

Jeux-Logique-Langages

G. Sénizergues, Université de Bordeaux et ENSEIRB

Année 2015-2016¹

1. dernière mise à jour : 10 février 2016

Table des matières

1	Mathématiques sociales	7
1.1	Préférences	7
1.2	Choix social	14
1.3	Agrégation des préférences	18
2	Les jeux	19
3	Équilibres de Nash	21
3.1	Théorème de Kakutani	21
3.1.1	Préliminaires	21
3.1.2	Lemme de Sperner	21
3.1.3	Théorème de Brouwer	22
3.1.4	Théorème de Kakutani	24
3.2	Théorème de Nash	26
4	Jeux de Blackwell	29
5	Automates sur les mots infinis	31
6	Logique	33

Introduction

L'acception la plus courante du terme "théorie des jeux" comporte d'une part l'étude des problèmes soulevés par les prises de décision collectives, ce que nous appellerons les "mathématiques sociales", d'autre part l'étude des jeux proprement dits (au sens que prend ce terme dans la vie courante) et aussi des "jeux" comme modélisations de situations où des agents interagissent (comme dans une économie de marché par exemple). Outre ces deux thèmes classiques, nous montrerons comment certains résultats de la théorie des jeux peuvent être utiles en théorie des automates et en logique.

Les mathématiques sociales Nous abordons la modélisation mathématique du comportement d'un être rationnel dans des situations de choix, alors que ses informations sont incertaines. La notion centrale est celle de *préférence rationnelle*, qui a été axiomatisée par [Von Neumann et Morgenstern, 1944].

Nous étudions ensuite les procédés par lesquels une *assemblée*, dont chaque individu possède une échelle de préférences, peut se mettre d'accord sur une *décision* (problème du choix social), un ordre de priorité (problème d'agrégation des préférences), un couplage (problème des mariages stables).

Les jeux Les jeux de plateau comme les échecs, le go, les dames, l'awélé, le backgammon, le poker, etc ... sont clairement des jeux, selon le sens commun du terme. Dans ce contexte on s'intéresse surtout à connaître qui est *gagnant*, et avec quelle *stratégie*.

Les interactions entre producteurs, vendeurs, acheteurs, diplomates, militaires, bienfaiteurs, profiteurs, traîtres, alliés fidèles, prédateurs, proies, etc ... peuvent aussi être modélisées par des jeux. De ce point de vue on s'intéresse aux *équilibres* qui peuvent s'établir "naturellement" entre ces acteurs. Le théorème de Nash (qui a valu un prix Nobel ... d'économie, à son auteur en 1994) est un résultat-clé de ce sujet.

Les automates et la logique Un automate *déterministe* ne "joue pas", on le voit volontiers comme un mécanisme froid et prévisible. S'il est *non-déterministe*, on peut le voir comme un acteur qui maximise quelque chose (un booléen). Si l'automate est *alternant* (ses transitions comportent non-seulement des choix non-déterministes, mais aussi des conjonctions de mouvements) alors on peut le voir comme un jeu opposant un "prouveur" (qui cherche à montrer que l'objet est correct) et un "attaquant" (qui cherche à montrer que l'objet est incorrect).

Cette métaphore nous amène à appliquer des théorèmes de théorie des jeux (théorème de *détermination*, existence de *stratégies sans-mémoire*) à des problèmes de théorie des automates ou de logique :

- comment synthétiser un contrôleur à partir d'une spécification logique ?
- comment savoir si un énoncé formel sur les entiers (ou les mots, ou les arbres) est vrai ?

- quelle est la structure de l'ensemble des modèles d'une formule logique (i.e. l'ensemble des objets qui rendent vrai un énoncé formel) ?

Chapitre 1

Mathématiques sociales

1.1 Préférences

On examine ici par quelles types de relations binaires on peut représenter les “préférences” des acteurs d’un jeu (qui lui-même peut modéliser une économie de marché, un groupe d’organiseurs d’une activité, etc ...) On se donne un ensemble d’“alternatives” Z qui est fini. On note $\Delta(Z)$ l’ensemble des mesures de probabilité sur Z . Nous considérerons ici qu’un élément de $\Delta(Z)$ est une application $p : Z \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $\sum_{z \in Z} p(z) = 1$.

