

Jeux, Synthèse et Contrôle

DM- à rendre le 15/11/16

Un jeu (à deux joueurs) est *déterminé* si l'un (exactement) des deux joueurs possède une stratégie gagnante. On examine divers jeux du point de vue de leur détermination. Les exercices sont dépendants et doivent être résolus dans l'ordre numérique.

Exercice 1 (6 pts) Jeux finitaires

Soit un graphe orienté $\mathcal{A} = (V, E)$, biparti, de partition $V = V_0 \cup V_1$, qui est une arborescence de racine $r \in V_0$. Le graphe \mathcal{A} est l'*arène* du jeu, V_0 (resp. V_1) est l'ensemble des positions du joueur J0 (resp. J1). Une *partie* est une branche de cet arbre i.e.

$$\pi = v_1, v_2, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n \quad (1)$$

avec $v_1 = r$, v_n est une feuille, et pour tout $i \in [1, n-1]$, $(v_i, v_{i+1}) \in E$. On fixe une partition des feuilles de \mathcal{A} : $F = F_1 \cup F_2$. La partie π est *gagnée* par J0 (resp. J1) ssi $v_n \in F_0$ (resp. $v_n \in F_1$).

On appelle *stratégie* de J0 (resp. J1) une fonction $\sigma : V_0 \rightarrow V_1$ (resp. $\tau : V_1 \rightarrow V_0$) telle que : $\text{Dom}(\sigma) = \{v_0 \in V_0, \exists v_1 \in V_1, (v_0, v_1) \in E\}$ (analogue pour τ).

Une partie π respecte la stratégie σ (resp. τ) si, pour tout i ,

$$\sigma(v_{2i+1}) = v_{2i+2} \quad (\text{resp.} \quad \tau(v_{2i}) = v_{2i+1}).$$

Une stratégie σ (resp. τ) de J0 (resp. de J1) est *gagnante* ssi toute partie respectant σ (resp. τ) est gagnée par J0 (resp. par J1).

1- Montrer que, si \mathcal{A} est finie, alors, le jeu associé à \mathcal{A} est déterminé.

2- Montrer que, si \mathcal{A} est de profondeur finie (i.e. $\exists L \geq 0$ tel que toute partie est de longueur $\leq L$) alors, le jeu associé à \mathcal{A} est déterminé.

3- Supposons que toute *partie* π du jeu \mathcal{A} est *finie*. Reprendre la question 2 avec cette hypothèse plus faible.

Exercice 2 (14 pts) Jeux infinitaires

Une famille de jeux infinis On considère un jeu à deux joueurs J0, J1. Chaque joueur à son tour joue un mot $w \in \{0, 1\}^+$ (on note w_n le mot joué au n -ième tour du jeu). Le joueur J0 commence. Le joueur J0 (resp. J1) n'a le droit de produire que des mots de $\{0\}^+$ (resp. $\{1\}^+$). Le jeu dure indéfiniment ; une partie

$$\pi = w_1, w_2 \dots w_n \dots$$

produit le mot infini :

$$w_\infty = w_1 \cdot w_2 \cdots w_n \cdots$$

L'ensemble des mots infinis de longueur ω est partitionné en deux sous-ensembles

$$\{0, 1\}^\omega = W_0 \cup W_1 \quad \text{où } W_0 \cap W_1 = \emptyset.$$

La partie π est gagnée par J0 (resp. J1) ssi $w_\infty \in W_0$ (resp. $w_\infty \in W_1$).

Nous appellerons *jeu de Blackwell sur les entiers* un jeu de cette forme.

1- Dans chacun des cas suivants, analyser quel joueur a une stratégie gagnante :

1.1 $W_0 = \{u \in \{0, 1\}^\omega \mid u^{-1}(0) \text{ est fini} \}$

1.2 On fixe un ensemble $F \subseteq \mathbb{N}$, puis on définit $W_0 = \{u \in \{0, 1\}^\omega \mid u^{-1}(0) = F\}$.

1.3 On fixe un ensemble $F \subseteq \mathbb{N}$, puis on définit $W_0 = \{u \in \{0, 1\}^\omega \mid u^{-1}(0) \subseteq F\}$.

