

## Jeux, Synthèse et Contrôle

Jeux extensifs, jeux stratégiques

### Jeux extensifs, à information complète

#### Exercice 2.1 Th. de Von Neumann

Soit un graphe orienté  $\mathcal{A} = (V, E)$ , biparti, de partition  $V = V_1 \cup V_2$ , qui est une arborescence de racine  $r \in V_1$ . Le graphe  $\mathcal{A}$  est l'arène du jeu,  $V_1$  (resp.  $V_2$ ) est l'ensemble des positions du joueur J1 (resp. J2). Une *partie* est une branche de cet arbre i.e.

$$\pi = v_1, v_2, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n \quad (1)$$

avec  $v_1 = r$ ,  $v_n$  est une feuille, et pour tout  $i \in [1, n-1]$ ,  $(v_i, v_{i+1}) \in E$ . On fixe une partition des feuilles de  $\mathcal{A}$  :  $F = F_1 \cup F_2$ . La partie  $\pi$  est *gagnée* par J1 (resp. J2) ssi  $v_n \in F_1$  (resp.  $v_n \in F_2$ ).

On appelle *stratégie* de J1 (resp. J2) une fonction  $\sigma : V_1 \rightarrow V_2$  (resp.  $\tau : V_2 \rightarrow V_1$ ) telle que :  $\text{Dom}(\sigma) = \{v \in V_1, \exists v_2 \in V_2, (v, v_2) \in E\}$  (analogue pour  $\tau$ ).

Une partie  $\pi$  respecte la stratégie  $\sigma$  (resp.  $\tau$ ) si, pour tout  $i$ ,

$$\sigma(v_{2i+1}) = v_{2i+2} \quad (\text{resp.} \quad \tau(v_{2i}) = v_{2i+1}).$$

Une stratégie  $\sigma$  (resp.  $\tau$ ) de J1 (resp. de J2) est *gagnante* ssi toute partie respectant  $\sigma$  (resp.  $\tau$ ) est gagnée par J1 (resp. par J2).

1- Montrer que, si  $\mathcal{A}$  est finie, alors, soit J1 a une stratégie gagnante, soit J2 a une stratégie gagnante.

On suppose maintenant que l'ensemble  $F$  des feuilles de  $\mathcal{A}$  est partitionné en 3 parties :

$$F = F_0 \cup F_1 \cup F_2.$$

Les parties qui se terminent en  $F_0$  (resp.  $F_1, F_2$ ) sont *nulles* (resp. gagnées par J1, gagnées par J2).

2- Quelles sont maintenant les trois alternatives concernant les joueurs ?

3- Supposons que toute partie du jeu  $\mathcal{A}$  est *finie*. Reprendre les questions 1,2 avec cette hypothèse plus faible.

**Exercice 2.2** Jeu du chocolat, fini.

On considère une tablette de chocolat  $m \times n$ . Il y a deux joueurs J1, J2. Chaque joueur, à son tour, choisit une case  $(i, j)$  dans ce qui reste de la tablette, et mange toutes les cases situées au Nord-est de  $(i, j)$  i.e. les  $(i', j') \mid i' \geq i \text{ et } j' \geq j$ . Le joueur qui mange  $(1, 1)$  a perdu.

C'est J1 qui commence à jouer.

1- Montrer que, soit J1 a une stratégie gagnante, soit J2 a une stratégie gagnante.

2- Montrer que, si J2 a une stratégie gagnante, alors J1 a une stratégie gagnante.

3- Quel joueur a une stratégie gagnante ?

4- Pouvez-vous décrire une stratégie gagnante de ce joueur ?

**Exercice 2.3** Jeu du chocolat, infini.

On considère une tablette de chocolat infinie  $\mathbb{N} \times 2$ . On adopte la même règle du jeu que dans l'exercice précédent.

1- Qui a une stratégie gagnante ?

On considère une tablette de chocolat infinie  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . On adopte la même règle du jeu que dans l'exercice précédent.

2- Qui a une stratégie gagnante ?

**Exercice 2.4** Arène finie : jeu d'accessibilité, jeu de Büchi.

On choisit comme arène le *graphe* de la figure 1, et la partition  $V_1 = \{1, 4\}, V_2 = \{2, 3, 5\}$ .

