2$$

une partie du jeu \mathcal{J}^2 jouée selon σ^2 . Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les trois propriétés (DOM)(SIG1)(SIG2) sont vraies :

DOM : $(v_0^2, \dots, v_n^2) \in \text{Dom}(\mathbf{m})$

SIG1 : $(v_0^2, \dots, v_n^2) \in \text{Dom}(\mathbf{m}) \Rightarrow \mathbf{m}(v_0^2, \dots, v_n^2)$ suit la stratégie σ

SIG2 : $v_n^2 \in V_i^2 \Rightarrow (v_0^2, \dots, v_n^2) \in \text{Dom}(\sigma^2)$.

Base : $n = 0$. Par (5.2), $v^2 \in \text{Dom}(\mathbf{m})$.

Si $v^2 \in V_i^2$, par le point (3) de la Définition 5.3.3 $v^1 \in V_i^1$. Comme σ est gagnante sur v^1 , $v^1 \in \text{Dom}(\sigma)$ et par la clause inductive (5.4) et le point (2) de la Définition 5.3.3 $v^2 \in \text{Dom}(\sigma^2)$.

Induction : Supposons que

$$(v_0^2, \dots, v_n^2, v_{n+1}^2) \text{ suit la stratégie } \sigma^2.$$

Par hypothèse de récurrence $\mathbf{m}(v_0^2, \dots, v_n^2)$ est définie et c'est un chemin (v_0^1, \dots, v_n^1) qui suit la stratégie σ^1 .

cas 1 : $v_{n+1}^2 \in V_{1-i}^2$

Par la clause inductive (5.4) et le point (2) de la Définition 5.3.3

$$\mathbf{m}(v_0^2, \dots, v_n^2, v_{n+1}^2) = (v_0^1, \dots, v_n^1, \sigma^1(v_n)),$$

donc (DOM) est vraie.

(SIG1) est vraie sur le préfixe (v_0^1, \dots, v_n^1) , donc est vraie pour $(v_0^1, \dots, v_n^1, \sigma^1(v_n))$.

(SIG2) est trivialement vraie.

cas 2 : $v_{n+1}^2 \in V_i^2$

Par la clause inductive (5.3) et le point (2') de la Définition 5.3.3

$$\mathbf{m}(v_0^2, \dots, v_n^2, v_{n+1}^2) = (v_0^1, \dots, v_n^1, v_{n+1}^1).$$

Donc (DOM) est vraie.

(SIG1) est vraie puisqu'elle est vraie sur le préfixe (v_0^1, \dots, v_n^1) et $v_n^1 \in V_{1-i}^1$.

Comme $(v_0^1, \dots, v_n^1, v_{n+1}^1)$ suit la stratégie σ , qui est gagnante pour Ji , $w^1 := \sigma(v_0^1, \dots, v_n^1, v_{n+1}^1)$ est défini ; par le point (2) de la Définition 5.3.3 et la clause inductive (5.4), $\sigma^2(v_0^2, \dots, v_n^2, v_{n+1}^2)$ est défini, ce qui établit (SIG2).

Revenons à la partie π^2 . Si elle se terminait par un sommet $v_n^2 \in V_i^2$, cela contredirait (SIG2). Si elle se termine par un sommet $v_n^2 \in V_{1-i}^2$, elle est gagnée par Ji .

Si elle est infinie, chaque partie $\mathbf{m}(v_0^2, \dots, v_n^2)$ est préfixe de la partie $\mathbf{m}(v_0^2, \dots, v_n^2, v_{n+1}^2)$. Posons

$$\pi^1 := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{m}(v_0^2, \dots, v_n^2).$$

Par (SIG1) c'est une partie jouée selon σ , donc gagnée par Ji , et par le point (4) de la Définition 5.3.3, π^2 est gagnée par Ji . Finalement : σ^2 est une stratégie gagnante de Ji , dans le jeu \mathcal{J}^2 , en partant de v^2 .

2- Si l'on suppose que Ji a une stratégie gagnante dans \mathcal{J}^2 , comme R^{-1} est une bisimulation de \mathcal{J}^2 par \mathcal{J}^1 , par le point 1 de cette preuve, Ji a aussi une stratégie gagnante dans \mathcal{J}^1 .

□

On appelle *isomorphisme* du jeu \mathcal{J} dans le jeu \mathcal{J}' , une bisimulation de \mathcal{J} par \mathcal{J}' qui est une *bijection* de l'ensemble des sommets de \mathcal{J} dans l'ensemble des sommets de \mathcal{J}' . Nous dénoterons par $\mathcal{J} \sim \mathcal{J}'$ (resp. $\mathcal{J} \equiv \mathcal{J}'$) le fait qu'il existe une bisimulation (resp. isomorphisme) du jeu \mathcal{J} par le jeu \mathcal{J}' .

5.4 Retournement

Soit \mathcal{J} un jeu de la forme (4.1). Appelons stratégie *locale de défense* du joueur i , au point $v \in V_{1-i}$, toute fonction

$$\alpha : vE \rightarrow vEE$$

telle que

$$\alpha \subseteq E \text{ et } \text{Dom}(\alpha) = vE.$$

On note $\text{SD}(v)$ l'ensemble des stratégies locales de défense de Ji en $v \in V_{1-i}$. Remarquons que :

- si $vE = \emptyset$ (v est un cul-de-sac) alors $\text{SD}(v) = \{\emptyset\}$ (\emptyset est une stratégie locale de défense) ;
- si $\exists w \in vE \mid wE = \emptyset$, alors $\text{SD}(v) = \emptyset$ i.e. il n'existe *aucune* stratégie locale de défense de Ji en $v \in V_{1-i}$.

Définition 5.4.1 *Le retournement de \mathcal{J} est le jeu*

$$\mathbf{R}(\mathcal{J}) := \langle V_0', V_1', E', W' \rangle$$

où

$$V_1' := V_0, \quad V_0' := \{(v, \alpha) \mid v \in V_0, \alpha \in \text{SD}(v)\},$$

$$W' := \{(v_0, w'_0, v_1, w'_1, \dots, v_n, w'_n, v_{n+1}, \dots) \in (V_0 \times V_0')^\omega, \exists (w_0, w_1, \dots, w_n \dots) \in V_1^\omega \mid (v_0, w_0, v_1, w_1, \dots, v_n, w_n, v_{n+1}, \dots) \in W\}$$

et

$$E' := \{(v, (v, \alpha) \mid v \in V_0, \alpha \in \text{SD}(v)) \mid (v, \alpha), w \mid v \in V_0, \alpha \in \text{SD}(v), w \in \text{Im}(\alpha)\}.$$

Nous dirons que le jeu (4.1) est *insensible* à V_i (pour $i \in \{0, 1\}$), si, pour toutes suites de V^ω

$$\begin{aligned} \pi &:= (v_0, v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots), \quad \pi' := (v'_0, v'_1, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots) \\ [\forall n \in \mathbb{N}, (v_n = v'_n \text{ ou } (v_n \in V_i \text{ et } v'_n \in V_i))] &\Rightarrow (\pi \in W \Leftrightarrow \pi' \in W). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Lemme 5.4.2 *Soit \mathcal{J} un jeu insensible à V_1 , $i \in \{0, 1\}$ un numéro de joueur et $v_0 \in V_0$ un sommet du joueur J0. Si Ji a une stratégie sans-mémoire gagnante dans \mathcal{J} , à partir de v_0 , alors Ji a une stratégie sans-mémoire gagnante dans $R(\mathcal{J})$, à partir de v_0 .*

L'idée générale est la suivante :

- en $v \in V_0 = V'_1$, dans le jeu retourné, J1 choisit la stratégie de “défense” qu’il aurait appliquée (mais un coup plus tard) dans le jeu \mathcal{J} , c’est une *stratégie* dans \mathcal{J} (car J1 ne connaît pas encore le coup de J0 en v) mais c’est devenu un *coup* dans le jeu retourné.

- en $(v, \alpha) \in V'_0$, dans le jeu retourné, J0 dévoile ce qu’il aurait joué (dans \mathcal{J}) au coup précédent (en v) ; comme la stratégie de réponse de J1 (dans \mathcal{J}) est déjà connue (c’est α), la position dans laquelle J0 se déplace (dans le jeu retourné) est celle où J1 l’aurait amené, un coup plus tard (dans \mathcal{J} , en appliquant α).

Preuve :

0- Soit $\sigma : V_0 \rightarrow V_1$ une stratégie (sans-mémoire) de J0, dans \mathcal{J} , gagnante à partir de $v_0 \in V_0$. Définissons une stratégie $\sigma_R : V'_0 \rightarrow V'_1$ de J0 (dans $R(\mathcal{J})$) : pour tous $v \in V_0, \alpha \in SD(v)$

$$\sigma_R(v, \alpha) := \alpha(\sigma(v)). \quad (5.6)$$

Soit π' une partie jouée selon la stratégie σ_R et commencée en v_0 :

$$\pi' := v_0, (v_0, \alpha_0), v_1, (v_1, \alpha_1), \dots, v_n, (v_n, \alpha_n), v_{n+1}, \dots$$

La partie π' :

- soit se termine par un sommet v_n tel que $SD(v_n) = \emptyset$ (cas 1)
- soit se termine par un sommet (v_n, α_n) tel que $\alpha_n = \emptyset$ (cas 2)
- soit ne se termine pas (i.e. π' est infini) (cas 3).

Dans le cas 1 :

Comme $v_n \in V_0 = V'_1$, J0 a gagné la partie π' .

Dans le cas 2 :

$\alpha_n = \emptyset$ signifie que $\emptyset \in SD(v_n)$. Comme $\text{Dom}(\alpha_n) = v_n E$, v_n est un cul-de-sac.

Considérons la partie

$$\pi := v_0, \sigma(v_0), v_1, \sigma(v_1), \dots, v_n.$$

Par la définition (5.6) de σ_R , pour tout $k \in [0, n-1]$

$$v_{k+1} = \sigma_R(v_k, \alpha_k) = \alpha_k(\sigma(v_k))$$

donc

$$(\sigma(v_k), v_{k+1}) \in E$$

et comme on a aussi $(v_k, \sigma(v_k)) \in E$ (puisque σ est une stratégie), on est sûr que π est un chemin dans le jeu \mathcal{J} . Comme $v_n E = \emptyset$ ce chemin est maximal i.e. c’est une *partie*. Comme $v_n \in V_0$, la partie π est *perdue* par J0, ce qui contredit le fait que σ est gagnante pour J0. Ce cas 2 est donc impossible.

Dans le cas 3 :

Posons

$$\pi := v_0, \sigma(v_0), v_1, \sigma(v_1), \dots, v_n, \dots$$

Les arguments du cas 2 montrent que π est une partie dans le jeu \mathcal{J} .

Comme π respecte σ , π est gagnée par J0 i.e. $\pi \in W$, donc, par définition de W' , $\pi' \in W'$.

Le bilan de ces trois cas est que σ_R est une stratégie (sans-mémoire) de J0 dans le jeu $R(\mathcal{J})$, qui est gagnante sur v_0 .

1- Soit $\tau : V_1 \rightarrow V_0$ une stratégie gagnante de J1 (dans \mathcal{J}) sur $v_0 \in V_0$. Définissons une stratégie $\tau_R : V'_1 \rightarrow V'_0$ de J1 (dans $R(\mathcal{J})$) : pour tous $v \in V_0, \alpha \in SD(v)$

$$\tau_R(v) := (v, \{(w, \tau(w)) \mid w \in vE\}). \quad (5.7)$$

Soit π' une partie jouée selon la stratégie τ_R et commencée en v_0 :

$$\pi' := v_0, (v_0, \alpha_0), v_1, (v_1, \alpha_1), \dots, v_n, (v_n, \alpha_n), v_{n+1}, \dots$$

La partie π' :

- soit se termine par un sommet v_n tel que $SD(v_n) = \emptyset$ (cas 1)
- soit se termine par un sommet (v_n, α_n) tel que $\alpha_n = \emptyset$ (cas 2)
- soit ne se termine pas (i.e. π' est infini) (cas 3).

Dans le cas 1 :

$SD(v_n)$ est vide ssi $\exists w \in v_n E \mid wE = \emptyset$. Considérons la partie

$$\pi := v_0, w_0, v_1, w_1, \dots, v_n, w$$

où, pour tout $k \in [0, n-1]$, $w_k \in \alpha_k^{-1}(v_{k+1})$ i.e.

$$(v_k, w_k) \in E \text{ et } \alpha_k(w_k) = v_{k+1}.$$

Comme en outre $(v_n, w) \in E$, π est un chemin dans \mathcal{J} . Comme $wE = \emptyset$ c'est une partie dans \mathcal{J} et comme $w \in V_1$, elle est perdue par J1. Mais la définition (5.7) entraîne que chaque α_k est inclus dans τ , donc que π suit la stratégie τ qui est gagnante pour J1. Contradiction. Ce cas est impossible.

Dans le cas 2 :

Comme $(v_n, \alpha_n) \in V'_0$, la partie π' est gagnée par J1.

Dans le cas 3 :

Posons

$$\pi := v_0, w_0, v_1, w_1, \dots, v_n, w_n, v_{n+1}, \dots$$

où $w_n \in \alpha_n^{-1}(v_{n+1})$ i.e.

$$(v_n, w_n) \in E \text{ et } \alpha(w_n) = v_{n+1}.$$

Alors, pour tout $n \geq 0$, $\tau(w_n) = v_{n+1}$. Donc π est une partie dans le jeu \mathcal{J} , qui respecte la stratégie τ , donc est gagnée par J1. Ceci entraîne que $\pi \notin W$. Comme le jeu \mathcal{J} est insensible à V_1 , pour toute partie

$$\hat{\pi} := v_0, \hat{w}_0, v_1, \hat{w}_1, \dots, v_n, \hat{w}_n, v_{n+1}, \dots$$

on a encore $\hat{\pi} \notin W$, ce qui montre que $\pi' \notin W'$ i.e. la partie π' est gagnée par J1.

