

Université de Bordeaux

Master Informatique, 2-ième année, UE : 4TIN908U, 2016/2017

Jeux-Langages-Logique

Examen du 06/01/17

Sujet de M. Sénizergues ;

Tous documents autorisés ; durée conseillée : 1h 30.

Les exercices sont indépendants. La note obtenue à cette moitié de l'examen sera $\min\{exo1 + exo2 + exo3 + exo4, 10\}$.

On peut admettre le résultat d'une question et néanmoins l'*utiliser* dans les questions qui suivent. Les questions précédées d' une étoile sont difficiles et comptées hors-barème.

Exercice 1 (5 pts) Détermination de jeux infinis

Soit $\mathcal{J} = \langle V_0, V_1, E, W \rangle$ un jeu de Gale-Stewart i.e. V_0, V_1 sont des sous-ensembles de \mathbb{N}^* (l'ensemble des mots sur l'alphabet infini \mathbb{N} , l' ensemble des entiers naturels),

- $V_i = \{v \in \mathbb{N}^* \mid |v| \equiv i \pmod{2}\}$ (pour $i \in \{0, 1\}$)

- $E = \{(v, v') \mid v' \in \mathbb{N}^*, v \preceq v', |v'| = |v| + 1\}$ ¹

- W est un sous-ensemble de \mathbb{N}^ω .

Une partie

$$\pi = w_0, w_1, \dots, w_n, w_{n+1}, w_{n+2}, \dots$$

jouée dans le jeu \mathcal{J} est gagnée par J0 si et seulement si le mot infini $w_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$ appartient à W .

N.B. w_∞ est l'unique mot de \mathbb{N}^ω tel que, $\forall n \geq 0, w_n \preceq w_\infty$.

On rappelle que la topologie-produit de \mathbb{N}^ω est définie par : $P \subseteq \mathbb{N}^\omega$ est *ouvert* si et seulement si il existe $B \subseteq \mathbb{N}^*$ telle que

$$P = \bigcup_{u \in B} u \cdot \mathbb{N}^\omega. \quad (1)$$

1- Supposons que W est ouvert, et soit

$$\pi = w_0, w_1, \dots, w_n, w_{n+1}, w_{n+2}, \dots,$$

une partie jouée dans le jeu \mathcal{J} . Montrer que, si pour tout $n \geq 0$, il existe une partie

$$\pi'_n = w_0, w_1, \dots, w_n, w'_{n+1}, w'_{n+2}, \dots$$

gagnée par J1, alors la partie π est gagnée par J1.

2- Notons G_0 l'ensemble des positions gagnantes de J0 dans le jeu \mathcal{J} et \tilde{G}_0 son complémentaire dans \mathbb{N}^* . Supposons que W est ouvert, que

$$\pi = w_0, w_1, \dots, w_n, w_{n+1}, \dots,$$

est une partie jouée dans le jeu \mathcal{J} et que pour tout $n \geq 0$,

$$w_n \in \tilde{G}_0.$$

Montrer qu'alors π est gagnée par J1.

3- Supposons que W est ouvert et que ε n'est pas une position gagnante pour J0. Montrer que

1. ici \preceq denote l'ordre préfixe

ε est gagnante pour J1.

4- On suppose maintenant que W est un ouvert *récuratif* i.e. que W est de la forme (1) avec un sous-ensemble B qui est récuratif. Cette hypothèse suffit-elle à entraîner que :

- l'un des deux joueurs a une stratégie gagnante ?

*- l'un des deux joueurs a une stratégie gagnante *réursive* ?

- l'un des deux joueurs a une stratégie gagnante *sans-mémoire* ?

Exercice 2 (5 pts) **Équilibres de Nash**

Partie 1 : Élimination des stratégies *strictement dominées*.

On considère un jeu matriciel G , à 2 joueurs (notés J1, J2).

Une stratégie pure $s_i \in S_i$ du joueur i est *strictement dominée* par une stratégie (pure) $t_i \in S_i$ du même joueur si :

$$\forall s_{-i} \in S_{3-i}, r_i(s_i, s_{-i}) < r_i(t_i, s_{-i})$$

On note $G \rightarrow G'$ la relation binaire, entre jeux matriciels :

G' est obtenu à partir de G en supprimant une stratégie qui est strictement dominée.