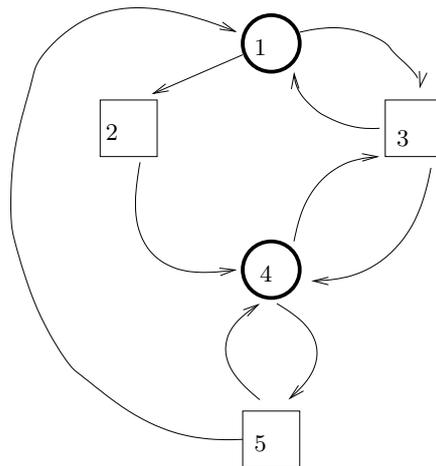


FIGURE 1 – Le graphe  $\mathcal{G}$ .

Une *partie* est un chemin dans ce graphe i.e. une suite (finie ou infinie)

$$\pi = v_1, v_2, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots \tag{2}$$

de sommets avec  $v_1 = r := 1$  et pour tout  $i \in \mathbb{N}, (v_i, v_{i+1}) \in E$ . On fixe une partition de l'ensemble  $\mathcal{C}$  des chemins partant de  $r : \mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ . La partie  $\pi$  est *gagnée* par J1 (resp. J2) ssi  $\pi \in \mathcal{C}_1$  (resp.  $\pi \in \mathcal{C}_2$ ).

1- On définit l'ensemble  $\mathcal{C}_1$  des parties gagnantes (pour J1), comme l'ensemble des parties qui passent par le sommet 5. Quel joueur a une stratégie gagnante ?

2- On conserve le graphe de la figure 1, mais on définit maintenant  $\mathcal{C}_1$  comme l'ensemble des parties qui passent *infiniment souvent* par le sommet 2.

Montrer que J2 a une stratégie gagnante.

**Exercice 2.5** Arène finie : jeu de parité

On choisit comme arène le *graphe* de la figure 2, et la partition  $V_1 = \{v_0, v_2, v_5, v_6\}, V_2 =$

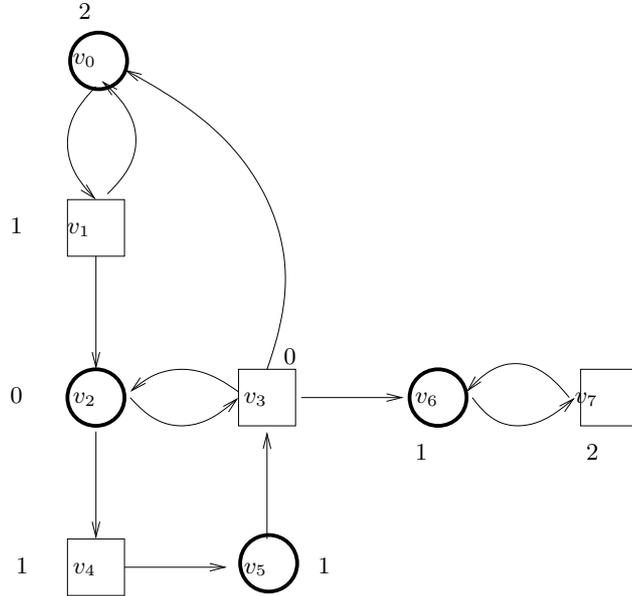


FIGURE 2 – Le graphe  $\mathcal{G}$ .

$\{v_1, v_3, v_4, v_7\}$ . On se donne un *coloriage* des sommets  $\chi : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$  (indiqué sur la figure). La partie  $\pi$  est gagnée par J1 ssi

$$\max\{c \in \{0, 1, 2\} \mid \pi \text{ passe infiniment souvent par la couleur } c\} \equiv 0 \pmod{2}$$

sinon, elle est gagnée par J2.

- 1- On fixe  $r := v_0$ . Quel joueur a une stratégie gagnante ?
- 2- Donner pour ce joueur une stratégie gagnante *sans mémoire*.

**Exercice 2.6** Poker

On étudie une version (très) simplifiée du Poker : deux joueurs A et B s'affrontent. Le jeu de cartes ne comporte que 3 cartes 1, 2, 3. A reçoit une carte, B reçoit une carte, la troisième carte reste cachée. L'arbre du jeu est représenté sur la figure 3. Les nombres indiqués sont les gains de J1 (J2 gagne l'opposé de J1 i.e. à chaque partie, la somme des gains de J1 et J2 est nulle). Un hasard externe produit la "donne"  $A_i/B_j$  : A reçoit la carte  $i$  et B la carte  $j$  ; ces 6 donnes sont équiprobables.

On analyse les stratégies possibles de A et B.