Le bilan de ces trois cas est que τ_R est une stratégie (sans-mémoire) de J1 dans le jeu $R(\mathcal{J})$, qui est gagnante sur v_0 . \square

Lemme 5.4.3 *Soit \mathcal{J} un jeu et $v_0 \in V_0$. Les jeux pointés $(\text{depl}(R(\mathcal{J}), v_0), v_0)$ et $(R(\text{depl}(\mathcal{J}, v_0)), v_0)$ sont isomorphes.*

Esquisse de preuve : Pour tout chemin dans \mathcal{J} qui commence par v_0 et toute partie $A \subseteq V \times V$ notons

$$t_c(A) := \{(c \cdot (v), c \cdot (w)) \mid (v, w) \in A\}.$$

(t_c est une translation à gauche, par le chemin c , des couples de sommets de \mathcal{J}). Définissons une application

$$\Phi : V_{\text{depl}(\mathbf{R}(\mathcal{J}), v_0)} \rightarrow V_{\mathbf{R}(\text{depl}(\mathcal{J}, v_0))}$$

par

$$\begin{aligned} \Phi(v_0, (v_0, \alpha_0), v_1, (v_1, \alpha_1), \dots, v_n) &:= v_0 v_1 \cdots v_n, \\ \bar{\Phi}(v_0, (v_0, \alpha_0), v_1, (v_1, \alpha_1), \dots, v_n, (v_n, \alpha_n)) &:= (v_0 v_1 \cdots v_n, t_{v_0 v_1 \cdots v_n}(\alpha_n)). \end{aligned}$$

On vérifie que cette application est un isomorphisme des arènes qui préserve v_0 , la partition des sommets et les parties gagnées par J_0 (resp. perdues par J_0). \square

Lemme 5.4.4 *Soit \mathcal{J} un jeu insensible à V_1 , $i \in \{0, 1\}$ un numéro de joueur et $v_0 \in V_0$ un sommet du joueur J_0 . Si J_i a une stratégie gagnante dans (\mathcal{J}, v_0) , alors J_i a une stratégie gagnante dans $(\mathbf{R}(\mathcal{J}), v_0)$.*

Preuve : Supposons que J_i a une stratégie gagnante dans (\mathcal{J}, v_0) . Par le Lemme 5.3.2 J_i a une stratégie gagnante dans $(\text{depl}(\mathcal{J}, v_0), v_0)$.

Comme ce dernier jeu a une arène arborescente, J_i a une stratégie *positionnelle* gagnante dans $(\text{depl}(\mathcal{J}, v_0), v_0)$. Par le Lemme 5.4.2, J_i a une stratégie positionnelle gagnante dans $(\mathbf{R}(\text{depl}(\mathcal{J}, v_0)), v_0)$. Comme les jeux (pointés) $(\mathbf{R}(\text{depl}(\mathcal{J}, v_0)), v_0)$ et $(\text{depl}(\mathbf{R}(\mathcal{J}), v_0), v_0)$ sont isomorphes (Lemme 5.4.3), J_i a une stratégie positionnelle gagnante dans $(\text{depl}(\mathbf{R}(\mathcal{J}), v_0), v_0)$, et en appliquant à nouveau le Lemme 5.3.2, J_i a une stratégie gagnante dans $(\mathbf{R}(\mathcal{J}), v_0)$. \square

Le jeu $\mathbf{R}(\mathcal{J})$ peut être simplifié en un jeu bisimilaire que nous noterons $\mathbf{R}_s(\mathcal{J})$.

Définition 5.4.5 *Le retournement simplifié de \mathcal{J} est le jeu*

$$\mathbf{R}_s(\mathcal{J}) := \langle V'_0, V'_1, E', W' \rangle$$

où

$$V'_1 := V_0, \quad V'_0 := \{\text{Im}(\alpha) \mid v \in V_0, \alpha \in \text{SD}(v)\},$$

$$\begin{aligned} W' &:= \{(v_0, w'_0, v_1, w'_1, \dots, v_n, w'_n, v_{n+1}, \dots) \in (V_0 \times V'_0)^\omega, \exists (w_0, w_1, \dots, w_n \dots) \in V_1^\omega \\ &\mid (v_0, w_0, v_1, w_1, \dots, v_n, w_n, v_{n+1}, \dots) \in W\} \end{aligned}$$

et

$$E' := \{(v, \text{Im}(\alpha)) \mid v \in V_0, \alpha \in \text{SD}(v)\} \cup \{(P, w) \mid P \in V'_0, w \in P\}.$$

Lemme 5.4.6 *Soit \mathcal{J} un jeu de longueur ω . Alors $\mathbf{R}(\mathcal{J}) \sim \mathbf{R}_s(\mathcal{J})$*

Preuve : Soit \mathcal{J} un jeu de la forme (4.1). Définissons une bisimulation (fonctionnelle)

$$\Phi : \mathbf{R}(\mathcal{J}) \rightarrow \mathbf{R}_s(\mathcal{J})$$

par

$$\Phi(v) := v \quad \text{pour } v \in V_0 \quad (5.8)$$

$$\Phi(v, \alpha) := \text{Im}(\alpha) \quad \text{pour } v \in V_0, \alpha \in \text{SD}(v). \quad (5.9)$$

Montrons que Φ est une bisimulation. Les points (1)(1')(3)(4) de la définition 5.3.3 sont immédiats.

Point (2), joueur 0- Soit (r, s) un arc de $\mathbf{R}(\mathcal{J})$ partant d'un sommet de J1 :

$$r = (v, \alpha), \quad s \in \text{Im}(\alpha) \text{ où } v \in V_0, \alpha \in \text{SD}(v).$$

$$\Phi(r) = \text{Im}(\alpha), \quad \Phi(s) = s \in \text{Im}(\alpha)$$

donc $(\Phi(r), \Phi(s)) = (\text{Im}(\alpha), s)$ est un arc de $\mathbf{R}_s(\mathcal{J})$.

Point (2), joueur 1- Soit (r, s) un arc de $\mathbf{R}(\mathcal{J})$ partant d'un sommet de J0 :

$$r = v, \quad s = (v, \alpha) \text{ où } \alpha \in \text{SD}(v).$$

Alors $(\Phi(r), \Phi(s)) = (v, \text{Im}(\alpha))$ est un arc de $\mathbf{R}_s(\mathcal{J})$.

Point (2'), joueur 0-

Soit (r', s') un arc de $\mathbf{R}_s(\mathcal{J})$ et $r' := \Phi(r)$, tels que r, r' sont des sommets de J1 :

$$r = (v, \alpha), r' = \text{Im}(\alpha) \text{ où } v \in V_0, \alpha \in \text{SD}(v), \quad s' \in \text{Im}(\alpha).$$

Posons $s := s'$. Le couple $(r, s) = ((v, \alpha), s')$ est un arc de \mathcal{J} et $\Phi(s) = s'$.

Point (2'), joueur 1- Soit (r', s') un arc de $\mathbf{R}_s(\mathcal{J})$ et $r' := \Phi(r)$, tels que r, r' sont des sommets de J0 :

$$r = v, \quad r' = v, \quad s' = \text{Im}(\alpha') \text{ où } v \in V_0, \alpha' \in \text{SD}(v).$$

Posons $s := (v, \alpha')$. Le couple $(r, s) = (v, (v, \alpha'))$ est un arc de \mathcal{J} et $\Phi(s) = s'$. \square

Chapitre 6

Automates alternants

Nous étudions dans ce chapitre les *langages d'arbres binaires* étiquetés sur un ensemble fini.

Nous définissons une notion d'*automate alternant*, qui reconnaît des langages d'arbres et qui est profondément liée à la notion de *jeu* de longueur ω , sur une arène qui est une sorte de produit de l'arbre par l'automate. Nous définissons ainsi un ensemble de langages *reconnaisables* d'arbres qui a de nombreuses propriétés de *stabilité*, par les opérations booléennes usuelles et par des extensions aux langages d'arbres d'opérations usuelles sur les langages de mots : homomorphisme strictement alphabétique, homomorphisme strictement alphabétique inverse.

Au chapitre suivant, nous déduirons de ces propriétés de stabilité des résultats de *décidabilité* en *logique Monadique du Second Ordre* sur la structure $\langle D^*, (s_d)_{d \in D} \rangle$. Nous pourrions aussi tirer avantage de ces automates pour *décrire* l'ensemble des modèles d'une formule MSO .

6.1 Préliminaires ensemblistes

Pour tout ensemble E nous posons

$$\mathcal{C}(E) := \{\alpha : E \rightarrow \bigcup_{x \in E} x \mid \text{Dom}(\alpha) = E, \forall x \in E, \alpha(x) \in x\}.$$

En mots : chaque élément α de $\mathcal{C}(E)$ est une fonction, définie sur tout élément de x de E et *choisissant* un élément de x . Soit φ une fonction. Nous notons $\mathbb{P}(\varphi)$ la fonction obtenue en “passant aux parties” i.e.

$$\mathbb{P}(\varphi) := \{(X, Y) \mid X \in \mathcal{P}(\text{Dom}(\varphi)), Y = \{\varphi(x) \mid x \in X\}\}.$$

Fait 6.1.1 *Pour toute fonction φ et tout $P \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\text{Dom}(\varphi)))$, $\mathcal{C}(\mathbb{P}(\mathbb{P}(\varphi)))(P) = \{\varphi \circ h \mid h \in \mathcal{C}(P)\}$.*

Immédiat.

Soit E un ensemble et B un ensemble que nous dénommons “alphabet”. On définit une opération \odot du monoïde B^* sur l'ensemble $E \times B^*$ par :

$$(e, u) \odot v := (e, v \cdot u)^1.$$

1. En fait, c'est une opération à *gauche* du monoïde B^* sur l'ensemble $E \times B^*$ (i.e. $s \odot (u \cdot v) = (s \odot v) \odot u$); nous la notons à droite pour rendre plus lisible la définition des automates d'arbres.

6.2 Automates sur les arbres

6.2.1 Automates alternants

Soit A un ensemble, l'ensemble des *étiquettes* et D un ensemble, l'ensemble des *directions*. Notons $\mathbb{T}_D(A)$ l'ensemble des arbres D -aires complets, étiquetés sur A . Un tel arbre est une application $t : D^* \rightarrow A$, autrement écrit :

$$\mathbb{T}_D(A) := A^{D^*}.$$

Lorsque $D = \{g, d\}$ (resp. $D = \{s\}$), $\mathbb{T}_D(A)$ est l'ensemble des arbres *binaires* complets (resp. des *mots* infinis) étiquetés sur A ; nous le notons simplement $\mathbb{T}(A)$ (resp. A^ω). Un *automate fini alternant* sur les arbres infinis est un tuple :

$$\mathbb{A} := \langle D, A, Q, q_I, \Omega, \delta \rangle \quad (6.1)$$

où D est l'ensemble des directions, A est l'*alphabet* ou ensemble des étiquettes, Q est l'ensemble des *états*, $q_I \in Q$ est l'*état initial*, $\Omega : Q \rightarrow \mathbb{N}$ est une application d'image finie, la fonction de *coloration* (ou de priorité) des états et

$$\delta : Q \times A \rightarrow \mathcal{P}_f(\mathcal{P}_f(Q \times D))$$

est une application, nommée *fonction de transition*.

Étant donné un automate fini alternant (a.f.a.) \mathbb{A} et un arbre infini $t \in \mathbb{T}(A)$, nous définissons le jeu de longueur ω ,

$$\mathcal{J}(\mathbb{A}, t) := \langle V_0, V_1, E, W \rangle$$

où

$$V_0 := Q \times D^*, \quad (6.2)$$

$$V_1 := \{P \odot u \mid \exists p \in Q, P \in \delta(p, t(u)), u \in D^*\}, \quad (6.3)$$

$$E := \{((p, u), P \odot u) \mid p \in Q, u \in D^*, P \in \delta(p, t(u))\} \cup \{P_1, (q, v) \mid P_1 \in V_1, (q, v) \in P_1\} \quad (6.4)$$

$$\Omega_{\mathcal{J}} : (p, u) \mapsto \Omega(p), \quad P \odot u \mapsto 0 \quad (6.5)$$

$$W := \{w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \max\{c \in \mathbb{N} \mid ((\Omega_{\mathcal{J}}(w_n)))_{n \in \mathbb{N}} \text{ passe i.s. par } c\} \equiv 0 \pmod{2}\} \quad (6.6)$$

i.e. le joueur J0 gagne la partie w ssi, la suite des couleurs des états rencontrées infiniment souvent, a un plus grand élément qui est une couleur *paire*.

(Lorsque $D = \{g, d\}$ on omet parfois l'ensemble D dans la définition de l'automate).

Intuition : le joueur J0 cherche à prouver que t satisfait les exigences de \mathbb{A} , tandis que J1 cherche à réfuter cette affirmation. Le joueur J0 choisit, sur un noeud u dans l'état p , un sous-ensemble $P \in \delta(p, t(u))$ qui est un ensemble de décorations pour les noeuds successeurs ug, ud . J0 affirme que toutes ces décorations sont correctes et met J1 au défi de le réfuter; J1 choisit alors de réfuter l'une de ces décorations $(q, ug) \in P \odot u$ ou $(q, ud) \in P \odot u$. Une stratégie gagnante de J0 est vue comme une *preuve* que l'arbre t satisfait les exigences de \mathbb{A} .

Définition 6.2.1 Soit \mathbb{A} un a.f.a. d'alphabet A et $t \in \mathbb{T}(A)$. Nous dirons que t est reconnu par \mathbb{A} si la position (q_i, ε) est gagnante pour le joueur J0, dans le jeu $\mathcal{J}(\mathbb{A}, t)$.

Étant donné un a.f.a \mathbb{A} sur les directions D et l'alphabet A nous définissons

$$L(\mathbb{A}) := \{t \in \mathbb{T}_D(A) \mid t \text{ est reconnu par } \mathbb{A}\}$$

Nous dirons qu'un sous-ensemble L de $\mathbb{T}_D(A)$ est *reconnaisable* ssi il existe un a.f.a \mathbb{A} tel que $L = L(\mathbb{A})$. Nous dénotons par $\text{REC}(\mathbb{T}_D(A))$ l'ensemble des langages reconnaissables de $\mathbb{T}_D(A)$.