On modélise les préférences d’un acteur par une relation binaire \preceq sur $\Delta(Z)$. La signification intuitive de $p \preceq q$ est alors “ p est préféré à q ”.

Fonction d’utilité Appelons *fonction d’utilité* toute application $u : Z \rightarrow \mathbb{R}$. On note alors $\tilde{u} : P(Z) \rightarrow \mathbb{R}$ son extension définie par

$$\tilde{u}(p) := \sum_{z \in Z} p(z)u(z)$$

autrement dit \tilde{u} associe à toute distribution de probabilité p l’*espérance* de la “variable aléatoire” u (pour cette distribution). Étant donnée une application $f : E \rightarrow (F, \leq)$ (où E est un ensemble et (F, \leq) est un ensemble muni d’un préordre linéaire \leq) on définit la relation binaire \preceq_f par : pour tous $e, e' \in E$

$$e \preceq_f e' \Leftrightarrow f(e) \leq f(e')$$

On vérifie aisément que pour toute application f , la relation \preceq_f est un préordre linéaire i.e. pour tous $e, f, g \in E$:

$$\begin{aligned} e &\preceq e \\ e \preceq f \wedge f \preceq g &\Rightarrow e \preceq g \\ e \preceq f \vee f \preceq e &\preceq e \end{aligned}$$

Axiomes de von Neumann et Morgenstern

Le but de ce paragraphe est de montrer que, sous réserve qu’une relation de préférence \preceq vérifie certains axiomes (qu’il semble raisonnable de prêter à des acteurs rationnels), cette relation est nécessairement définie par une fonction d’utilité u sur les éléments de Z .

1- Axiomes de Préordre linéaire (AXpl) : $\forall p, q, r \in \Delta(Z), \lambda \in]0, 1[$,

$$p \preceq p \quad (\text{réflexivité})$$

$$p \preceq q \wedge q \preceq r \Rightarrow p \preceq r \text{ (transitivité)}$$

$$p \preceq q \vee q \preceq p \text{ (linéarité)}$$

2- Axiome d'Indépendance (AXind) : $\forall p, q, r \in \Delta(Z), \lambda \in]0, 1[$,

$$p \prec q \Rightarrow \lambda p + (1 - \lambda)r \prec \lambda q + (1 - \lambda)r$$

3- Axiome de Continuité (AXcon) : $\forall p, q, r \in \Delta(Z), \lambda \in]0, 1[$,

$$p \prec q \prec r \Rightarrow \exists \varepsilon \in]0, 1[, (1 - \varepsilon)p + \varepsilon r \prec q \prec \varepsilon p + (1 - \varepsilon)r$$

On rappelle que, dans les axiomes (AXind)(AXcon), $p \prec q$ signifie : $p \preceq q \wedge \neg(q \preceq p)$.

Théorème 1.1.1 (Von-Neuman-Morgenstern 1944) *Soit \preceq une relation binaire sur $\Delta(Z)$.*

La relation \preceq satisfait les axiomes (AXpl)(AXind)(AXcon) si et seulement si, il existe une fonction $u : Z \rightarrow \mathbb{R}$ telle que \preceq coïncide avec le préordre $\preceq_{\bar{u}}$.

On peut aisément vérifier que, pour toute application $u : Z \rightarrow \mathbb{R}$, la relation $\preceq_{\bar{u}}$ satisfait les axiomes (AXpl)(AXind)(AXcon).

Considérons maintenant une relation binaire \preceq qui vérifie les axiomes (AXpl)(AXind)(AXcon). La fin de cette section consiste à mettre en évidence une application $u : Z \rightarrow \mathbb{R}$ puis à démontrer que \preceq coïncide avec $\preceq_{\bar{u}}$.

Un premier point délicat consiste à démontrer qu'une version large de l'axiome d'Indépendance est vraie.

Lemme 1.1.2 *Pour tous $p, q, r \in \Delta(Z), \lambda \in]0, 1[$,*

$$p \preceq q \Rightarrow \lambda p + (1 - \lambda)r \preceq \lambda q + (1 - \lambda)r$$

Nous noterons (AXindl), pour "axiome d'indépendance large", ce nouvel axiome. Nous "préparons le terrain" avec les faits 1.1.3-1.1.8, puis donnons une preuve de ce lemme.