- 1- Montrer que les seuls comportements raisonnables de A, B consistent :

- si  $A_3/B_j$  : A monte
- si  $A_i/B_1$  : B passe
- si  $A_i/B_3$  : B monte
- si  $A_2/B_j$  : A monte (comparer les espérances de A selon qu'il passe ou qu'il monte).

- 2- Dans le cas  $A_1/B_j$ , A décide de monter (avec proba  $p$ ) ou de passer (proba  $1 - p$ ). Dans le cas  $A_i/B_2$ , B décide de monter (avec proba  $q$ ) ou de passer (proba  $1 - q$ ).

On appelle  $\sigma_p$  (resp.  $\tau_q$ ) ces stratégies de A (resp. B).

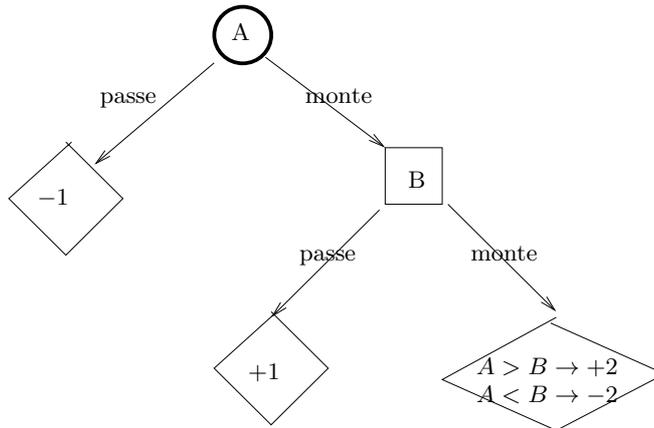


FIGURE 3 – Le poker à 3 cartes.

Calculer le gain moyen  $r(\sigma_p, \tau_q)$  de A, lorsque A joue  $\sigma_p$  et B joue  $\tau_q$ .

3- Montrer que ce jeu “a une valeur” i.e. qu’il existe un nombre  $v \in \mathbb{R}$  tel que

$$v = \max_{p \in [0,1]} \{ \min_{q \in [0,1]} \{ r(\sigma_p, \tau_q) \} \} = \min_{q \in [0,1]} \{ \max_{p \in [0,1]} \{ r(\sigma_p, \tau_q) \} \}.$$

Calculer  $v$ . Pour quelles valeurs  $(\bar{p}, \bar{q})$  a-t-on  $r(\sigma_{\bar{p}}, \tau_{\bar{q}}) = v$ ?

4- Montrer que  $(\bar{p}, \bar{q})$  est un “équilibre de Nash” (voir annexe).

5- Montrer que, si A joue une stratégie  $\sigma_p \neq \sigma_{\bar{p}}$ , alors B possède une stratégie  $\tau_q$  telle que  $r(\sigma_p, \tau_q) < v$ .

6- Montrer que, si B joue une stratégie  $\tau_q \neq \tau_{\bar{q}}$ , alors A possède une stratégie  $\sigma_p$  telle que  $r(\sigma_p, \tau_q) > v$ .

## Jeux matriciels

### Exercice 2.7 Pierre-ciseaux-feuille

On considère le jeu matriciel suivant.

	P	F	C
P	(0, 0)	(-1, +1)	(+1, -1)
F	(+1, -1)	(0, 0)	(-1, +1)
C	(-1, +1)	(+1, -1)	(0, 0)

1- Ce jeu a-t-il un équilibre de Nash ?

2- Vérifier qu’il est à somme nulle.

Désormais, on note  $r(\sigma, \tau)$  le gain de J1 sur la partie  $(\sigma, \tau)$ .

3- Ce jeu a-t-il une *valeur*? i.e. est-il vrai que

$$\max_{\sigma \in S_1} \{ \min_{\tau \in S_2} \{ r(\sigma, \tau) \} \} = \min_{\tau \in S_2} \{ \max_{\sigma \in S_1} \{ r(\sigma, \tau) \} \}?$$

### Exercice 2.8 Prisonnier

On considère le jeu matriciel (dilemme du prisonnier) suivant :

	A	nA
A	(1, 1)	(3, 0)
nA	(0, 3)	(2, 2)

- 1- Ce jeu a-t-il un équilibre de Nash ?
- 2- Ce jeu est-il à somme nulle ?
- 3- L'équilibre de Nash maximise-t-il la somme des gains des deux joueurs ?
- 4- Le couple de stratégies qui maximise la somme des gains est-il "stable" ? (discuter cette notion).