6.2.2 Cas des mots infinis

Nous supposons connus les résultats fondamentaux suivants sur les automates finis sur les mots infinis (i.e. sur A^ω , aussi noté $\mathbb{T}_{\{s\}}(A)$ dans la section précédente). Un automate fini non-déterministe sur A^ω est un tuple :

$$\mathbb{A} := \langle A, Q, q_I, \delta, W \rangle \quad (6.7)$$

où A est l'*alphabet* ou ensemble des étiquettes, Q est l'ensemble des *états*, $q_I \in Q$ est l'*état initial*, et

$$\delta : Q \times A \rightarrow \mathcal{P}_f(Q)$$

est une application, nommée *fonction de transition* et

$$W \subseteq Q^\omega$$

est l'ensemble d'*acceptation*.

Suivant la façon dont W est défini, on parle d'automate "de Büchi" ou "de Muller" ou "de parité". Précisons ces divers "modes d'acceptation".

Mode de Büchi :

On fixe un sous-ensemble $Q_+ \subseteq Q$ et on pose

$$W := \{(q_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \exists p \in Q_+, q_n = p \text{ infiniment souvent}\}.$$

Mode de Muller :

On fixe un sous-ensemble $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(Q))$ et on pose

$$W := \{(q_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \exists P \in \mathcal{F}, \forall p \in Q, q_n = p \text{ i.s.} \Leftrightarrow p \in P\}.$$

Mode de parité :

On fixe une application $\Omega : Q \rightarrow \mathbb{N}$ et on pose

$$W := \{(q_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \max\{c \in \mathbb{N} \mid (\Omega(q_n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ passe i.s. par } c\} \equiv 0 \pmod{2}\}.$$

Les résultats suivants relient ces différentes notions de reconnaissabilité et la notion de définissabilité en logique MSO.

Théorème 6.2.2 (Büchi 1962) *Soit A un alphabet fini et \mathcal{S} la signature $\langle S \rangle$ (où S est le prédicat binaire exprimant la relation "successeur" sur \mathbb{N}). Une partie $L \subseteq A^\omega$ est définissable par une formule de MSO (\mathcal{S}) ssi L est reconnue par un automate fini de Büchi.*

Théorème 6.2.3 (Mc Naughton 1966) *Soit A un alphabet fini. Une partie $L \subseteq A^\omega$ est reconnue par un automate fini de Büchi ssi L est reconnue par un automate fini déterministe de Muller.*

Théorème 6.2.4 *Soit A un alphabet fini. Une partie $L \subseteq A^\omega$ est reconnue par un automate fini déterministe de Muller. ssi L est reconnue par un automate fini déterministe de parité.*

Les automates de Büchi, de Muller, de parité ont donc le même pouvoir d'expression (avec des raffinements concernant le déterminisme). Nous *étendrons* ces résultats sur les mots de longueur ω aux automates (chapitre 6) et à la logique (chapitre 7) sur les *arbres* de profondeur ω . Partant de là nous poursuivrons vers des structures plus générales (chap.7, sous-section 7.3.2).

6.2.3 Automates non-déterministes

L'automate \mathbb{A} (sur les arbres) est dit *non-déterministe* ssi $\forall p, q, r \in Q, \forall a \in A, \forall f \in D, \forall P \in \delta(p, a)$

$$[(q, f) \in P \text{ et } (r, f) \in P] \Rightarrow q = r. \quad (6.8)$$

Intuitivement : chaque transition propose des choix au joueur J0 ; en réponse, le joueur J1 ne peut que *choisir une direction*, au lieu d'un couple (état, direction), comme dans le cas alternant en général. De ce fait une stratégie de position de J0 dans le jeu $\mathcal{J}(\mathbb{A}, t)$ correspond à une *course* de l'automate sur l'arbre.

Il s'avère que les a.f.a. généraux ont le même pouvoir d'expression que les a.f. non-déterministes. Techniquement, ce fait est crucial pour :

- démontrer la stabilité des langages reconnaissables par *homomorphisme* strictement alphabétique.
- démontrer l'existence d'un arbre *régulier* dans tout langage reconnaissable non-vide.

La preuve de cette propriété repose sur les résultats fondamentaux sur les langages de mots infinis rappelés à la sous-section 6.2.2.

Théorème 6.2.5 (simulation des a.f.a par les a.f.n.d.) *Soit \mathbb{A} un a.f.a. Alors on peut construire un a.f.n.d. \mathbb{B} tel que $L(\mathbb{A}) = L(\mathbb{B})$.*

Idée On remplace une transition $q \rightarrow \{P_1, \dots, P_i, \dots, P_\ell\}$ où chaque P_i contient un certain contingent de transitions à gauche et un contingent de transition à droite, par ℓ transitions ; la i ème transition est de la forme

$$q \rightarrow \{(\Gamma, g), (\Delta, d)\}$$

où Γ (resp. Δ) a collecté tous les états e tels que (e, g) (resp. (e, d)) apparait dans P_i . Comme les nouveaux états sont maintenant des parties, on étend ce principe à un ensemble de départ $\{q, q', \dots\}$ au lieu de q . Pour chaque succession de coups $P_{i_1}, P_{i_2} \dots P_{i_n}$ joués par J0, J1 peut choisir diverses réponses, qui conduisent de P_{i_n} à $P_{i_{n+1}}$. L'automate \mathbb{B} doit pouvoir s'assurer que *toutes* les parties jouées par J0 en choisissant P_{i_n} au n -ième coup seraient gagnées dans $\mathcal{J}(\mathbb{A}, t)$. Pour ce faire, il faut mémoriser dans les états de \mathbb{B} les arcs (q, e) (et pas seulement les e). On est ainsi conduit à la construction ci-dessous.

Construction : étape 1 Soit \mathbb{A} un automate de la forme (6.1). On pose, pour tous $q \in Q, P \subseteq Q, a \in A$,

$$\Gamma(q, P) := \{(q, p) \mid (p, g) \in P\}, \quad \Delta(q, P) := \{(q, p) \mid (p, d) \in P\}.$$

Nous notons $S_0(\mathbb{A}, a)$ l'ensemble des fonctions $\sigma : Q \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ telles que

$$\text{Dom}(\sigma) = \{q \mid \delta(q, a) \neq \emptyset\} \text{ et } \forall q \in \text{Dom}(\sigma), \sigma(q) \in \delta(q, a).$$

Pour tout mot infini

$$M := C_0 \cdots C_i \cdot C_i \cdots$$

où $C_i \in \mathcal{P}(Q \times Q)$, nous définissons l'ensemble $\text{CH}(M)$ (l'ensemble des chemins de M) comme

$$\text{CH}(M) := \{(p_0, q_0) \cdots (p_i, q_i) \cdots \mid \forall i \in \mathbb{N}, (p_i, q_i) \in C_i \text{ et } q_i = p_{i+1}\}.$$

Nous définissons un "automate"

$$\mathbb{A}' := \langle A, Q', q'_I, W, \delta' \rangle,$$

où

$$Q' := \mathcal{P}(Q \times Q), q'_I := \{(q_I, q_I)\}$$

pour tous $q' \in Q', a \in A$,

$$\delta'(q', a) := \{ \{ (\bigcup_{q \in \text{pr}_2(q')} \Gamma(q, \sigma(q)), g), (\bigcup_{q \in \text{pr}_2(q')} \Delta(q, \sigma(q)), d) \} \mid \sigma \in S_0(\mathbb{A}, a) \},$$

$$W := \{M \in (Q')^\omega \mid \forall m \in \text{CH}(M), m \text{ est gagnante dans le jeu de parité associé à } \mathbb{A}\}.$$

Nous appelons jeu $\mathcal{J}(\mathbb{A}', t)$, le jeu qui a l'arène habituelle (définie par (6.2-6.4)), et comme ensemble de parties gagnées par J0 , l'ensemble des mots

$$\{(C_0, u_0) \cdot P_0 \cdot (C_1, u_1) \cdot P_1, \dots, (C_n, u_n) \cdot P_n \dots \mid \prod_{n=0}^{\infty} C_n \in W\}$$

Nous disons qu'un arbre $t \in \mathbb{T}(A)$ est reconnu par \mathbb{A}' si, dans le jeu $(\mathcal{J}(\mathbb{A}', t), (q_I, \varepsilon))$ J0 a une stratégie gagnante. On a alors

$$L(\mathbb{A}) = L(\mathbb{A}').$$

Construction : étape 2 L'ensemble W est exprimable en logique MSO sur la structure $\langle Q'^*, (s_{q'})_{q' \in Q'} \rangle$. Donc il est reconnu par un automate de parité, déterministe (voir la sous-section 6.2.2) :

$$\mathbb{M} := \langle Q', Q_{\mathbb{M}}, q_{I, \mathbb{M}}, \Omega_{\mathbb{M}}, \delta_{\mathbb{M}} \rangle.$$

N.B. : ici Q' est l'alphabet i.e. \mathbb{M} lit des mots de Q'^ω .

Nous définissons alors l'automate fini non-déterministe sur les arbres

$$\mathbb{B} := \langle A, Q_{\mathbb{B}}, q_{I, \mathbb{B}}, \Omega_{\mathbb{B}}, \delta_{\mathbb{B}} \rangle,$$

par

$$Q_{\mathbb{B}} := Q' \times Q_{\mathbb{M}}, \quad q_{I, \mathbb{B}} := (q'_I, q'_{I, \mathbb{M}})$$

où $q'_{I, \mathbb{M}} := \delta_{\mathbb{M}}(q_{I, \mathbb{M}}, q'_I)$, et pour tous $p' \in Q', p_{\mathbb{M}} \in Q_{\mathbb{M}}, a \in A$,

$$\begin{aligned} \delta'((p', p_{\mathbb{M}}), a) &:= \{ \{(q', q_{\mathbb{M}}), g\} \mid (q', g) \in \delta'(p', a) \wedge \delta_{\mathbb{M}}(p_{\mathbb{M}}, q') = q_{\mathbb{M}}\} \\ &\cup \{ \{(r', r_{\mathbb{M}}), d\} \mid (r', d) \in \delta'(p', a) \wedge \delta_{\mathbb{M}}(p_{\mathbb{M}}, r') = r_{\mathbb{M}}\}. \end{aligned}$$

L'automate \mathbb{B} simule sur sa première composante les calculs de \mathbb{A}' et vérifie sur sa seconde composante que chaque branche de ce calcul appartient à W . Donc

$$L(\mathbb{A}') = L(\mathbb{B}).$$

L'enchaînement des étapes 1,2 démontre (informellement) le Théorème 6.2.5.

Un automate non-déterministe de la forme (6.1) sera dit *complet* ssi : $\forall p \in Q, \forall a \in A$:

$$\delta(p, a) \neq \emptyset$$

$$\forall P \in \delta(p, a), \text{Card}(P) = \text{Card}(D).$$

ces deux conditions reviennent à écrire que, pour tout arbre $t \in \mathbb{T}(A)$, le jeu $\mathcal{J}(\mathbb{A}, t)$ est complet (i.e. sans cul-de-sac). De même que pour les jeux (c.f. le Lemme 5.2.1), on peut montrer que tout a.f.n.d. \mathbb{A} peut être transformé (en temps polynomial) en un a.f.n.d. \mathbb{A}' qui est complet et tel que $L(\mathbb{A}) = L(\mathbb{A}')$ (comme on a complété les jeux au Lemme 5.2.1).

Fait 6.2.6 Soit \mathbb{A} un automate fini non-déterministe, complet sur $\mathbb{T}_D(A)$, soit $t \in \mathbb{T}(A)$ et σ une stratégie de position du joueur 0 dans le jeu $\mathcal{J}(\mathbb{A}, t)$.

Alors, il existe un arbre unique $\rho \in \mathbb{T}_D(Q)$ tel que,

$$\forall u \in D^*, \{(\rho(uf), f) \mid f \in D\} \in \delta(\rho(u), t(u)).$$

Facile : ρ correspond à l'idée intuitive d'une course ("run" en Anglais) de l'automate sur l'arbre, dirigée par la stratégie σ . Inversement

Fait 6.2.7 Soit \mathbb{A} un automate fini non-déterministe, complet sur $\mathbb{T}_D(A)$, soit $t \in \mathbb{T}(A)$ et un arbre $\rho \in \mathbb{T}_D(Q)$ tel que

$$\forall u \in D^*, \{(\rho(uf), f) \mid f \in D\} \in \delta(\rho(u), t(u)),$$

et soit $\sigma : Q \times D^* \rightarrow Q$ vérifiant

$$\forall u \in D^*, \sigma(\rho(u), t(u)) = \{(\rho(uf), f) \mid f \in D\}.$$

Alors σ est une stratégie de position du joueur 0 dans le jeu $\mathcal{J}(\mathbb{A}, t)$.

6.3 Opérations sur les langages reconnaissables

Pour chacune des opérations union, complémentation, homomorphisme strictement alphabétique et inverse d'un homomorphisme strictement alphabétique, nous prouvons la stabilité de $\text{REC}(\mathbb{T}(A))$. Chacune de ces preuves de stabilité (ou clôture) est *constructive* : nous traduisons l'opération sur les langages en une *opération calculable sur les automates* finis alternants.

Lemme 6.3.1 Soit A un alphabet fini. L'ensemble $\text{REC}(\mathbb{T}(A))$ est clos par union.

Preuve : Soient

$$\mathbb{A}_j = \langle Q_j, A, \delta_j, q_{j,I}, \Omega_j \rangle$$

pour $j \in \{1, 2\}$, deux a.f.a. sur l'alphabet A . On peut supposer, sans perte de généralité, que $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$. Posons

$$\mathbb{B} = \langle Q, A, \delta, q_I, \Omega \rangle$$

où

$$Q := Q_1 \cup Q_2 \uplus \{q_I\}, \quad \delta := \delta_1 \cup \delta_2 \cup \{((q_I, a), \delta_1(q_{1,I}, a) \cup \delta_2(q_{2,I}, a)) \mid a \in A\}$$

$$\Omega := \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \{(q_i, 0)\}.$$

On vérifie que

$$L(\mathbb{B}) = L(\mathbb{A}_1) \cup L(\mathbb{A}_2).$$

□

Afin de montrer la stabilité par complémentation nous introduisons une opération sur les automates, analogue à l'opération de retournement sur les jeux.