Fait 1.1.3 *Soient $q \prec r$ et $\lambda \in]0, 1[$. Alors $q \prec \lambda q + (1 - \lambda)r$.*

Preuve : Par (AXind) :

$$q \prec r \Rightarrow \lambda q + (1 - \lambda)q \prec \lambda q + (1 - \lambda)r$$

donc

$$q \prec \lambda q + (1 - \lambda)r.$$

□

Fait 1.1.4 *Soient $p \prec r$ et $q \in \Delta(Z)$ tels que , $\forall \lambda \in]0, 1[, p \prec \lambda q + (1 - \lambda)r$. Alors $p \preceq q$*

Preuve : Soient p, q, r vérifiant les hypothèses du lemme. Notons (H) l'hypothèse additionnelle :

$$p \succ q.$$

Alors, par (AXcon)

$$\exists \varepsilon > 0, p \succ (1 - \varepsilon)q + \varepsilon r$$

mais, par l'hypothèse du lemme (où l'on choisit $\lambda := \varepsilon$)

$$p \prec (1 - \varepsilon)q + \varepsilon r$$

contradiction.

L'hypothèse (H) est donc fausse, i.e.

$$p \preceq q.$$

□

Fait 1.1.5 Soient $p \approx q$ et $q \prec r$ et $\lambda \in]0, 1[$. Alors
 $\lambda p + (1 - \lambda)r \approx \lambda q + (1 - \lambda)r$.

Preuve : Par le Fait 1.1.3 :

$$\forall \mu \in]0, 1[, q \prec \mu q + (1 - \mu)r$$

et comme $p \approx q$:

$$\forall \mu \in]0, 1[, p \prec \mu q + (1 - \mu)r$$

On en déduit que , pour tout $\mu \in]0, 1[$:

$$\begin{aligned} \lambda p + (1 - \lambda)r &\prec \lambda(\mu q + (1 - \mu)r) + (1 - \lambda)r && \text{(AXind)} \\ &= (\lambda\mu)q + (1 - \lambda\mu)r \\ &= \mu(\lambda q + (1 - \lambda)r) + (1 - \mu)r \quad . \end{aligned}$$

Par le Fait 1.1.4, on en déduit que :

$$\lambda p + (1 - \lambda)r \preceq \lambda q + (1 - \lambda)r.$$

□

Fait 1.1.6 Soient $p \approx q$ et $q \succ r$ et $\lambda \in]0, 1[$. Alors
 $\lambda p + (1 - \lambda)r \approx \lambda q + (1 - \lambda)r$.

Preuve : Le préordre \succ vérifie les mêmes axiomes que le préordre \prec . Le Fait 1.1.5 est donc valide pour \succ . □

Fait 1.1.7 Soient $p \approx q$ et $\lambda \in]0, 1[$. Alors
 $p \approx \lambda p + (1 - \lambda)q$.

Preuve : Soit r tel que $p \prec r$. Alors $q \prec r$. Donc

$$\begin{aligned} \lambda p + (1 - \lambda)q &\prec \lambda p + (1 - \lambda)r && \text{(AXind)} \\ &\prec \lambda r + (1 - \lambda)r && \text{(AXind)} \\ &= r \quad . \end{aligned}$$

Comme cette inégalité est vérifiée par tout r tel que $p \prec r$,

$$\lambda p + (1 - \lambda)q \preceq p$$

Par le même raisonnement, où l'on remplace le préordre \preceq par le préordre \succeq , on obtient que

$$\lambda p + (1 - \lambda)q \succeq p$$

et finalement

$$\lambda p + (1 - \lambda)q \approx p.$$

□

Fait 1.1.8 Soient $p \approx q \approx r$ et $\lambda \in]0, 1[$. Alors
 $\lambda p + (1 - \lambda)r \approx \lambda q + (1 - \lambda)r$.

Preuve : Par le Fait 1.1.7 on a les deux équivalences :

$$p \approx \lambda p + (1 - \lambda)r, \quad q \approx \lambda q + (1 - \lambda)r$$

donc

$$\lambda p + (1 - \lambda)r \approx \lambda q + (1 - \lambda)r.$$

□

Preuve du Lemme 1.1.2 :

1- si $p \approx q$; alors les faits 1.1.5, 1.1.6 et 1.1.8 couvrent les 3 cas possibles $p \prec r, p \succ r, p \approx r$ et permettent de conclure, dans chaque cas, que $\lambda p + (1 - \lambda)r \approx \lambda q + (1 - \lambda)r$

2- si $p \prec q$, alors l'axiome (AXind) permet de conclure.

q.e.d.