**Exercice 2.9** Plusieurs équilibres

On considère le jeu matriciel suivant.

	L	M	R
T	(1, 2)	(2, 3)	(0, 3)
M	(2, 2)	(2, 1)	(3, 2)
B	(2, 1)	(0, 0)	(1, 0)

Ce jeu a-t-il un équilibre de Nash ? plusieurs équilibres de Nash ?

**Exercice 2.10** Réduction d'un jeu extensif à un jeu matriciel

Expliquer comment un jeu extensif quelconque, avec intervention d'un hasard externe (comme le jeu de Poker) peut être décrit comme un jeu matriciel.

Idées :

- lignes = stratégies du joueur 1
- colonnes = stratégies du joueur 2
- $\vec{r}(\sigma, \tau)$  = le couple des espérances des joueurs J1, J2, lorsqu'ils jouent ce couple de stratégies.

Réduire le jeu, décrit par l'arbre suivant (figure 4) :

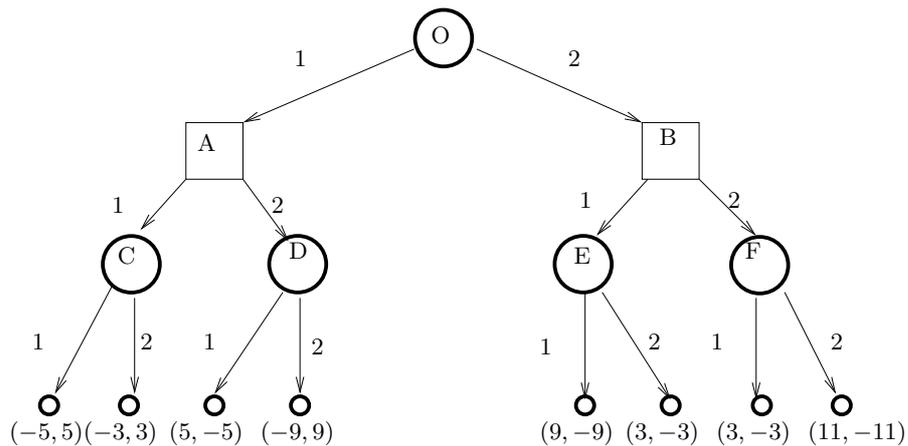


FIGURE 4 – L'arbre du jeu.

# ANNEXE

Nous décrivons ici les notions-clés.

Stratégie :

— Cas d'un arbre :

Pour le joueur  $J_i$ , une stratégie est un choix, pour chaque sommet où  $c$  est son tour de jouer, d'un sommet successeur.

— Cas d'une arène qui est un graphe :

Pour le joueur  $J_i$ , une stratégie est un choix, pour chaque chemin allant de  $r$  à un sommet  $v$ , où  $c$  est son tour de jouer, d'un sommet successeur.

Si le choix ne dépend que de  $v$  (et pas du *chemin* entier), la stratégie est dite *sans mémoire*.

Stratégie mixte :

On considère un jeu matriciel fini  $\Gamma$ . On appelle stratégie *pure* du joueur ligne, un indice de ligne. On appelle stratégie *mixte* du joueur ligne, toute combinaison convexe de stratégies pures.

Par définition, l'extension mixte  $\hat{\Gamma}$  du jeu  $\Gamma$ , a pour lignes (resp. colonnes) les combinaisons convexes des lignes (resp. colonnes) de  $\Gamma$ . La fonction de gain  $(\hat{r}_1, \hat{r}_2)$  est définie par :

$$\hat{r}_k\left(\sum_{i=1}^n p_i \cdot \sigma_i, \sum_{j=1}^m q_j \cdot \tau_j\right) := \sum_{i,j} p_i q_j \cdot r_k(\sigma_i, \tau_j),$$

pour  $k \in \{1, 2\}$ .

Équilibre de Nash :

Un couple de stratégies  $(\sigma, \tau)$  est un équilibre de Nash si :

- pour toute stratégie  $\sigma'$  de J1,  $r_1(\sigma', \tau) \leq r_1(\sigma, \tau)$

- et pour toute stratégie  $\tau'$  de J2,  $r_2(\sigma, \tau') \leq r_2(\sigma, \tau)$ .

Autrement dit, aucun des joueurs n'a intérêt, sous l'hypothèse que l'autre ne change pas de stratégie, à changer lui-même de stratégie.

La notion s'étend naturellement aux jeux à  $n$  joueurs.