Définition 6.3.2 *Soit*

$$\mathbb{A} := \langle A, Q, q_I, \Omega, \delta \rangle$$

un automate fini alternant. L'automate dual-retourné de \mathbb{A} est défini par

$$\text{DR}(\mathbb{A}) := \langle A, Q, q_I, \Omega', \delta' \rangle,$$

où, pour tous $q \in Q, a \in A$,

$$\delta'(q, a) := \{\text{Im}(\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{C}(\delta(q, a))\}$$

et

$$\Omega'(q) := \Omega(q) + 1.$$

Fait 6.3.3 *Considérons un sommet (p, u) du jeu $\mathcal{J}(\mathbb{A}, t)$ ($p \in Q, u \in D^*$).*

Alors $\{\text{Im}(\alpha) \mid \alpha \in \text{SD}((p, u))\} = \{\text{Im}(\alpha') \odot u \mid \alpha' \in \mathcal{C}(\delta(p, t(u)))\}$.

Preuve : Notons $a := t(u)$.

Une stratégie de défense locale en (p, u) dans le jeu $\mathcal{J}(\mathbb{A}, t)$ est une fonction de choix sur l'ensemble des successeurs de (p, u) i.e. $\delta(p, a) \odot u$. Donc

$$\text{SD}((p, u)) = \mathcal{C}(\delta(p, a) \odot u) \tag{6.9}$$

Soit $\varphi : Q \times D \rightarrow Q \times D^*$ définie par

$$\varphi(q, f) = (q, f) \odot u.$$

Par le Fait 6.1.1,

$$\mathcal{C}(\mathbb{P}(\mathbb{P}(\varphi))(\delta(p, a))) = \{\varphi \circ \alpha' \mid \alpha' \in \mathcal{C}(\delta(p, a))\}. \tag{6.10}$$

En combinant (6.9) et (6.10) :

$$\text{SD}((p, u)) = \{\varphi \circ \alpha' \mid \alpha' \in \mathcal{C}(\delta(p, a))\}$$

et en passant aux images, on obtient le Fait 6.3.3. \square

Lemme 6.3.4 *Soit \mathbb{A} un a.f.a. sur A et $t \in \mathbb{T}(A)$. Alors $\text{D}(\text{R}_s(\mathcal{J}(\mathbb{A}, t))) = \mathcal{J}(\text{DR}(\mathbb{A}), t)$*

Preuve :

S0- Sommets de J0 :

Les sommets de $\text{D}(\text{R}_s(\mathcal{J}(\mathbb{A}, t)))$ sont les $(p, u) \in Q \times D^*$;

Les sommets de $\mathcal{J}(\text{DR}(\mathbb{A}), t)$ sont les $(p, u) \in Q \times D^*$.

S1- Sommets de J1 :

Les sommets de $\text{D}(\text{R}_s(\mathcal{J}(\mathbb{A}, t)))$ sont les $\text{Im}(\alpha)$ pour $(p, u) \in Q \times D^*$ et $\alpha \in \text{SD}((p, u))$.

Les sommets de $\mathcal{J}(\text{DR}(\mathbb{A}), t)$ sont les

$$\text{Im}(\alpha') \odot u$$

pour $(p, u) \in Q \times D^*$ et $\alpha' \in \mathcal{C}(\delta(p, t(u)))$.

Le fait 6.3.3 établit que ces deux ensembles sont égaux.

C0- Coups de J0 :

Dans $\text{D}(\text{R}_s(\mathcal{J}(\mathbb{A}, t)))$:

$$(p, u) \rightarrow \text{Im}(\alpha)$$

pour $\alpha \in \text{SD}((p, u))$.

Dans $\mathcal{J}(\text{DR}(\mathbb{A}), t)$:

$$(p, u) \rightarrow \text{Im}(\alpha') \odot u$$

pour $\alpha' \in \mathcal{C}(\delta(p, t(u)))$.

Le fait 6.3.3 établit que ce sont les mêmes arcs.

C1- Coups de J1 :

$$P \rightarrow (q, u)$$

où P est un sommet de J1 et $(q, u) \in P$; comme les sommets de J1 sont les mêmes, ces arcs sont les mêmes.

Fonction de coloration- Notons Ω (resp. $\Omega_{\mathcal{J}}, \Omega_D, \Omega_R$), la fonction de coloration de \mathbb{A} (resp. $R_s(\mathcal{J}(\mathbb{A}, t)), D(R_s(\mathcal{J}(\mathbb{A}, t))), \mathcal{J}(\text{DR}(\mathbb{A}), t)$).

$$\Omega_{\mathcal{J}}(p, u) = \Omega(p), \quad \Omega_D(p, u) = \Omega(p) + 1, \quad \Omega_R(p, u) = \Omega(p) + 1.$$

D'autre part les couleurs des sommets de J1 valent 0 dans $D(R_s(\mathcal{J}(\mathbb{A}, t)))$ et dans $\mathcal{J}(\text{DR}(\mathbb{A}), t)$. \square

Lemme 6.3.5 *Soit A un alphabet fini, \mathbb{A} un a.f.a sur A et $\text{DR}(\mathbb{A})$ l'automate dual-retourné de \mathbb{A} . Alors $L(\text{DR}(\mathbb{A})) = \mathbb{T}(A) \setminus L(\mathbb{A})$.*

Preuve : Soit $t \in \mathbb{T}(A)$.

$$t \in L(\text{DR}(\mathbb{A}))$$

$\Leftrightarrow (q_I, \varepsilon)$ est gagnante pour J0 dans $\mathcal{J}(\text{DR}(\mathbb{A}), t)$

$\Leftrightarrow (q_I, \varepsilon)$ est gagnante pour J0 dans $D(R_s(\mathcal{J}(\mathbb{A}, t)))$ (par L.6.3.4)

$\Leftrightarrow (q_I, \varepsilon)$ est gagnante pour J1 dans $R_s(\mathcal{J}(\mathbb{A}, t))$ (par L.5.1.2)

$\Leftrightarrow (q_I, \varepsilon)$ est gagnante pour J1 dans $\mathcal{J}(\mathbb{A}, t)$ (par L.5.4.4, L.5.4.6 et $\mathcal{J}(\mathbb{A}, t)$ est déterminé)

$\Leftrightarrow (q_I, \varepsilon)$ n'est pas gagnante pour J0 dans $\mathcal{J}(\mathbb{A}, t)$ (car $\mathcal{J}(\mathbb{A}, t)$ est déterminé).

\square

Lemme 6.3.6 *Soit A un alphabet fini. L'ensemble $\text{REC}(\mathbb{T}(A))$ est clos par complémentation.*

Résulte immédiatement du Lemme 6.3.5.

Soit $h : A \rightarrow A$ une application. Elle induit une application $\hat{h} : \mathbb{T}(A) \rightarrow \mathbb{T}(A)$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{T}(A), \quad \hat{h}(t) = h \circ t. \quad (6.11)$$

On appelle *homomorphisme strictement alphabétique de $\mathbb{T}(A)$ dans $\mathbb{T}(A)$* , toute application de la forme (6.11).

Définition 6.3.7 *Soit \mathbb{A} un a.f. non-déterministe sur $\mathbb{T}(A)$ et $h : A \rightarrow A$ une application. L'automate \mathbb{A}_h est défini par*

$$\mathbb{A}_h := \langle A, Q, q_I, \Omega, \delta_h \rangle,$$

où

$$\forall p \in Q, \forall a \in A, \delta_h(p, a) := \bigcup_{h(b)=a} \delta(p, b).$$

Lemme 6.3.8 Soit A un alphabet fini, \mathbb{A} un a.f.n.d, $h : A \rightarrow A$, $t \in \mathbb{T}(A)$ et σ une stratégie gagnante de J0 dans $(\mathcal{J}(\mathbb{A}, t), (q_I, \varepsilon))$. Alors on peut construire une stratégie σ_h gagnante de J0 dans $(\mathcal{J}(\mathbb{A}_h, \hat{h}(t)), (q_I, \varepsilon))$.

Preuve : Soient $A, \mathbb{A}, h, t, \sigma$ vérifiant les hypothèses du lemme. Sans perte de généralité, on peut supposer que \mathbb{A} est complet.

Comme σ est une stratégie de position de J0 dans $\mathcal{J}(\mathbb{A}, t)$: pour tous $p \in Q, u \in D^*$

$$\sigma(p, u) = P_u \odot u \text{ où } P_u \in \delta(p, t(u))$$

1- Montrons que σ est aussi une stratégie de position de J0 dans $\mathcal{J}(\mathbb{A}_h, \hat{h}(t))$.

Pour tous $(p, u) \in \text{Dom}(\sigma)$,

$$\begin{aligned} P_u \in \delta(p, t(u)) &\subseteq \delta_h(p, h(t(u))) \\ &= \delta_h(p, \hat{t}(u)) \quad \text{puisque } h(t(u)) = \hat{t}(u) \end{aligned}$$

Donc $((p, u), P_u \odot u)$ est bien un arc du jeu $\mathcal{J}(\mathbb{A}_h, \hat{h}(t))$. Comme \mathbb{A} est complet, $\text{Dom}(\sigma) = Q \times D^*$. Ainsi σ est bien une stratégie dans le jeu $\mathcal{J}(\mathbb{A}_h, \hat{h}(t))$.

2- Soit $\hat{\pi}$ une partie de $(\mathcal{J}(\mathbb{A}_h, \hat{h}(t)), (q_I, \varepsilon))$ jouée selon σ .

$$\hat{\pi} = \dots, (p_u, u), P_u \odot u, (p_{uf}, uf), \dots$$

Les arcs $((p_u, u), P_u \odot u)$ sont des arcs de $\mathcal{J}(\mathbb{A}_h, \hat{h}(t))$ (puisque'ils suivent σ qui est une stratégie de ce jeu), et les arcs $P_u \odot u, (p_{uf}, uf)$ satisfont $(p_{uf}, uf) \in P_u \odot u$. Donc $\hat{\pi}$ est aussi une partie dans le jeu $(\mathcal{J}(\mathbb{A}_h, \hat{h}(t)), (q_I, \varepsilon))$, jouée selon σ . Comme σ est gagnante pour J0 dans $(\mathcal{J}(\mathbb{A}, t), (q_I, \varepsilon))$, la partie $\hat{\pi}$ est gagnée par J0 dans $\mathcal{J}(\mathbb{A}, t)$, et elle est donc gagnée par J0 dans $\mathcal{J}(\mathbb{A}_h, \hat{h}(t))$ (puisque la fonction de coloration est la même).

Posons $\sigma_h := \sigma$. Nous avons établi que σ_h est gagnante pour J0 dans $(\mathcal{J}(\mathbb{A}_h, \hat{h}(t)), (q_I, \varepsilon))$. \square

Lemme 6.3.9 Soit A un alphabet fini, \mathbb{A} un a.f non-déterministe, $h : A \rightarrow A$, $\hat{t} \in \mathbb{T}(A)$ et σ_h une stratégie gagnante de J0 dans $(\mathcal{J}(\mathbb{A}_h, \hat{t}), (q_I, \varepsilon))$. Alors on peut construire un arbre $t \in \mathbb{T}(A)$ tel que $\hat{h}(t) = \hat{t}$ et une stratégie σ gagnante de J0 dans $(\mathcal{J}(\mathbb{A}, t), (q_I, \varepsilon))$.

Preuve : On note $D = \{g, d\}$. On fixe un ordre total sur A (resp. sur $Q \times D$). Soient $A, \mathbb{A}, h, \hat{t}, \sigma_h$ vérifiant les hypothèses du lemme. Sans perte de généralité, on peut supposer que \mathbb{A} est complet, ce qui entraîne que \mathbb{A}_h est non-déterministe, complet. Notons ρ_h la course de \mathbb{A}_h sur \hat{t} dirigée par la stratégie σ_h (voir le Fait 6.2.6). On a alors

$$\begin{aligned} \{(\rho_h(ug), g), (\rho_h(ud), d)\} &\in \delta_h(\rho_h(u), \hat{t}(u)) \\ &= \bigcup_{h(b)=\hat{t}(u)} \delta(\rho_h(u), b). \end{aligned}$$

Définissons un arbre $t \in \mathbb{T}(A)$ par :

$$\forall u \in D^*, t(u) := \min\{b \in A \mid \{(\rho_h(ug), g), (\rho_h(ud), d)\} \in \delta(\rho_h(u), b)\}, \quad (6.12)$$

et une application $\sigma : Q \times D^* \rightarrow \mathcal{P}_f(Q \times D)$ par

$$\begin{aligned} \forall u \in D^*, \sigma(\rho_h(u), u) &:= \{(\rho_h(ug), g), (\rho_h(ud), d)\} \\ \forall u \in D^*, \sigma(p, u) &:= \min(\delta(p, t(u))) \quad \text{si } p \neq \rho_h(u). \end{aligned}$$

Par le Fait 6.2.7 σ est une stratégie du joueur 0 dans le jeu $\mathcal{J}(\mathbb{A}, t)$. Soit π une partie jouée selon σ dans le jeu $(\mathcal{J}(\mathbb{A}, t), (q_I, \varepsilon))$:

$$\pi = \dots (\rho_h(u), u), \sigma(\rho_h(u), u), ((\rho_h(uf), uf), \dots$$

C'est aussi une partie jouée selon σ_h dans le jeu $(\mathcal{J}(\mathbb{A}_h, \hat{t}), (q_I, \varepsilon))$, donc elle est gagnée par J0. \square

Lemme 6.3.10 *Soit A un alphabet fini, \mathbb{A} un a.f.n.d, $h : A \rightarrow A$. Alors $L(\mathbb{A}_h) = \hat{h}(L(\mathbb{A}))$.*

Ce lemme résulte des deux lemmes précédents.