Nous reprenons maintenant le cours de la preuve du théorème 1.1.1 ; nous pouvons utiliser désormais les axiomes (AXpl)(AXind)(AXcon) et aussi (AXindl) (grâce au Lemme 1.1.2).

Lemme 1.1.9 Il existe $\underline{z}, \bar{z} \in Z$ tels que, pour tous $z \in Z$ $\delta_{\underline{z}} \preceq \delta_z \preceq \delta_{\bar{z}}$.

Preuve : La relation \preceq restreinte au sous-ensemble $\{\delta_z \mid z \in Z\}$ de $\Delta(Z)$ est un préordre linéaire. Comme ce sous-ensemble est *fini* il admet un plus petit (resp. plus grand) élément pour le préordre. Soient $\underline{z} \in Z$ (resp. $\bar{z} \in Z$) tel que $\delta_{\underline{z}}$ est minimum (resp. $\delta_{\bar{z}}$ est maximum) : ils vérifient la conclusion du lemme. □

Lemme 1.1.10 $\forall p \in \Delta(Z), \delta_{\underline{z}} \preceq p \preceq \delta_{\bar{z}}$.

Preuve : Toute mesure de probabilité p sur Z est de la forme :

$$p = \sum_{k=1}^m p_k \delta_{z_k}$$

pour un entier $m \geq 1$ et $\forall k \in [1, m], z_k \in Z$.

Montrons par récurrence sur m que $\delta_{\underline{z}} \preceq p$.

Base : m=1

Comme δ_{z_1} est minimum, $\delta_{\underline{z}} \preceq \delta_{z_1} = p$.

Base : m=n+1 où $n \geq 1$.

Si $p_1 = 1$, alors par le cas de base, $\delta_{\underline{z}} \preceq p$.

Supposons $p_1 < 1$. Alors

$$p = p_1 \delta_{z_1} + \sum_{k=2}^{n+1} p_k \delta_{z_k}.$$

On sait que $\delta_{\underline{z}} \preceq \delta_{z_1}$ et $\delta_{\underline{z}} \preceq \frac{\sum_{k=2}^{n+1} p_k \delta_{z_k}}{1-p_1}$ (par hyp. de récurrence). On en déduit :

$$\begin{aligned}
\delta_{\underline{z}} &= p_1 \delta_{\underline{z}} + (1-p_1) \delta_{\underline{z}} \\
&\preceq p_1 \delta_{z_1} + (1-p_1) \delta_{\underline{z}} && \text{(AXindl)} \\
&\preceq p_1 \delta_{z_1} + (1-p_1) \frac{\sum_{k=2}^{n+1} p_k \delta_{z_k}}{1-p_1} && \text{(AXindl)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} p_k \delta_{z_k} \\
&= p
\end{aligned}$$

□

Lemme 1.1.11 *Pour tous nombres réels $1 > \alpha > \beta > 0$ et pour tous $p, q \in \Delta(Z)$,*

$$p \succ q \Rightarrow \alpha p + (1-\alpha)q \succ \beta p + (1-\beta)q.$$

Preuve : Soient α, β, p, q vérifiant les hypothèses du lemme. Alors

$$\begin{aligned}
p &= \frac{\beta}{\alpha} p + (1 - \frac{\beta}{\alpha}) p \\
&\succ \frac{\beta}{\alpha} p + (1 - \frac{\beta}{\alpha}) q && \text{(AXind)}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\alpha p + (1-\alpha)q &\succ \alpha [\frac{\beta}{\alpha} p + (1 - \frac{\beta}{\alpha}) q] + (1-\alpha)q && \text{(AXind)} \\
&= \beta p + (1-\beta)q
\end{aligned}$$

□

Lemme 1.1.12 *Soit $p \in \Delta(Z)$ tel que $\delta_{\underline{z}} \prec p \prec \delta_{\bar{z}}$. Alors, il existe un unique $\alpha^* \in]0, 1[$ tel que*

$$p \approx \alpha^* \delta_{\bar{z}} + (1 - \alpha^*) \delta_{\underline{z}}$$

Preuve :

1- L'unicité de α^* résulte du Lemme 1.1.11.