1- Montrer que, si $G \rightarrow G'$, alors G et G' ont les mêmes équilibres de Nash (en stratégies pures).

On note \rightarrow^* la clôture réflexive et transitive de \rightarrow .

2- Montrer que, si $G \rightarrow^* G'$ et si G' est un jeu 1×1 (chaque joueur n'a qu'une stratégie), alors G a un équilibre de Nash (en stratégies pures).

Partie 2 : Calcul d'équilibres de Nash.

On considère le jeu de pierre-ciseaux-feuille (qui est à somme nulle) :

	P	C	F
P	0	1	-1
C	-1	0	1
F	-1	-1	0

3- A-t-il un équilibre de Nash en stratégies pures ?

4- Calculer un équilibre de Nash en stratégies mixtes, pour ce jeu.

Aide : le théorème d'indifférence à l'équilibre fournit des équations linéaires que doivent vérifier les probabilités à l'équilibre.

5- Ce jeu admet-il un seul équilibre de Nash (en en stratégies mixtes) ?

6- Reprendre la question 1, mais du point de vue des équilibres de Nash en stratégies *mixtes*.

7- Calculer un équilibre de Nash, en stratégies mixtes, pour le jeu suivant :

	R	S	T
A	(2, 3)	(0, 3)	(5, 2)
B	(3, -3)	(1, -1)	(2, -2)
C	(0, 0)	(4, -4)	(5, -5)

Est-il unique ?

Exercice 3 (5 pts) Dual du Retournement

On considère un jeu \mathcal{J} , à 2 joueurs :

$$\mathcal{J} = \langle V_0, V_1, E, F \rangle$$

où $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ et $E \subseteq (V_0 \times V_1) \cup (V_1 \times V_0)$. L'arène est le graphe orienté $\mathcal{A} = (V_0 \cup V_1, E)$. On suppose que ce graphe \mathcal{A} est sans circuit (un "DAG"), de taille finie. L'ensemble $F \subseteq V_0$ est un ensemble de "feuilles" c'est à dire de sommets sans successeurs. Une *partie* est un chemin, non prolongeable à droite, dans le graphe \mathcal{A} i.e.

$$\pi = v_0, v_1, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n \quad (2)$$

où v_n est une feuille, et pour tout $i \in [0, n-1]$, $(v_i, v_{i+1}) \in E$. La partie π est *gagnée* par J0 (resp. J1) ssi $v_n \in F$ (resp. $v_n \notin F$).

Notation : Pour tout sommet $v \in V_0 \cup V_1$ on note

$$vE := \{v' \in V_0 \cup V_1 \mid (v, v') \in E\}, \quad vEE := \{v'' \in V_0 \cup V_1 \mid \exists v' \in vE, (v', v'') \in E\}.$$

Soit $v \in V_1$ tel que

$$\forall u \in V_0, (u, v) \in E \Rightarrow [\exists v' \in V_1, (u, v') \in E \text{ et } v'E \subseteq vE].$$

On note $\mathcal{J} - \{v\}$ le jeu

$$\langle V_0, V_1 \setminus \{v\}, E', W \rangle$$

avec $E' := E \cap (V_0 \times V_1 \setminus \{v\}) \cup E \cap (V_1 \setminus \{v\} \times V_0)$.

1- Montrer que, pour tout $v_0 \in V_0$, J0 a une stratégie gagnante dans (\mathcal{J}, v_0) ssi J0 a une stratégie gagnante dans $(\mathcal{J} - \{v\}, v_0)$.

2- Montrer que, pour tout $v_0 \in V_0$, J1 a une stratégie gagnante dans (\mathcal{J}, v_0) ssi J1 a une stratégie gagnante dans $(\mathcal{J} - \{v\}, v_0)$.

On compare les jeux $D(R(D(R(\mathcal{J}))))$ et \mathcal{J} .