Lemme 6.3.11 *Soit A un alphabet fini. L'ensemble $\text{REC}(\mathbb{T}(A))$ est clos par homomorphisme strictement alphabétique.*

Preuve : Par le Théorème de simulation (Th.6.2.5), tout langage reconnaissable d'arbres est reconnu par un automate fini non-déterministe. Par le Lemme 6.3.10, pour tout a.f.n.d. \mathbb{A} et tout homomorphisme strictement alphabétique h , $\hat{h}(L(\mathbb{A}))$ est reconnaissable. \square

Définition 6.3.12 *Soit \mathbb{A} un a.f.a sur $\mathbb{T}(A)$ et $h : A \rightarrow A$ une application. L'automate $\mathbb{A}_{h^{-1}}$ est défini par*

$$\mathbb{A}_{h^{-1}} := \langle A, Q, q_I, \Omega, \delta_{h^{-1}} \rangle,$$

où

$$\forall p \in Q, \forall a \in A, \delta_{h^{-1}}(p, a) := \delta(p, h(a)).$$

Lemme 6.3.13 *Soit A un alphabet fini, \mathbb{A} un a.f.a., $h : A \rightarrow A$. Alors $L(\mathbb{A}_{h^{-1}}) = \hat{h}^{-1}(L(\mathbb{A}))$.*

Preuve : Soit $t \in \mathbb{T}(A)$. On vérifie que

$$\mathcal{J}(\mathbb{A}_{h^{-1}}, t) = \mathcal{J}(\mathbb{A}, \hat{h}(t)).$$

Donc le joueur 0 a une stratégie gagnante dans $(\mathcal{J}(\mathbb{A}_{h^{-1}}, t), (q_I, \varepsilon))$ ssi le joueur 0 a une stratégie gagnante dans $(\mathcal{J}(\mathbb{A}, t), (q_I, \varepsilon))$. Autrement dit :

$$t \in L(\mathbb{A}_{h^{-1}}) \Leftrightarrow \hat{h}(t) \in L(\mathbb{A})$$

i.e.

$$L(\mathbb{A}_{h^{-1}}) = \hat{h}^{-1}(L(\mathbb{A})).$$

\square

Lemme 6.3.14 *Soit A un alphabet fini. L'ensemble $\text{REC}(\mathbb{T}(A))$ est clos par homomorphisme strictement alphabétique inverse.*

Ce lemme résulte immédiatement du Lemme 6.3.13.

Le théorème suivant fait le bilan des propriétés de stabilité démontrées dans cette section.

Théorème 6.3.15 *Soit A un alphabet fini. L'ensemble $\text{REC}(\mathbb{T}(A))$ est clos par union, intersection, complémentation, homomorphisme strictement alphabétique et homomorphisme strictement alphabétique inverse.*

6.4 Problèmes de décision

Théorème 6.4.1 *Le problème de savoir, étant donné un a.f.a \mathbb{A} si $L(\mathbb{A}) = \emptyset$, est décidable.*

Idée :

Par le Théorème de simulation (Th.6.2.5) on se ramène au cas d'un a.f.n.d \mathbb{A} .

On considère $h : A \rightarrow \{a\}$. Soit t_a l'unique élément de $\mathbb{T}(\{a\})$. Le jeu $\mathcal{J}(\mathbb{A}_h, t_a)$ est le dépliage d'un jeu de parité fini $(JF(\mathbb{A}), v_0)$. On se ramène ainsi à la détermination des positions gagnantes du jeu de parité $(JF(\mathbb{A}), v_0)$ (voir chapitre 4).

Théorème 6.4.2 *Soit $L \in \text{REC}(\mathbb{T}(A))$. Le langage L est non-vide si et seulement si il possède au moins un arbre régulier.*

Idée :

On reprend l'idée de preuve du théorème précédent. On peut supposer que \mathbb{A} est un a.f.n.d. Si $L(\mathbb{A}) \neq \emptyset$, alors $L(\mathbb{A}_h) \neq \emptyset$ et le joueur J0 a une stratégie positionnelle gagnante dans $(JF(\mathbb{A}_h), v_0)$. Cette stratégie se relève en une stratégie dans $\text{depl}(JF(\mathbb{A}_h), v_0) \equiv \mathcal{J}(\mathbb{A}_h, t_a)$ (point 2 de la preuve du Lemme 5.3.2) ; cette stratégie définit un choix d'étiquette en chaque sommet $u \in D^*$ (preuve du Lemme 6.3.9, équation (6.12)). L'arbre $t \in \mathbb{T}(A)$ obtenu en suivant ce choix d'étiquette a un nombre de classes d'isomorphismes de sous-arbres inférieur ou égal au nombre de sommets de $JF(\mathbb{A}_h)$.

Chapitre 7

Logique monadique du second ordre

7.1 Syntaxe et sémantique

Les formules Soit $\mathcal{S} = \{r_1, \dots, r_n\}$ une signature consistant en n symboles de relation munis chacun d'une arité : le symbole r_i a une arité $(\rho_i, \tau_i) \in \mathbb{N}^2$.

Soient $\mathcal{V}_1 = \{x, y, z, \dots\}$, $\mathcal{V}_2 = \{X, Y, Z, \dots\}$ deux ensembles de variables : les variables d'ordre 1 et d'ordre 2, respectivement. L'ensemble des formules de logique Monadique du Second-Ordre sur \mathcal{S} est défini inductivement par :

- pour tout $x \in \mathcal{V}_1, Y, X \in \mathcal{V}_2$,

$$x \in X, \quad Y \subseteq X$$

sont des formules MSO

- pour tout $r \in \mathcal{S}$ d'arité (ρ, τ) et tous $x_1, \dots, x_\rho \in \mathcal{V}_1, X_1 \dots X_\tau \in \mathcal{V}_2$

$$r(x_1, \dots, x_\rho, X_1 \dots X_\tau)$$

est une formule MSO

- si Φ, Ψ sont des formules MSO alors

$$\neg\Phi, \quad \Phi \vee \Psi, \quad \Phi \wedge \Psi, \quad \Phi \rightarrow \Psi, \quad \Phi \leftrightarrow \Psi$$

sont des formules MSO.

- si Φ est une formule MSO et $x \in \mathcal{V}_1, X \in \mathcal{V}_2$ alors

$$\exists x.\Phi, \quad \forall x.\Phi, \quad \exists X.\Phi, \quad \forall X.\Phi$$

sont des formules MSO.

Les interprétations Soit \mathcal{S} une signature relationnelle. On appelle structure sur la signature \mathcal{S} un t-uple

$$\mathcal{M} = \langle E^{(\mathcal{M})}, r_1^{(\mathcal{M})}, \dots, r_n^{(\mathcal{M})} \rangle$$

où $E^{(\mathcal{M})}$ est un ensemble (le domaine de la structure), et pour tout $i \in [1, n]$, $r_i^{(\mathcal{M})} \subseteq (E^{(\mathcal{M})})^\rho \times (\mathcal{P}(E^{(\mathcal{M})}))^\tau$.

Exemple 7.1.1 *Considérons la signature $\mathcal{S} := \{P, \text{EQ}\}$ avec P d'arité $(3, 0)$ et EQ d'arité $(2, 0)$. Nous donnons ci-dessous deux structures sur cette signature.*

$$\mathcal{N} = \langle E^{(\mathcal{N})}, P^{(\mathcal{N})}, \text{EQ}^{(\mathcal{N})} \rangle$$

est définie par

$$E^{(\mathbb{N})} := \mathbb{N}, \quad P^{(\mathbb{N})} := \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 \mid x + y = z\}, \quad \text{EQ}^{(\mathbb{N})} := \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x = y\}$$

$$\mathcal{M} = \langle E^{(\mathbb{M})}, P^{(\mathbb{M})}, \text{EQ}^{(\mathbb{M})} \rangle$$

est définie par

$$E^{(\mathbb{M})} := \{0, 1, 2, 3, 4\}; \quad P^{(\mathbb{M})} := \{(x, y, z) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}^3 \mid x \oplus y = z\},$$

$$\text{EQ}^{(\mathbb{M})} := \{(x, y) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}^2 \mid x = y\}$$

où la loi de composition \oplus est définie par la table

\oplus	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	2
2	2	3	4	2	3
3	3	4	2	3	4
4	4	2	3	4	2

Une *valuation* sur la structure \mathcal{M} est une application $\nu : (\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2) \rightarrow E_{\mathcal{M}} \cup \mathcal{P}(E_{\mathcal{M}})$ telle que, pour tout $x \in \mathcal{V}_1$, $\nu(x) \in E_{\mathcal{M}}$ et pour tout $X \in \mathcal{V}_2$, $\nu(X) \in \mathcal{P}(E_{\mathcal{M}})$.

La valeur de vérité d'une formule MSO dans une structure \mathcal{M} pour une valuation ν est obtenue, intuitivement, en attribuant aux formules atomiques la valeur 1 (resp. 0), si la formule exprime un fait vrai (resp. faux) dans \mathcal{M} , puis en interprétant les connecteurs et les quantificateurs selon l'usage courant en mathématique. Plus formellement, on introduit le symbole \models et on définit, pour tout couple (\mathcal{M}, ν) formé d'une structure sur la signature \mathcal{S} et d'une valuation sur cette structure et toute formule MSO Φ sur la signature \mathcal{S} , la validité de

$$(\mathcal{M}, \nu) \models \Phi.$$

La définition procède par induction structurelle sur Φ .

Formules atomiques :

$$(\mathcal{M}, \nu) \models x \in X$$

ssi $\nu(x) \in \nu(X)$.

$$(\mathcal{M}, \nu) \models Y \subseteq X$$

ssi $\nu(Y) \subseteq \nu(X)$.

$$(\mathcal{M}, \nu) \models r(x_1, \dots, x_\rho, X_1 \dots X_\tau)$$

ssi $(\nu(x_1), \dots, \nu(x_\rho), \nu(X_1) \dots \nu(X_\tau)) \in r^{(\mathcal{M})}$.

Connecteurs :

$$(\mathcal{M}, \nu) \models \neg\Phi$$

ssi, la relation $(\mathcal{M}, \nu) \models \Phi$ n'est pas vérifiée.

$$(\mathcal{M}, \nu) \models \Phi \vee \Psi$$

ssi, $((\mathcal{M}, \nu) \models \Phi)$ ou $((\mathcal{M}, \nu) \models \Psi)$.
etc...

Quantificateurs :

$$(\mathcal{M}, \nu) \models \exists x.\Phi$$

ssi, il existe un élément $d \in E^{(\mathcal{M})}$, tel que la relation $(\mathcal{M}, \nu') \models \Phi$ est vérifiée par la valuation ν' définie par $\forall y \in \mathcal{V}_1 - \{x\}, \nu'(y) := \nu(y), \nu'(x) := d, \forall X \in \mathcal{V}_2, \nu'(X) := \nu(X)$.

$$(\mathcal{M}, \nu) \models \forall x.\Phi$$

ssi, pour tout élément $d \in E^{(\mathcal{M})}$, la relation $(\mathcal{M}, \nu') \models \Phi$ est vérifiée par la valuation ν' définie par $\forall y \in \mathcal{V}_1 - \{x\}, \nu'(y) := \nu(y), \nu'(x) := d, \forall X \in \mathcal{V}_2, \nu'(X) := \nu(X)$.

Des clauses similaires définissent “ $(\mathcal{M}, \nu) \models \exists X.\Phi$ ” et “ $(\mathcal{M}, \nu) \models \forall X.\Phi$ ”.

Exemple 7.1.2 (on continue l'exemple 7.1.1). Examinons la formule

$$\Phi := \forall x.\forall y.\forall z.\forall t.(P(x, y, t) \wedge P(x, z, t) \rightarrow E(y, z)).$$

Cette formule est vraie dans \mathcal{N} car la loi d'addition est simplifiable à gauche. (i.e. $x + y = x + z \Rightarrow y = z$). Par contre, Φ est fausse dans \mathcal{M} car $2 \oplus 0 = 2 \oplus 3$ mais $0 \neq 3$. Autrement écrit :

$$\mathcal{N} \models \Phi$$

mais par contre,

$$\mathcal{M} \not\models \Phi.$$

Examinons maintenant la formule

$$\Psi := \forall y.P(x, y, y),$$

et les valuations suivantes dans \mathcal{N} :

$$\nu(x) := 0, \forall v \in \mathcal{V}_1 - \{x\}, \nu(v) := 3; \forall X \in \mathcal{V}_2, \nu(X) := \{2, 5\}$$

$$\mu(x) := 1, \forall v \in \mathcal{V}_1 - \{x\}, \mu(v) := 7; \forall X \in \mathcal{V}_2, \mu(X) := \{1, 2, 39\}$$

On vérifie que :

$$(\mathcal{N}, \nu) \models \Psi, (\mathcal{N}, \mu) \not\models \Psi.$$

Remarquons que seule la valeur $\nu(x)$ (resp. $\mu(x)$) influe sur la validité de Ψ , car c'est la seule variable libre (i.e. qui apparaît sans être l'objet d'une quantification) de Ψ .

7.2 Reconnaissabilité versus définissabilité

À tout ensemble de directions D et alphabet A , nous associons une signature MSO $\mathcal{S}_{D,A}$ comme suit :

$$\mathcal{S}_{D,A} := \{P_a \mid a \in A\} \cup \{S_f \mid f \in D\}$$

où chaque P_a est d'arité $(1, 0)$ et chaque S_f est d'arité $(2, 0)$. Un arbre $t \in \mathbb{T}_D(A)$ peut “naturellement” être vu comme une structure sur la signature $\mathcal{S}_{D,A}$ en posant

$$\begin{aligned} E^{(t)} &:= D^* \\ &\text{et pour tout } a \in A, f \in D, \\ P_a^{(t)} &:= \{u \in D^* \mid t(u) = a\} \\ S_f^{(t)} &:= \{(u, v) \in D^* \times D^* \mid u \cdot f = v\}. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Chaque formule MSO, close, Φ sur la signature $\mathcal{S}_{D,A}$ définit alors le langage des arbres qui sont des modèles de Φ :

$$L(\Phi) := \{t \in \mathbb{T}_D(A) \mid t \models \Phi\}.$$

Un langage $L \subseteq \mathbb{T}_D(A)$ est dit MSO-définissable ssi, il existe une formule MSO Φ sur la signature $\mathcal{S}_{D,A}$ telle que $L = L(\Phi)$.