2- Soit $p \in \Delta(Z)$ tel que

$$\delta_{\underline{z}} \prec p \prec \delta_{\bar{z}}. \tag{1.1}$$

Posons

$$\alpha^* := \sup\{\alpha \in [0, 1] \mid p \succeq \alpha \delta_{\bar{z}} + (1-\alpha) \delta_{\underline{z}}\} \tag{1.2}$$

Vu les inégalités (1.1), par (AXcon)

$$\exists \varepsilon > 0, p \succ \varepsilon \delta_{\bar{z}} + (1-\varepsilon) \delta_{\underline{z}},$$

donc

$$\alpha^* \geq \varepsilon > 0.$$

Comme α^* est le sup de l'ensemble E en membre droit de (1.2), tout $\beta \in]0, \alpha^*[$ est un non-majorant du même ensemble, i.e.

$$\forall \beta \in]0, \alpha^*[, \exists \alpha \in]\beta, \alpha^*[, \quad p \succeq \alpha \delta_{\bar{z}} + (1 - \alpha) \delta_{\underline{z}}.$$

et comme $\alpha > \beta$, par le Lemme 1.1.11

$$\forall \beta \in]0, \alpha^*[, \quad p \succeq \beta \delta_{\bar{z}} + (1 - \beta) \delta_{\underline{z}}. \quad (1.3)$$

Distinguons 3 cas.

Cas 1 : $p \succ \alpha^* \delta_{\bar{z}} + (1 - \alpha^*) \delta_{\underline{z}}$.

Alors $\alpha^* < 1$ (sinon les deux membres de l'inégalité ci-dessus seraient égaux).

Par (AXcon), il existe $\varepsilon \in]0, 1[$ tel que

$$p \succ (1 - \varepsilon)[\alpha^* \delta_{\bar{z}} + (1 - \alpha^*) \delta_{\underline{z}}] + \varepsilon \delta_{\bar{z}}. \quad (1.4)$$

Fixons un ε vérifiant (1.4) et posons

$$\beta := (1 - \varepsilon)\alpha^* + \varepsilon.$$

Alors

$$\beta > (1 - \varepsilon)\alpha^* + \varepsilon\alpha^* = \alpha^*. \quad (1.5)$$

L'inégalité (1.4) sécrit aussi

$$p \succ \beta \delta_{\bar{z}} + (1 - \beta) \delta_{\underline{z}}$$

ce qui montre que $\beta \leq \alpha^*$, contredisant (1.5).

Ce cas ne peut pas se produire.

Cas 2 : $p \prec \alpha^* \delta_{\bar{z}} + (1 - \alpha^*) \delta_{\underline{z}}$.

Par (AXcon), il existe $\varepsilon \in]0, 1[$ tel que

$$p \prec (1 - \varepsilon)[\alpha^* \delta_{\bar{z}} + (1 - \alpha^*) \delta_{\underline{z}}] + \varepsilon \delta_{\bar{z}}. \quad (1.6)$$

Fixons un ε vérifiant (1.6) et posons

$$\beta := (1 - \varepsilon)\alpha^*.$$

L'inégalité (1.6) sécrit aussi

$$p \prec \beta \delta_{\bar{z}} + (1 - \beta) \delta_{\underline{z}}.$$

Or $\beta \in]0, \alpha^*[$, donc cette inégalité contredit l'inégalité (1.3).

Ce cas ne peut pas se produire.

Cas 3 : $p \approx \alpha^* \delta_{\bar{z}} + (1 - \alpha^*) \delta_{\underline{z}}$.

C'est le seul cas possible, ce qui prouve le Lemme. \square

Lemme 1.1.13 *Supposons que $\delta_{\underline{z}} \prec \delta_{\bar{z}}$ et soit $p \in \Delta(Z)$. Alors, il existe un unique $\alpha^* \in [0, 1]$ tel que*

$$p \approx \alpha^* \delta_{\bar{z}} + (1 - \alpha^*) \delta_{\underline{z}}$$

Preuve :