2- On suppose qu'il existe des ensembles $B_0, B_1 \subseteq \{0, 1\}^*$ tels que

$$W_0 = \bigcup_{v \in B_0} v \cdot \{0, 1\}^\omega, \quad W_1 = \bigcup_{v \in B_1} v \cdot \{0, 1\}^\omega.$$

Montrer que, sous cette hypothèse, le jeu est déterminé.

3- On note $L \subseteq \{0, 1\}^\omega$ l'ensemble des mots qui dénotent des parties du jeu.

$$L := 0\{0, 1\}^\omega \setminus (\{0, 1\}^* \{0^\omega, 1^\omega\})$$

On suppose qu'il existe des ensembles $B_0, B_1 \subseteq \{0, 1\}^*$ tels que

$$W_0 \cap L = \left(\bigcup_{v \in B_0} v \cdot \{0, 1\}^\omega \right) \cap L, \quad W_1 \cap L = \left(\bigcup_{v \in B_1} v \cdot \{0, 1\}^\omega \right) \cap L.$$

Montrer que, sous cette hypothèse, le jeu est déterminé.

4*- Lorsque l'hypothèse de la qu. 2 (resp. 3) est remplie, peut-on toujours faire en sorte qu'elle le soit par des ensembles B_0, B_1 finis ?

Aide : $\{0, 1\}^\omega$ muni de la topologie produit est *compact*.

Filtres Soit S un ensemble. On appelle *filtre* sur S , tout ensemble $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(S)$, vérifiant les trois propriétés :

clôture vers le haut :

$$\forall F, G \in \mathcal{P}(S), (F \in \mathcal{F} \text{ et } F \subseteq G) \Rightarrow G \in \mathcal{F}. \quad (2)$$

clôture par intersection :

$$\forall F, G \in \mathcal{P}(S), (F \in \mathcal{F} \text{ et } G \in \mathcal{F}) \Rightarrow F \cap G \in \mathcal{F}. \quad (3)$$

non-vacuité de ses membres :

$$\emptyset \notin \mathcal{F}. \quad (4)$$

5- Montrer que, si S est infini, l'ensemble des parties co-finies de S

$$\mathcal{F}_c := \{F \subseteq S \mid S \setminus F \text{ est fini} \}.$$

est un filtre.

6- Vérifier que l'inclusion est un ordre *inductif* sur l'ensemble des filtres sur S .

On appelle *ultra-filtre* sur S , tout filtre sur S qui est maximal (pour l'inclusion).

7- Montrer que tout filtre est majoré par un ultra-filtre.

Aide : utiliser le lemme de Zorn.

8- Soit \mathcal{F} un ultra-filtre sur S .

8.1 Montrer que, pour tout $F \subseteq S$,

$$F \in \mathcal{F} \text{ ou } S \setminus F \in \mathcal{F}.$$

8.2 Montrer que, réciproquement, si un filtre \mathcal{F} vérifie la propriété de la qu. 8.1, alors c'est un ultra-filtre.

Indétermination On fixe dans cette partie $S := \mathbb{N}$ et on choisit un ultra-filtre \mathcal{F} qui majore le filtre \mathcal{F}_c (sur \mathbb{N}) [il en existe au moins un selon la question 7].

Pour deux parties F, G de \mathbb{N} la notation $F =_p G$ se lit “ F est presque égal à G ” et signifie :

$$\text{Card}(F \Delta G) < \infty$$

où Δ est l'opération de différence symétrique sur les ensembles.

9- Soient $F, G \subseteq \mathbb{N}$ telles que $F =_p G$. Montrer que $F \in \mathcal{F} \Leftrightarrow G \in \mathcal{F}$.