Soit $v_0 \in V_0$ et β une stratégie locale de défense de J1 au point v_0 dans le jeu $D(R(\mathcal{J}))$:

$$\beta : SD(v_0) \rightarrow v_0EE$$

3- Vérifier que

$$\forall \alpha \in SD(v_0), \exists w \in v_0E, \beta(\alpha) = \alpha(w).$$

Pour tout $w \in v_0E$ on définit $\beta_w \in SD(v_0)$ par

$$\forall \alpha \in SD(v_0), \beta_w(\alpha) := \alpha(w).$$

4- Montrer que, pour tout $\beta \in SD(v_0)$, il existe $w \in v_0E$, tel que

$$wE \subseteq \text{Im}(\beta).$$

*5- Peut-on utiliser la transformation étudiée aux qu. 1,2 pour passer du jeu $D(R(D(R(\mathcal{J}))))$ au jeu \mathcal{J} ?

*6- Soit $v_0 \in V_0$. Les deux jeux ont-ils le même gagnant en partant de v_0 ?

*7- Reprendre les questions 5,6 dans le cas d'un jeu de longueur ω , $\langle V_0, V_1, E, W \rangle$ sans circuit, insensible à V_1 .

Exercice 4 (5 pts) **Logique et langages**

On considère dans cet exercice un alphabet fini A , la signature $\mathcal{S} := (s_a)_{a \in A}$ et la structure

$$\mathcal{M} := \langle A^*, (s_a)_{a \in A} \rangle$$

sur cette signature. Chaque symbole s_a est un symbole de prédicat binaire qui prend deux arguments du premier ordre. Il est interprété, dans cette structure, par : pour tous $u, v \in A^*$

$$\mathcal{M} \models s_a(u, v) \text{ ssi } u \cdot a = v.$$

1- Montrer que, pour tout mot $w \in A^*$, il existe une formule MSO $\Phi_w(X, Y)$, sur la signature \mathcal{S} , exprimant que :

$$X \cdot w = Y.$$

2- Montrer que, pour tout mot $w \in A^*$, il existe une formule MSO $\Phi'_w(X, Y)$, sur la signature \mathcal{S} , exprimant que :

$$Xw^{-1} = Y.$$

(On rappelle que $Xw^{-1} := \{v \in A^* \mid v \cdot w \in X\}$).

Une application $F : \mathcal{P}(A^*) \rightarrow \mathcal{P}(A^*)$ est dite "continue" si elle vérifie les deux propriétés (3)(4) ci-dessous :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(A^*), \quad A \subseteq B \Rightarrow F(A) \subseteq F(B) \tag{3}$$

pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-ensembles de $\mathcal{P}(A^*)$,

$$[\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subseteq A_{n+1}] \Rightarrow F\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) = \bigcup_{n \geq 0} F(A_n). \tag{4}$$

3- Soit $F : \mathcal{P}(A^*) \rightarrow \mathcal{P}(A^*)$ une application continue. Supposons que F est exprimable par une formule MSO $\Psi(X, Y)$ i.e. pour tous langages $L_1, L_2 \in \mathcal{P}(A^*)$

$$\mathcal{M} \models \Psi(L_1, L_2) \text{ ssi } F(L_1) = L_2.$$

Montrer qu'alors il existe une formule MSO $\hat{\Psi}(X)$, sur la signature \mathcal{S} , qui exprime le fait que

$$\bigcup_{n \geq 0} F^n(\emptyset) = X,$$

où $F^0 := \text{Id}$, $F^{n+1} = F \circ F^n$.

Aide : on notera que $\bigcup_{n \geq 0} F^n(\emptyset)$ est le *plus petit point fixe* de F .

Soient u_1, u_2, v_1, v_2 quatre mots de A^* . On considère l'application $G : \mathcal{P}(A^*) \rightarrow \mathcal{P}(A^*)$ définie par :

$$G(L) := L \cup ((Lu_1^{-1} \cap Lu_2^{-1}) \cdot \{v_1, v_2\}).$$

On pose

$$G^*(L) := \bigcup_{n \geq 0} G^n(L)$$

4- Montrer que G est continue.

5- Montrer que, si L est un langage rationnel, alors $G^*(L)$ est rationnel.

Aide : remarquer que $L \subseteq G(L)$ et adapter l'idée de la question 3.