- 1- Si $\delta_{\underline{z}} \prec p \prec \delta_{\overline{z}}$, la conclusion est établie par le Lemme 1.1.12.
- 2- Pour $p = \delta_{\overline{z}}$, $\alpha^* = 1$ convient et pour $p = \delta_{\underline{z}}$, $\alpha^* = 0$ convient.
- 3- Par (AXcon), pour tout $\alpha \in [0, 1[$

$$\delta_{\overline{z}} = \alpha\delta_{\overline{z}} + (1 - \alpha)\delta_{\overline{z}} \succ \alpha\delta_{\overline{z}} + (1 - \alpha)\delta_{\underline{z}}$$

ce qui montre l'unicité de la valeur $\alpha^* = 1$ pour $p = \delta_{\overline{z}}$. Par un argument similaire 0 est la seule valeur possible pour $p = \delta_{\underline{z}}$. \square

Désormais, pour tout $p \in \Delta(Z)$, on note $\alpha^*(p)$ le nombre réel fourni par la conclusion du Lemme 1.1.13. Autrement dit, α^* est une *application* $\Delta(Z) \rightarrow [0, 1]$.

Lemme 1.1.14 *Supposons que $\delta_{\underline{z}} \prec \delta_{\overline{z}}$. Soit $p, q \in \Delta(Z)$,*

- 1- $p \prec q \Leftrightarrow \alpha^*(p) < \alpha^*(q)$
- 2- $p \approx q \Leftrightarrow \alpha^*(p) = \alpha^*(q)$

Autrement dit : α^* est strictement croissante.

Preuve : Par le Lemme 1.1.11 :

$$\alpha^*(p) < \alpha^*(q) \Rightarrow p \prec q,$$

ce qui entraîne trivialement que

$$\alpha^*(p) > \alpha^*(q) \Rightarrow p \succ q,$$

et par transitivité de la relation \approx :

$$\alpha^*(p) = \alpha^*(q) \Rightarrow p \approx q.$$

Comme les trois cas de figure $p \prec q, p \succ q, p \approx q$ sont disjoints, on conclut que les implications réciproques des 3 implications ci-dessus sont vraies. \square

Lemme 1.1.15 *Supposons que $\delta_{\underline{z}} \prec \delta_{\overline{z}}$. L'application α^* préserve les combinaisons convexes i.e. $\forall p, q \in \Delta(Z), \lambda \in]0, 1[$,*

$$\alpha^*(\lambda p + (1 - \lambda)q) = \lambda\alpha^*(p) + (1 - \lambda)\alpha^*(q)$$

Preuve : Soient $p, q \in \Delta(Z), \lambda \in]0, 1[$. Par définition de α^* (i.e. via le Lemme 1.1.13) :

$$p \approx \alpha^*(p)\delta_{\overline{z}} + (1 - \alpha^*(p))\delta_{\underline{z}}, \quad q \approx \alpha^*(q)\delta_{\overline{z}} + (1 - \alpha^*(q))\delta_{\underline{z}}.$$

En utilisant deux fois de suite (AXindl) on obtient :

$$\begin{aligned} \lambda p + (1 - \lambda)q &\approx \lambda[\alpha^*(p)\delta_{\overline{z}} + (1 - \alpha^*(p))\delta_{\underline{z}}] + (1 - \lambda)[\alpha^*(q)\delta_{\overline{z}} + (1 - \alpha^*(q))\delta_{\underline{z}}] \\ &= [\lambda\alpha^*(p) + (1 - \lambda)\alpha^*(q)]\delta_{\overline{z}} + [\lambda(1 - \alpha^*(p)) + (1 - \lambda)(1 - \alpha^*(q))]\delta_{\underline{z}}. \end{aligned}$$

L'unicité de α^* prouve alors que :

$$\alpha^*(\lambda p + (1 - \lambda)q) = \lambda\alpha^*(p) + (1 - \lambda)\alpha^*(q).$$

\square

Preuve du Théorème 1.1.1.

Cas 1 : $\delta_z \approx \delta_{\bar{z}}$.

Toute fonction constante $u : Z \rightarrow \mathbb{R}$ convient.

Cas 2 : $\delta_z \prec \delta_{\bar{z}}$.

Soit $u : Z \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$u(z) := \alpha^*(\delta_z)$$

On vérifie que $p \preceq q \Leftrightarrow \tilde{u}(p) \leq \tilde{u}(q)$.

q.e.d.