Théorème 7.2.1 (Rabin,1971) *Soient D, A des ensembles finis et $\mathcal{S}_{D,A}$ la signature MSO associée. Un langage $L \subseteq \mathbb{T}_D(A)$ est reconnaissable ssi il est MSO-définissable.*

Nous donnerons la preuve de ce théorème dans le cas où $D = \{g, d\}$.

Partie 1 : Montrons que tout reconnaissable est définissable par une formule MSO, close.

Soit L un langage reconnaissable de $\mathbb{T}(A)$.

Soit $\mathbb{A} = \langle D, A, Q, q_I, \Omega, \delta \rangle$ un automate fini non-déterministe complet reconnaissant L . Construisons une formule MSO Φ qui exprime l'existence d'une "course" de \mathbb{A} sur l'arbre t (cette notion est introduite au Fait 6.2.6) qui vérifie la condition de parité sur chaque branche.

Notons $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$. Introduisons une famille de variables d'ordre 2, X_1, \dots, X_n (X_i représente l'ensemble des positions u étiquetées par q_i dans la course ρ). Considérons les prédicats auxiliaires :

- $Rac(x)$: x est le mot ε .
- $Empty(X)$: X est l'ensemble vide.
- $Emptyinter(X, Y)$: $X \cap Y$ est vide.
- $Part(X_1, \dots, X_n)$: les ensembles X_1, \dots, X_n sont disjoints et ont une union égale à D^* .
- $Init(x)$: x appartient à un ensemble X_i avec $q_i = q_I$.
- $Trans(x)$: $\{(\rho(xg), g), (\rho(xd), d)\} \in \delta(\rho(x), t(x))$
- $Succ(x, y)$: y est successeur de x
- $Pref(x, y)$: le mot x est préfixe du mot y
- $Compar(x, y)$: les mots x, y sont comprables pour l'ordre préfixe
- $Branch(X)$: X est une branche de D^* i.e. un chemin infini commençant en ε
- $CoulInf_c(X)$: la couleur c est atteinte infiniment souvent dans X
- $Parite(X)$: $\max\{c \in \mathbb{N} \mid \text{Card}(\bigcup_{\Omega(i)=c} X_i) = \infty\} \equiv 0 \pmod{2}$

Ces prédicats sont exprimables par les formules MSO suivantes :

- $Rac(x)$ est exprimé par : $\forall y, \neg S_g(y, x) \wedge \neg S_d(y, x)$
- $Empty(X)$: $\forall Y \cdot X \subseteq Y$.
- $Emptyinter(X, Y)$: $\forall Z \cdot \forall x \cdot (x \in X \wedge x \in Y) \rightarrow x \in Z$.

- $Part(X_1, \dots, X_n) : \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} Emptyinter(X_i, X_j) \wedge (\forall x, \bigvee_{1 \leq i \leq n} x \in X_i)$
- $Init(x) : \bigvee_{q_i=q_1} x \in X_i.$
- $Trans(x) : \forall y \cdot \forall z \cdot [S_g(x, y) \wedge S_d(x, z)] \rightarrow$
 $[\bigvee_{\{(q_j, g), (q_k, d)\} \in \delta(q_i, a)} (x \in X_i \wedge P_a(x) \wedge y \in X_j \wedge z \in X_k)].$
- $Succ(x, y) : S_g(x, y) \vee S_d(x, y)$
- $Pref(x, y) : \exists Y \cdot \forall z \cdot \forall u \cdot x \in Y \wedge y \in Y \wedge ((Succ(z, u) \wedge u \in Y) \rightarrow z \in Y) \wedge (\neg Succ(y, z))$
- $Compar(x, y) : Pref(x, y) \vee Pref(y, x)$
- $Branch(X) : \forall x \cdot \forall y \cdot \exists z \cdot [(x \in B \wedge y \in B) \rightarrow Compar(x, y)] \wedge [x \in B \rightarrow (Pref(x, z) \wedge \neg Pref(z, x) \wedge z \in B)]$
- $CoulInf_c(X) : \bigvee_{\Omega(i)=c} [\forall x \cdot \exists z \cdot (x \in X_i \wedge x \in X) \rightarrow (z \in X_i \wedge z \in X \wedge Pref(x, z) \wedge \neg Pref(z, x) \wedge z \in \Omega)]$
- $Parite(X) : \bigvee_{c \equiv 0 \pmod{2}} [CoulInf_c(X) \wedge \bigwedge_{d > c} \neg CoulInf_d(X)].$

On pose alors :

$$\begin{aligned} \Phi &:= \exists X_1 \cdot \exists X_2 \cdot \dots \cdot \exists X_n \cdot \forall x \cdot \forall y \cdot \forall Y \cdot \\ &\quad Part(X_1, \dots, X_n) \wedge (Rac(x) \rightarrow Init(x)) \wedge Trans(x) \\ &\quad \wedge (Branch(Y) \rightarrow Parite(Y)) \end{aligned} \tag{7.2}$$

Partie 2 :

Montrons que tout langage défini par une formule MSO Φ , close, est reconnaissable.

Étape 1 : Afin de rendre cette preuve plus aisée, on se ramène à des formules sur une signature modifiée, où tous les symboles de relations ont des arguments d'ordre 2 (i.e. des variables qui représentent des ensembles). Définissons la signature MSO $\mathcal{S}_{A,2}$ par :

$$D := \{g, d\}, \mathcal{S}_{A,2} := \{P_a \mid a \in A\} \cup \{S_f \mid f \in D\}$$

où chaque P_a est d'arité (0, 1) et chaque S_f est d'arité (0, 2). La signification de P_a, S_f sur un arbre $t \in \mathbb{T}(A)$ et une valuation ν est donnée par :

$$P_a^{(t)} := \{P \in \mathcal{P}(D^*) \mid \forall u \in P, t(u) = a\}$$

$$S_f^{(t)} := \{(P, Q) \mid P, Q \in \mathcal{P}(D^*), \forall u \in P, \forall v \in Q, u \cdot f = v\}.$$

Appelons logique MSO2, sur la signature $\mathcal{S}_{A,2}$, la logique MSO sur la signature $\mathcal{S}_{A,2}$, que l'on *restreint* aux formules qui ne comportent que des variables de \mathcal{V}_2 .

Lemme 7.2.2 *Toute formule MSO sur \mathcal{S}_A est équivalente à une formule MSO2 sur $\mathcal{S}_{A,2}$.*

(une formule est dite équivalente à une autre si elle a exactement les mêmes modèles).

Preuve : On peut tout d'abord restreindre les connecteurs à \neg, \vee et les quantificateurs à \exists . On associe ensuite à chaque variable $x \in \mathcal{V}_1$ une nouvelle variable $Z_x \in \mathcal{V}_2$. Etant donnée Φ , formule MSO sur \mathcal{S}_A , on définit une formule MSO2 $\hat{\Phi}$ sur $\mathcal{S}_{A,2}$, par induction structurelle :

- si $\Phi = P_a(X)$ alors $\hat{\Phi} = \Phi$
- si $\Phi = X \subseteq Y$ alors $\hat{\Phi} = \Phi$
- si $\Phi = S_f(x, y)$ alors $\hat{\Phi} = \text{Sing}(Z_x) \wedge \text{Sing}(Z_y) \wedge S_f(Z_x, Z_y)$
- si $\Phi = x \in X$ alors $\hat{\Phi} = \text{Sing}(Z_x) \wedge Z_x \subseteq X$
- si Φ, Ψ sont des formules MSO alors $\neg \hat{\Phi} = \neg \hat{\Phi}$, $\Phi \hat{\vee} \Psi = \hat{\Phi} \vee \hat{\Psi}$.
- si Φ est une formule MSO et $x \in \mathcal{V}_1$ alors $\exists x. \hat{\Phi} = \exists Z_x. \text{Sing}(Z_x) \wedge \hat{\Phi}$
- si Φ est une formule MSO et $X \in \mathcal{V}_2$ alors $\exists X. \hat{\Phi} = \exists X. \hat{\Phi}$

où $\text{Sing}(X)$ est la formule suivante, qui exprime que X est un singleton :

$$\begin{aligned} \text{Sing}(X) &:= \exists Y \cdot \neg(X \subseteq Y) \\ &\quad \wedge (\forall Y' \cdot (Y' \subseteq X) \rightarrow [(Y' \subseteq Y) \vee (X \subseteq Y')]) \end{aligned}$$

□

Étape 2 : On souhaite démontrer que tout langage défini par une formule MSO2 Φ , close, est reconnaissable. On envisage de procéder par induction structurelle sur Φ , ce qui nous amène à associer un langage à toute formule Φ , même lorsqu'elle comporte des variables libres.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{T}(\{0, 1\}^n \times A)$ et $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{V}_2^n$. On associe à l'arbre t la valuation :

$$\nu_t : X_i \mapsto \{u \in \text{dom}(t) \mid \text{pr}_i(t(u)) = 1\}, \quad X \in \mathcal{V}_2 - \{X_1, \dots, X_n\} \mapsto \emptyset.$$

On peut alors associer à chaque formule Φ et vecteur \vec{X} de variables, le langage de ses modèles :

$$\text{L}(\Phi, \vec{X}) := \{t \in \mathbb{T}(\{0, 1\}^n \times A) \mid (\text{pr}_{n+1} \circ t, \nu_t) \models \Phi\}$$

Exemple 7.2.3 Prenons $\Phi := X \subseteq Y$, $n := 2$, $\vec{X} := (X, Y)$, $A := \{a, b, c\}$ et considérons les deux arbres t, t' de $\mathbb{T}(A)$:

u	ε	g	d	gg	gd
$t(u)$	$(0, 0, a)$	$(1, 1, b)$	$(0, 1, a)$	$(0, 1, b)$	$(1, 1, c)$
$t'(u)$	$(0, 0, a)$	$(1, 0, b)$	$(0, 1, a)$	$(0, 1, b)$	$(0, 0, c)$

et $\forall v \in D^* \setminus \{\varepsilon, g, d, gg, gd\}$, $t(v) := t'(v) := (0, 0, a)$.

On vérifie que $t \models \Phi$. Par contre, $t'(g) = (1, 0, b)$, donc $g \in \nu_t(X)$, $g \notin \nu_{t'}(X)$ ce qui montre que $w \not\models \Phi$. Par conséquent $t \in \text{L}(\Phi, \vec{X})$ et $t' \notin \text{L}(\Phi, \vec{X})$.

Lemme 7.2.4 Pour toute formule MSO2 Φ (sur $\mathcal{S}_{A,2}$) et tout vecteur \vec{X} contenant les variables de Φ , le langage $\text{L}(\Phi, \vec{X})$ est reconnaissable.

Preuve : On prouve ce lemme par induction structurelle sur Φ .

- $\Phi = P_a(X)$ et $\vec{X} = (X, X_2, \dots, X_n)$.

Considérons l'application $\text{pr}_{1,n+1} : (\{0, 1\}^n \times A)^* \rightarrow (\{0, 1\}^2)^*$ définie par $h(b_1, b_2, \dots, b_n, a) = (b_1, a)$. On a

$$\text{L}(\Phi, \vec{X}) = \hat{h}^{-1}(\mathbb{T}(\{(1, a)\} \cup \{(0, b) \mid b \in A\}))$$

qui est bien reconnaissable (car les langages reconnaissables sont clos par homomorphisme inverse).

- $\Phi = X \subseteq Y$ et $\vec{X} = (X, Y, X_3, \dots, X_n)$.

Considérons l'application $h : (\{0, 1\}^n \times A)^* \rightarrow (\{0, 1\}^2)^*$ définie par $h(b_1, b_2, \dots, b_n, a) = (b_1, b_2)$. On a

$$\text{L}(\Phi, \vec{X}) = \hat{h}^{-1}(\mathbb{T}(\{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\}))$$

qui est bien reconnaissable (car les langages reconnaissables sont clos par homomorphisme inverse).

- $\Phi = S_f(X, Y)$ et $\vec{X} = (X, Y, X_3, \dots, X_n)$.
On notera que la formule $S_f(X, Y)$ est vraie pour la valuation ν ssi

$$\nu(X) = \emptyset \text{ ou } \nu(Y) = \emptyset \text{ ou } \exists u \in D^*, (\nu(X) = \{u\} \text{ et } \nu(y) = \{u \cdot f\}). \quad (7.3)$$

Le langage L_f correspondant au troisième cas de figure dans (7.3) est reconnu par l'automate fini non-déterministe $\mathbb{A}_f := \langle D, A, Q, q_I, \Omega, \delta \rangle$ défini par

$$D := \{g, d\}, \quad A := \{0, 1\}^2, \quad Q := \{q_I, q_{0,0}, q_{0,1}, q_{1,0}, r\},$$

$$\delta(q_I, (0, 0)) := \{(q_I, g), (q_I, d)\}, \quad \delta(q_I, (1, 0)) := \{(q_{0,1}, f), (q_{0,0}, f')\} \text{ où } D = \{f, f'\}, \quad \delta(q_{0,1}, (0, 1)) :=$$

$$\forall q \in Q, \Omega(q) = 0.$$

Notons $\text{pr}_{1,2}$ l'application h définie à l'item précédent.

Notons $\text{pr}_1, \text{pr}_2 : (\{0, 1\}^n \times A)^* \rightarrow \{0, 1\}$ les applications définies par :

$$\text{pr}_1(b_1, b_2, \dots, b_n, a) = b_1, \quad \text{pr}_2(b_1, b_2, \dots, b_n, a) = b_2.$$

En traduisant (7.3) sous forme de langages on obtient :

$$L(\Phi, \vec{X}) = \text{pr}_1^{-1}(\mathbb{T}(\{0\})) \cup \text{pr}_2^{-1}(\mathbb{T}(\{0\})) \cup L_f.$$

qui est bien reconnaissable, car les langages reconnaissables sont clos par union et par homomorphisme inverse.

- $\Phi = \neg\Psi$

$$L(\Phi, \vec{X}) = (\{0, 1\}^n \times A)^* - L(\Psi, \vec{X}),$$

qui est bien reconnaissable car, par hypothèse de récurrence, $L(\Psi, \vec{X})$ est reconnaissable et les langages reconnaissables sont clos par complémentaire.