On considère le jeu de Blackwell sur les entiers défini par

$$W_0 := \{u \in \{0, 1\}^\omega \mid u^{-1}(0) \in \mathcal{F}\}, \quad W_1 := \{0, 1\}^\omega \setminus W_0. \quad (5)$$

10- Montrer que $W_1 = \{u \in \{0, 1\}^\omega \mid u^{-1}(1) \in \mathcal{F}\}$.

On note les positions des joueurs :

$$V_0 := \{\varepsilon\} \cup 0\{0, 1\}^*1, \quad V_1 := \{0\} \cup 0\{0, 1\}^*0, \quad V := V_0 \cup V_1 = \{\varepsilon\} \cup 0\{0, 1\}^*$$

On veut montrer que J0 n'a pas de stratégie gagnante. Pour cela, on fait l'hypothèse (H0) :

σ_0 est une stratégie gagnante de J0 .

On construit maintenant une stratégie σ_1 de J1, qui est aussi gagnante et on en conclura que (H0) est fausse.

Étant donnée une stratégie $\sigma_i : V_i \rightarrow V_{1-i}$, notons $e_i : V_i \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ le choix d'entier fait par le joueur i dans la position $v_i \in V_i$:

$$\sigma_i(v_i) = v_i \cdot i^{e_i(v_i)}.$$

Considérons la stratégie σ_1 (“par imitation de σ_0 ”) de J1 :

- premier coup : $e_1(0^n) := e_0(0^n 1) + 1$

- coups suivants :

— si $v_1 = 0^{n_1} 1^{n_2} \dots 0^{n_{2 \cdot k+1}}$ (avec $n_2 \geq 2, k \geq 1$)

alors $e_1(v_1) := e_0(0^{n_1} 10^{n_2-1} \dots 1^{n_{2 \cdot k+1}})$

— si $v_1 = 0^{n_1} 1^{n_2} \dots 0^{n_{2 \cdot k+1}}$ (avec $n_2 = 1, k \geq 1$)

alors $e_1(v_1) := 1$.

Étant donnée une partie π jouée selon la stratégie σ_1 :

$$\pi = 0^{n_1} \cdot 1^{n_2} \dots 0^{n_{2 \cdot k+1}} \cdot 1^{n_{2 \cdot k+2}} \dots$$

où nécessairement $n_2 = e_0(0^{n_1}1) + 1 \geq 2$, posons

$$\pi' = 0^{n_1} \cdot 1 \cdot 0^{n_2-1} \dots 1^{n_{2 \cdot k+1}} \cdot 0^{n_{2 \cdot k+2}} \dots$$

11- Montrer que π' est une partie qui respecte σ_0 et que $\pi^{-1}(1) =_p \pi'^{-1}(0)$.

12- Montrer que la stratégie σ_1 est gagnante pour J1. En conclure que (H0) est fausse.

On fait maintenant l'hypothèse (H1) :

s_1 est une stratégie gagnante de J1 .

Construisons une stratégie s_0 de J0, qui est gagnante.

- premier coup : $e_0(\varepsilon) := e_1(0) + 1$

- coups suivants :

— si $v_0 = 0^{n_1}1^{n_2} \dots 1^{n_{2 \cdot k}}$ (avec $n_1 \geq 2, k \geq 1$)

alors $e_0(v_0) := e_1(01^{n_1-1}0^{n_2} \dots 0^{n_{2 \cdot k}})$

— si $v_0 = 0^{n_1}1^{n_2} \dots 1^{n_{2 \cdot k}}$ (avec $n_1 = 1, k \geq 1$)

alors $e_0(v_0) := 1$.

13- Montrer que la stratégie s_0 est gagnante pour J0. En conclure que (H1) est fausse.

14- Montrer que le jeu défini par (5) est indéterminé.