1.2 Choix social

Nous mettons sous forme mathématique le problème suivant : comment une assemblée de N individus, placés devant un éventail de choix A , peut prendre une décision (collective donc) alors que les préférences des individus peuvent être “divergentes”. On appelle “fonction de choix” la fonction qui, prenant en argument la suite des préférences, fournit en résultat l’élément de A qui est choisi.

Nous étudierons en TD différentes fonctions de choix concrètes. Nous définissons ici quelques propriétés de ces fonctions. Puis nous démontrons que certaines qualités qui semblent souhaitables (par exemple s’il s’agit d’élire un législateur, un magistrat ou un dirigeant) ne peuvent être simultanément vérifiées.

Axiomes sur les fonctions de choix.

On considère un entier N (le nombre d’électeurs), un ensemble fini A (l’ensemble des alternatives), l’ensemble \mathcal{L}_A des ordres linéaires sur A et une application $f : \mathcal{L}_A^N \rightarrow A$ (une fonction de choix).

Pareto-efficiente

f est dite Pareto-efficiente ssi, pour tout $\vec{P} \in \mathcal{L}_A^N$,

$$[\forall i \in [1, N], \forall b \in A, a P_i b] \Rightarrow f(\vec{P}) = a$$

i.e. si tous les électeurs classent a premier, a est élu.

Non-manipulable

f est dite manipulable ssi, il existe $\vec{P} \in \mathcal{L}_A^N, i \in [1, N], P'_i \in \mathcal{L}_A$, tels que, pour $\vec{P}' = (P_1, \dots, P_{i-1}, P'_i, P_{i+1}, \dots, P_N)$

$$f(\vec{P}') P_i f(\vec{P})$$

i.e. l’électeur i , en *mentant* sur ses préférences, obtient un résultat *meilleur* du point de vue de ses préférences.

Monotone

f est dite monotone ssi, pour tous $\vec{P}, \vec{Q} \in \mathcal{L}_A^N$

$$[f(\vec{P}) = a \text{ et } , \forall i \in [1, N], \forall b \in A, a P_i b \Rightarrow a Q_i b] \Rightarrow f(\vec{Q}) = a$$

i.e. si le candidat a est élu par la suite de préférences \vec{P} , et si dans \vec{Q} a a un meilleur rang dans chaque préférence, alors le candidat a est aussi élu par \vec{Q} .

Neutre

On voit ici \mathcal{L}_A comme l’ensemble des bijections $[1, |A|] \rightarrow A$. Pour tout ensemble E , on note \mathcal{S}_E l’ensemble des bijections de E dans E .

L’application f est dite Neutre *vis à vis des électeurs* ssi, pour tous $\sigma \in \mathcal{S}_{[1, N]}, \vec{P} \in \mathcal{L}_A^N$ on a

$$f(\vec{P} \circ \sigma) = f(\vec{P})$$

L'application f est dite Neutre *vis à vis des candidats* ssi, pour tous $\tau \in \mathcal{S}_A, \vec{P} \in \mathcal{L}_A^N$ on a

$$f(\tau \circ \vec{P}) = \tau(f(\vec{P}))$$

Dictateur

Un entier $i \in [1, N]$ est un dictateur (pour f) ssi, pour tout $\vec{P} \in \mathcal{L}_A^N$

$$f(\vec{P}) = a \Leftrightarrow [\forall b \in A, aP_i b.]$$

Théorème 1.2.1 (Muller-Satterthwait 1977) *Soit A un ensemble de cardinal ≥ 3 . Si $f : \mathcal{L}_A^N \rightarrow A$ est Pareto-efficiente et monotone, alors f est dictatoriale.*

Preuve : La preuve consiste, partant des hypothèses sur f , à construire des scénarios successifs (i.e. des formes de listes de préférences), de plus en plus généraux, pour lesquels on connaît les résultat de f . Le dernier scénario est si général que l'on peut conclure que f est dictatoriale.

Chaque scénario est décrit par un tableau de la liste des préférences des électeurs : pour tout $i \in [1, N]$, le candidat préféré du i -ème électeur (i.e. l'élément minimum de l'ordre linéaire P_i) est en première ligne de la i -ème colonne.