- $\Phi = \Psi_1 \vee \Psi_2$

$$L(\Phi, \vec{X}) = L(\Psi_1, \vec{X}) \cup L(\Psi_2, \vec{X}).$$

Comme Ψ_1, Ψ_2 sont des sous-formules de Φ , \vec{X} contient bien toutes les variables de Ψ_1 (resp. Ψ_2) et, par hypothèse de récurrence, les langages $L(\Psi_i, \vec{X})$ sont reconnaissables. La formule ci-dessus entraîne alors que $L(\Phi, \vec{X})$ est reconnaissable, car les langages reconnaissables sont clos par union.

- $\Phi = \exists X \cdot \Psi$ et $\vec{X} = (X, X_2, \dots, X_n)$

Considérons l'homomorphisme $h : (\{0, 1\}^n \times A)^* \rightarrow (\{0, 1\}^{n-1} \times A)^*$ défini par $h(b_1, b_2, \dots, b_n, a) = (b_2, \dots, b_n, a)$.

$$L(\Phi, \vec{X}) = \hat{h}^{-1}(\hat{h}(L(\Psi, \vec{X}))),$$

donc $L(\Phi, \vec{X})$ est reconnaissable, car les langages reconnaissables sont clos par homomorphismes directs et inverses.

□

Achevons la partie 2 : Soit Φ une formule close. Soit $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur de variables contenant l'ensemble des variables de Φ . On a établi plus haut que $L(\Phi, \vec{X})$ est reconnaissable. Comme Φ est close, pour tout arbre $t \in \mathbb{T}(A)$, $t \models \Phi$ si et seulement si il existe une valuation ν

telle que $(t, \nu) \models \Phi$ si et seulement si $\exists t' \in \mathbb{T}(\{0, 1\}^n \times A) \mid (\text{pr}_{n+1}(t'), \nu_{t'}) \models \Phi$ et $\text{pr}_{n+1}(t') = t$.
Donc

$$L(\Phi) = \text{pr}_{n+1}(L(\Phi, \vec{X})),$$

et comme les langages reconnaissables sont clos par homomorphisme, $L(\Phi)$ est reconnaissable.

Preuve du théorème 7.2.1 :

la partie 1 montre que tout reconnaissable de mots est définissable en logique MSO et la partie 2 montre que tout ensemble de mots définissable en logique MSO est reconnaissable.

□

7.3 Théories du second ordre monadique

7.3.1 MSO du monoïde libre

On s'intéresse à la structure

$$\mathcal{M}(D) := \langle D^*, (S_f)_{f \in D} \rangle,$$

pour un alphabet D fini. On considère le problème de décision suivant :

Instance : une formule MSO Φ sur la signature $\langle (S_f)_{f \in D} \rangle$

Question : cette formule est-elle valide dans la structure $\mathcal{M}(D)$?

Théorème 7.3.1 (Rabin 1971) *Soit D un ensemble fini. La logique MSO de la structure $\langle D^*, (S_f)_{f \in D} \rangle$ est décidable.*

On remarque que la signature $\mathcal{S}_D := \langle (S_f)_{f \in D} \rangle$ peut être augmentée en la signature $\mathcal{S}_{D,A}$ avec $A = \{a\}$. La structure $\mathcal{M}(D)$ est isomorphe à l'unique arbre de $\mathbb{T}_D(\{a\})$.

Preuve : On se place dans le cas où $D = \{g, d\}$. Soit Φ une formule MSO et \vec{X} le vecteur des variables qui apparaissent dans Φ . Nous avons prouvé que le langage associé $L(\Phi, \vec{X})$ est reconnu par un a.f.a. $\mathbb{A}_{\Phi, \vec{X}}$ (sur $D, \{a\}$). Chaque étape de la preuve par induction de ce fait (L.7.2.4) consiste à invoquer une propriété de clôture des langages reconnaissables et peut être tournée en une *construction effective* d'un a.f.a. à partir des a.f.a. fournis par les hypothèses d'induction. La preuve peut donc être convertie en un algorithme de construction d'un a.f.a. $\mathbb{A}_{\Phi, \vec{X}}$ à partir de la formule Φ et du vecteur \vec{X} .

L'algorithme suivant décide la validité de Φ :

- calculer un a.f.a. \mathbb{A} reconnaissant le langage $L(\Phi, \vec{X})$
- tester si $L(\mathbb{A}) = \emptyset$?
- si oui alors Φ n'est pas valide, sinon, Φ est valide. □

Théorème 7.3.2 *Soit D un ensemble fini et $\Phi(X_1, \dots, X_n)$ une formule MSO sur la signature \mathcal{S}_D . Si Φ est satisfaisable dans le monoïde libre, alors elle admet un modèle ν régulier i.e. tel que les langages $(\nu(X_1), \dots, \nu(X_n))$ sont réguliers.*

Rappelons qu'un langage $L \subseteq D^*$ est *régulier* s'il est décrit par une expression régulière. Par le théorème de Kleene, cette propriété est équivalente à : L est reconnu par un automate fini.

Preuve : D'après le théorème 6.4.2, si $\mathbb{A}_{\Phi, \vec{X}}$ reconnaît au moins un arbre, alors il reconnaît au moins un arbre régulier t_r . Posant $\nu(X_i) := \{u \in D^* \mid \text{pr}_i(t_r(u)) = 1\}$ on obtient une valuation

régulière qui satisfait Φ . \square

7.3.2 Transferts de décidabilité

Interprétation sémantique

Let $\mathcal{S} = \{r_1, \dots, r_n\}$ (resp. $\mathcal{S}' = \{r'_1, \dots, r'_m\}$) des signatures relationnelles. Soient \mathcal{M} (resp. \mathcal{M}') une structure sur la signature \mathcal{S} (resp. \mathcal{S}'). On note \mathcal{L} (respectivement \mathcal{L}') l'ensemble des formules MSO sur \mathcal{S} (respectivement \mathcal{S}'). On appelle *MSO interprétation* de \mathcal{M} dans \mathcal{M}' toute application injective $\varphi : M \rightarrow M'$ telle que :

— il existe une formule MSO $\Phi'(X) \in \mathcal{L}'$ satisfaisant pour tout sous ensemble $X_{\mathcal{M}'} \subseteq M'$:

$$X_{\mathcal{M}'} = \varphi(M) \Leftrightarrow \mathcal{M}' \models \Phi'(X_{\mathcal{M}'})$$

— pour tout $r_i \in \text{Sig}$, il existe une formule $\Phi'_i(x_1, \dots, x_{\rho_i}, X_1, \dots, X_{\tau_i})$ satisfaisant pour toute valuation $val : \text{Var} \rightarrow M \cup \mathcal{P}(M)$:

$$(\mathcal{M}, val) \models r_i(x_1, \dots, x_{\rho_i}, X_1, \dots, X_{\tau_i}) \Leftrightarrow (\mathcal{M}', \varphi \circ val) \models \Phi'_i(x_1, \dots, x_{\rho_i}, X_1, \dots, X_{\tau_i})$$

Quand $M \subseteq M'$ et φ est l'injection naturelle de M dans M' , on dit que \mathcal{M} est *MSO-définissable* dans \mathcal{M}' .

Théorème 7.3.3 *S'il existe une MSO interprétation d'une structure \mathcal{M} dans une structure \mathcal{M}' , alors il existe une fonction calculable de \mathcal{L} dans \mathcal{L}' qui, à toute formule $\Phi \in \mathcal{L}$, associe une formule $\hat{\Phi} \in \mathcal{L}'$ telle que :*

$$\mathcal{M} \models \Phi \Leftrightarrow \mathcal{M}' \models \hat{\Phi}$$

En particulier, si \mathcal{M}' a une théorie MSO décidable, alors \mathcal{M} aussi.

Produit direct

Étant donnés deux ensembles S, S' on note pr , (resp. pr') la projection de $S \times S'$ sur sa première (resp. seconde) composante S (resp. S').

Définition 7.3.4 *Le produit direct $\mathcal{M} \times \mathcal{M}'$ est la structure sur la signature $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}'$ définie par :*

pour tous $i \in [1, n], j \in [1, m]$

1- $D_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}'} = D_{\mathcal{M}} \times D_{\mathcal{M}'}$

2- $\forall (\bar{x}, \bar{X}) \in D_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}'}^{\rho_i} \times (\mathcal{P}(D_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}'}))^{\tau_i}, (\bar{x}, \bar{X}) \in r_{i, \mathcal{M} \times \mathcal{M}'} \Leftrightarrow \text{pr}(\bar{x}, \bar{X}) \in r_{i, \mathcal{M}}$

3- $\forall (\bar{x}, \bar{X}) \in D_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}'}^{\rho'_j} \times (\mathcal{P}(D_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}'}))^{\tau'_j}, (\bar{x}, \bar{X}) \in r'_{j, \mathcal{M} \times \mathcal{M}'} \Leftrightarrow \text{pr}'(\bar{x}, \bar{X}) \in r'_{j, \mathcal{M}'}$

Le lemme suivant est évident (mais utile)

Lemme 7.3.5 *Si \mathcal{M} a une théorie MSO décidable et \mathcal{M}' est finie, alors $\mathcal{M} \times \mathcal{M}'$ a une théorie MSO décidable.*

Dépliage de graphe

Application : les mots de mots.

Structures en arbre

1- ([Stupp 1975])

2- Structure en arbre avec clone ([Muchnik-Semenov 1984],[Walukiewicz 1996]).

Chapitre 8

Annexe

On trouvera ici, rédigés sous forme d'exercices :

- les bases de l'étude des jeux de parité
- une exemple de jeu, de longueur ω , non-déterminé.

Points fixes, attracteurs, pièges

Exercice A.1 Points fixes

Soit $f : \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{P}(V)$ une application croissante.

1- Montrer qu'il existe un plus petit sous-point fixe de f i.e. un plus petit $x \in \mathcal{P}(V)$ tel que

$$x \geq f(x).$$

2- Soit x_0 le plus petit sous-point fixe de f . Montrer que

$$f(x_0) = x_0$$

3- Montrer que x_0 est le plus petit point fixe de f .

Par le théorème de Zermelo, l'ensemble $E := 2^{2^{\text{Card}(V)}}$ admet un bon-ordre \leq_E (nous omettrons l'indice E lorsque le contexte le permet).

Pour tout $e \in E$, si e n'est pas le maximum de (E, \leq_E) , on note

$$e + 1 := \min\{e \in E \mid e_0 < e\}.$$

Pour tout $x \in \mathcal{P}(V)$ et tout $e \in E$, on définit $f^e(x)$ comme suit :

- si $\exists e' \in E, e = e' + 1$ alors

$$f^e(x) = f(f^{e'}(x))$$

- sinon

$$f^e(x) = \bigcup_{e' < e} f^{e'}(x)$$

4- Montrer que la suite $(f^e(\emptyset))_{e \in E}$ est croissante.

Indication :

- prouver, par induction bien-fondée sur α que $f^\alpha(\emptyset) \subseteq f^{\alpha+1}(\emptyset)$

- prouver, par induction bien-fondée sur β que, $\alpha \leq \beta \Rightarrow f^\alpha(\emptyset) \subseteq f^\beta(\emptyset)$.

5- Montrer qu'il existe un plus petit $e_0 \in E$ tel que

$$f^{e_0}(\emptyset) = f^{e_0+1}(\emptyset)$$

On pose $x_0 := f^{e_0}(\emptyset)$.

6- Montrer que x_0 est le plus petit point fixe de f .

Exercice A.2 Dualité

Soit $f : \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{P}(V)$ une application croissante. On note $x \mapsto \bar{x}$ l'application "complément" i.e. $\bar{x} := V \setminus x$.

Définissons l'application *duale* de f comme $g : \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{P}(V)$ telle que :

$$g(x) = \overline{f(\bar{x})}$$

1- Montrer que g est croissante.

2- Montrer que si x_0 est le plus petit point fixe de f , alors \bar{x}_0 est le plus grand point fixe de g .

3- Montrer que si x_1 est le plus grand point fixe de f , alors \bar{x}_1 est le plus petit point fixe de g .

Exercice A.3 Attracteurs et jeu d'accessibilité

Soit $\mathcal{G} = \langle V_0, V_1, E, W \rangle$ un jeu sur un graphe orienté. Pour tout numéro de joueur $\sigma \in \{0, 1\}$, on définit l'application $\mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{P}(V)$:

$$pre_\sigma(\mathcal{G}, Y) := \{v \in V_\sigma \mid vE \cap Y \neq \emptyset\} \cup \{v \in V_{\bar{\sigma}} \mid vE \subseteq Y\}.$$

1- Vérifier que cette application est croissante (pour l'inclusion)

2- Montrer que pour tout $Y \in \mathcal{P}(V)$, il existe un plus petit ensemble U tel que

$$Y \subseteq U \text{ et } pre_\sigma(\mathcal{G}, U) \subseteq U.$$

On note cet ensemble $Attr_\sigma(\mathcal{G}, Y)$ (l'attracteur de Y pour le joueur σ).

3- Montrer que $Attr_\sigma(\mathcal{G}, Y)$ est le plus petit point fixe de l'application

$$f : X \mapsto Y \cup pre_\sigma(X)$$

4- En utilisant la q.6 de l'exercice A.2, écrire une expression de $Attr_\sigma(\mathcal{G}, Y)$ à partir des applications itérées de f sur le point initial \emptyset .

5- On définit l'ensemble W comme :

$$W := \{\pi \mid \pi \text{ visite l'ensemble } A\}.$$

5.1 Donner une stratégie sans-mémoire du joueur σ qui est gagnante sur $Attr_\sigma(\mathcal{G}, A)$.

5.2 Montrer que $Attr_\sigma(\mathcal{G}, A)$ est l'ensemble des positions gagnantes de σ .

Exercice A.4 Attracteurs et pièges

Soit $\mathcal{G} = \langle V_0, V_1, E, W \rangle$ un jeu sur un graphe orienté. On dit qu'une partie $Y \in \mathcal{P}(V)$ est :

- un σ -attracteur ssi

$$Y \supseteq pre_\sigma(Y)$$

- est un σ -piège ssi

$$Y \subseteq pre_{\bar{\sigma}}(Y)$$

1- Montrer que toute intersection de σ -attracteurs est un σ -attracteur.

2- Montrer que toute union de σ -pièges est un σ -piège.

3- Montrer que les applications $X \mapsto pre_\sigma(\mathcal{G}, X)$ et $X \mapsto pre_{\bar{\sigma}}(\mathcal{G}, X)$ sont duales (l'une de l'autre).

4- Montrer que, pour tout $Y \in \mathcal{P}(V)$, Y est un σ -attracteur ssi $V \setminus Y$ est un σ -piège.

5- Montrer que pour tout $Y \in \mathcal{P}(V)$, il existe un plus grand σ -piège inclus dans Y ; on note cet ensemble $Piege_\sigma(\mathcal{G}, Y)$ (le piège de Y pour le joueur σ).

6- Montrer que

$$V \setminus Attr_\sigma(\mathcal{G}, Y) = Piege_\sigma(\mathcal{G}, V \setminus Y).$$

7- Montrer que, si Y est un σ -piège, alors $Attr_{\bar{\sigma}}(\mathcal{G}, Y)$ est un σ -piège.

Aide : montrer que, dans ce cas, $Attr_{\bar{\sigma}}(\mathcal{G}, Y)$ est obtenu par itération de $pre_{\bar{\sigma}}(\mathcal{G}, *)$ à partir de Y .

Un jeu non-déterminé

DM- du 15/11/16

Un jeu (à deux joueurs) est *déterminé* si l'un (exactement) des deux joueurs possède une stratégie gagnante. On examine divers jeux du point de vue de leur détermination. Les exercices sont dépendants et doivent être résolus dans l'ordre numérique.

Exercice 1 (6 pts) Jeux finitaires

Soit un graphe orienté $\mathcal{A} = (V, E)$, biparti, de partition $V = V_0 \cup V_1$, qui est une arborescence de racine $r \in V_0$. Le graphe \mathcal{A} est l'*arène* du jeu, V_0 (resp. V_1) est l'ensemble des positions du joueur J0 (resp. J1). Une *partie* est une branche de cet arbre i.e.

$$\pi = v_1, v_2, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n \quad (8.1)$$

avec $v_1 = r$, v_n est une feuille, et pour tout $i \in [1, n-1]$, $(v_i, v_{i+1}) \in E$. On fixe une partition des feuilles de \mathcal{A} : $F = F_1 \cup F_2$. La partie π est *gagnée* par J0 (resp. J1) ssi $v_n \in F_0$ (resp. $v_n \in F_1$).

On appelle *stratégie* de J0 (resp. J1) une fonction $\sigma : V_0 \rightarrow V_1$ (resp. $\tau : V_1 \rightarrow V_0$) telle que : $\text{Dom}(\sigma) = \{v \in V_0, \exists v_1 \in V_1, (v, v_1) \in E\}$ (analogue pour τ).

Une partie π respecte la stratégie σ (resp. τ) si, pour tout i ,

$$\sigma(v_{2i+1}) = v_{2i+2} \quad (\text{resp.} \quad \tau(v_{2i}) = v_{2i+1}).$$

Une stratégie σ (resp. τ) de J0 (resp. de J1) est *gagnante* ssi toute partie respectant σ (resp. τ) est gagnée par J0 (resp. par J1).

1- Montrer que, si \mathcal{A} est finie, alors, le jeu associé à \mathcal{A} est déterminé.

2- Montrer que, si \mathcal{A} est de profondeur finie (i.e. $\exists L \geq 0$ tel que toute partie est de longueur $\leq L$) alors, le jeu associé à \mathcal{A} est déterminé.

3- Supposons que toute *partie* π du jeu \mathcal{A} est *finie*. Reprendre la question 2 avec cette hypothèse plus faible.

Exercice 2 (14 pts) Jeux infinitaires

Une famille de jeux infinis On considère un jeu à deux joueurs J0, J1. Chaque joueur à son tour joue un mot $w \in \{0, 1\}^+$ (on note w_n le mot joué au n -ième tour du jeu). Le joueur J0 commence. Le joueur J0 (resp. J1) n'a le droit de produire que des mots de $\{0\}^+$ (resp. $\{1\}^+$). Le jeu dure indéfiniment ; une partie

$$\pi = w_1, w_2 \dots w_n \dots$$

produit le mot infini :

$$w_\infty = w_1 \cdot w_2 \cdot \dots \cdot w_n \cdot \dots$$

L'ensemble des mots infinis de longueur ω est partitionné en deux sous-ensembles

$$\{0, 1\}^\omega = W_0 \cup W_1 \quad \text{où} \quad W_0 \cap W_1 = \emptyset.$$

La partie π est gagnée par J0 (resp. J1) ssi $w_\infty \in W_0$ (resp. $w_\infty \in W_1$).

Nous appellerons *jeu de Blackwell sur les entiers* un jeu de cette forme.

1- Dans chacun des cas suivants, analyser quel joueur a une stratégie gagnante :

1.1 $W_0 = \{u \in \{0, 1\}^\omega \mid u^{-1}(0) \text{ est fini} \}$

1.2 On fixe un ensemble $F \subseteq \mathbb{N}$, puis on définit $W_0 = \{u \in \{0, 1\}^\omega \mid u^{-1}(0) = F\}$.

1.3 On fixe un ensemble $F \subseteq \mathbb{N}$, puis on définit $W_0 = \{u \in \{0,1\}^\omega \mid u^{-1}(0) \subseteq F\}$.

2- On suppose qu'il existe des ensembles $B_0, B_1 \subseteq \{0,1\}^*$ tels que

$$W_0 = \bigcup_{v \in B_0} v \cdot \{0,1\}^\omega, \quad W_1 = \bigcup_{v \in B_1} v \cdot \{0,1\}^\omega.$$

Montrer que, sous cette hypothèse, le jeu est déterminé.

3- On note $L \subseteq \{0,1\}^\omega$ l'ensemble des mots qui dénotent des parties du jeu.

$$L := 0\{0,1\}^\omega \setminus (\{0,1\}^* \{0^\omega, 1^\omega\})$$

On suppose qu'il existe des ensembles $B_0, B_1 \subseteq \{0,1\}^*$ tels que

$$W_0 \cap L = \left(\bigcup_{v \in B_0} v \cdot \{0,1\}^\omega \right) \cap L, \quad W_1 \cap L = \left(\bigcup_{v \in B_1} v \cdot \{0,1\}^\omega \right) \cap L.$$

Montrer que, sous cette hypothèse, le jeu est déterminé.

4*- Lorsque l'hypothèse de la qu. 2 (resp. 3) est remplie, peut-on toujours faire en sorte qu'elle le soit par des ensembles B_0, B_1 finis?

Aide : $\{0,1\}^\omega$ muni de la topologie produit est *compact*.

Filtres Soit S un ensemble. On appelle *filtre* sur S , tout ensemble $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(S)$, vérifiant les trois propriétés :

clôture vers le haut :

$$\forall F, G \in \mathcal{P}(S), (F \in \mathcal{F} \text{ et } F \subseteq G) \Rightarrow G \in \mathcal{F}. \quad (8.2)$$

clôture par intersection :

$$\forall F, G \in \mathcal{P}(S), (F \in \mathcal{F} \text{ et } G \in \mathcal{F}) \Rightarrow F \cap G \in \mathcal{F}. \quad (8.3)$$

non-vacuité de ses membres :

$$\emptyset \notin \mathcal{F}. \quad (8.4)$$

5- Montrer que l'ensemble des parties co-finies de S

$$\mathcal{F}_c := \{F \subseteq S \mid S \setminus F \text{ est fini}\}.$$

est un filtre.

6- Vérifier que l'inclusion est un ordre *inductif* sur l'ensemble des filtres sur S .

On appelle *ultra-filtre* sur S , tout filtre sur S qui est maximal (pour l'inclusion).

7- Montrer que tout filtre est majoré par un ultra-filtre.

Aide : utiliser le lemme de Zorn.

8- Soit \mathcal{F} un ultra-filtre sur S .

8.1 Montrer que, pour tout $F \subseteq S$,

$$F \in \mathcal{F} \text{ ou } S \setminus F \in \mathcal{F}.$$

8.2 Montrer que, réciproquement, si un filtre \mathcal{F} vérifie la propriété de la qu. 8.1, alors c'est un ultra-filtre.

Indétermination On fixe dans cette partie $S := \mathbb{N}$ et on choisit un ultra-filtre \mathcal{F} qui majore le filtre \mathcal{F}_c (sur \mathbb{N}) [il en existe au moins un selon la question 7].

Pour deux parties F, G de \mathbb{N} la notation $F =_p G$ se lit “ F est presque égal à G ” et signifie :

$$\text{Card}(F \Delta G) < \infty$$

où Δ est l’opération de différence symétrique sur les ensembles.

9- Soient $F, G \subseteq \mathbb{N}$ telles que $F =_p G$. Montrer que $F \in \mathcal{F} \Leftrightarrow G \in \mathcal{F}$.

On considère le jeu de Blackwell sur les entiers défini par

$$W_0 := \{u \in \{0, 1\}^\omega \mid u^{-1}(0) \in \mathcal{F}\}, \quad W_1 := \{0, 1\}^\omega \setminus W_0. \quad (8.5)$$

10- Montrer que $W_1 = \{u \in \{0, 1\}^\omega \mid u^{-1}(1) \in \mathcal{F}\}$.

On note les positions des joueurs :

$$V_0 := \{\varepsilon\} \cup 0\{0, 1\}^*1, \quad V_1 := \{0\} \cup 0\{0, 1\}^*0, \quad V := V_0 \cup V_1 = \{\varepsilon\} \cup 0\{0, 1\}^*$$

On veut montrer que J0 n’a pas de stratégie gagnante. Pour cela, on fait l’hypothèse (H0) :

$$\sigma_0 \text{ est une stratégie gagnante de J0 .}$$

On construit maintenant une stratégie σ_1 de J1, qui est aussi gagnante et on en conclura que (H0) est fausse.

Étant donnée une stratégie $\sigma_i : V_i \rightarrow V_{1-i}$, notons $e_i : V_i \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ le choix d’entier fait par le joueur i dans la position $v_i \in V_i$:

$$\sigma_i(v_i) = v_i \cdot i^{e_i(v_i)}.$$

Considérons la stratégie σ_1 (“par imitation de σ_0 ”) de J1 :

- premier coup : $e_1(0^n) := e_0(0^n 1) + 1$

- coups suivants :

$$\begin{aligned} \text{— si } v_1 = 0^{n_1} 1^{n_2} \dots 0^{n_{2 \cdot k+1}} \text{ (avec } n_2 \geq 2, k \geq 1) \\ \text{alors } e_1(v_1) := e_0(0^{n_1} 10^{n_2-1} \dots 1^{n_{2 \cdot k+1}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{— si } v_1 = 0^{n_1} 1^{n_2} \dots 0^{n_{2 \cdot k+1}} \text{ (avec } n_2 = 1, k \geq 1) \\ \text{alors } e_1(v_1) := 1. \end{aligned}$$

Étant donnée une partie π jouée selon la stratégie σ_1 :

$$\pi = 0^{n_1} \cdot 1^{n_2} \dots 0^{n_{2 \cdot k+1}} \cdot 1^{n_{2 \cdot k+2}} \dots$$

où nécessairement $n_2 = e_0(0^{n_1} 1) + 1 \geq 2$, posons

$$\pi' = 0^{n_1} \cdot 1 \cdot 0^{n_2-1} \dots 1^{n_{2 \cdot k+1}} \cdot 0^{n_{2 \cdot k+2}} \dots$$

11- Montrer que π' est une partie qui respecte σ_0 et que $\pi^{-1}(1) =_p \pi'^{-1}(0)$.

12- Montrer que la stratégie σ_1 est gagnante pour J1. En conclure que (H0) est fausse.

On fait maintenant l'hypothèse (H1) :

s_1 est une stratégie gagnante de J1 .

Construisons une stratégie s_0 de J0, qui est gagnante.

- premier coup : $e_0(\varepsilon) := e_1(0) + 1$

- coups suivants :

— si $v_0 = 0^{n_1}1^{n_2} \dots 1^{n_{2 \cdot k}}$ (avec $n_1 \geq 2, k \geq 1$)

alors $e_0(v_0) := e_1(01^{n_1-1}0^{n_2} \dots 0^{n_{2 \cdot k}})$

— si $v_0 = 0^{n_1}1^{n_2} \dots 1^{n_{2 \cdot k}}$ (avec $n_1 = 1, k \geq 1$)

alors $e_0(v_0) := 1$.

13- Montrer que la stratégie s_0 est gagnante pour J0. En conclure que (H1) est fausse.

14- Montrer que le jeu défini par (8.5) est indéterminé.

Chapitre 9

References

Ouvrages destinés au grand public ("vulgarisation scientifique") : [Oaa99]
Ouvrages d'enseignement de la théorie des jeux : [ZL04, Mor94],
Sources d'inspiration du cours : [Jen67, Ren01, TWa02, Son08]

Bibliographie

- [Jen67] Niels Erik Jensen. An introduction to bernoullian utility theory : I. utility functions. *The Swedish Journal of Economics*, 69, No. 3 :163–183, 1967.
- [Mor94] P. Morris. *Introduction to Game Theory*. Springer-Verlag, 1994.
- [Oaa99] A. Orléan and alii (25 auteurs). Les mathématiques sociales. *Pour la science*, Dossier hors-série, Juillet :1–129, 1999.
- [Ren01] P.J. Reny. Arrow’s theorem and the Gibbard-Satterthwaite theorem : a unified approach. *Economics Letters*, 70 :99–105, 2001.
- [Son08] M. Sondjaja. Sperner’s lemma implies Kakutani’s fixed point theorem. *Master thesis, Harvey Mudd College*, pages 1–54, 2008.
- [TWa02] Wolfgang Thomas, Thomas Wilke, and alii. *Automata, logics, and infinite games : a guide to current research*, volume 2500. Springer Science & Business Media, 2002.
- [ZL04] S. Zamir and R. Laraki. *Cours de théorie des jeux*. Disponible sur la toile, 2004. Polycopié de Cours de l’École Polytechnique.