Étape 1 :

1	2	...	N	(1.7)
a	a	...	a	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
b	b	...	b	

Comme f est Pareto-efficiente, dans le scénario (1.7),

$$f(\vec{P}) = a$$

1	2	...	N	(1.8)
b	b	...	b	
a	a	...	a	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	

dans le scénario (1.8),

$$f(\vec{P}) = b.$$

1	2	...	i	$i+1$...	N	(1.9)
b	b	...	b	a	...	a	
a	a	...	a	\vdots	...	\vdots	
\vdots							
\vdots							
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	b	\vdots	b	

Montrons que, dans le scénario (1.9),

$$f(\vec{P}) \in \{a, b\}.$$

En effet, si dans le scénario (1.9), $f(\vec{P}) = c \notin \{a, b\}$, alors, par monotonie

1	2	...	i	$i+1$...	N
a	a	...	a	a	...	a
b	b	...	b	\vdots	...	\vdots
\vdots						
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	b	\vdots	b

(1.10)

dans le scénario (1.10), on aurait $f(\vec{P}) = c$, ce qui contredirait la Pareto-efficacité. Il existe un entier $n \in [1, N]$ tel que :

1	...	$n-1$	n	$n+1$...	N
b	...	b	a	a	...	a
a	...	a	\vdots	\vdots	...	\vdots
\vdots						
\vdots	\vdots	\vdots	b	b	\vdots	b

(1.11)

1	...	$n-1$	n	$n+1$...	N
b	...	b	b	a	...	a
a	...	a	a	\vdots	...	\vdots
\vdots						
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	b	\vdots	b

(1.12)

dans le scénario (1.11), $f(\vec{P}) = a$ et dans le scénario (1.12), $f(\vec{P}) = b$.

1	...	$n-1$	n	$n+1$...	N
b	...	b	a	a	...	a
a	...	a	b	\vdots	...	\vdots
\vdots						
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	b	\vdots	b

(1.13)

Comme f est monotone, les scénarios (1.11)(1.13) ont le même résultat par f :

$$f(\vec{P}) = a.$$

Etape 2 :

1	...	$n-1$	n	$n+1$...	N
b	...	b	b	\vdots	...	\vdots
\vdots	...	\vdots	a	\vdots	...	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	a	\vdots	a
a	\vdots	a	\vdots	b	\vdots	b

(1.14)

Comme f est monotone, le résultat b dans le scénario (1.12) entraîne que, dans le scénario (1.14), $f(\vec{P}) = b$.

1	...	$n-1$	n	$n+1$...	N
b	...	b	a	\vdots	...	\vdots
\vdots	...	\vdots	b	\vdots	...	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	a	\vdots	a
a	\vdots	a	\vdots	b	\vdots	b

(1.15)

Examinons le scénario (1.15) :

- si $f(\vec{P}) = b$, alors par monotonie on aurait $f(\vec{P}) = b$ dans le scénario (1.13), ce qui n'est pas
- si $f(\vec{P}) = c \notin \{a, b\}$, alors par monotonie on aurait $f(\vec{P}) = c$ dans le scénario (1.14), ce qui n'est pas.

donc $f(\vec{P}) = a$.

Etape 3 :

Soit $c \notin \{a, b\}$. Considérons le scénario :

1	...	$n-1$	n	$n+1$...	N
\vdots	...	\vdots	a	\vdots	...	\vdots
c	...	c	c	c	...	c
b	\vdots	b	b	a	\vdots	a
a	\vdots	a	\vdots	b	\vdots	b

(1.16)

Par monotonie, comme dans le scénario (1.15) $f(\vec{P}) = a$, dans le scénario (1.16) $f(\vec{P}) = a$.

Etape 4 :

1	...	$n-1$	n	$n+1$...	N
\vdots	...	\vdots	a	\vdots	...	\vdots
c	...	c	c	c	...	c
b	\vdots	b	b	b	\vdots	b
a	\vdots	a	\vdots	a	\vdots	a

(1.17)

Par comparaison avec le scénario (1.16), dans le scénario (1.17) on a $f(\vec{P}) \in \{a, b\}$.

Mais si $f(\vec{P}) = b$, alors la valeur de f serait encore b dans le scénario (1.18) ci-dessous :

1	...	$n-1$	n	$n+1$...	N
c	...	c	c	c	...	c
\vdots	...	\vdots	a	\vdots	...	\vdots
b	\vdots	b	b	b	\vdots	b
a	\vdots	a	\vdots	a	\vdots	a

(1.18)

ce qui contredirait la Pareto-efficience. Donc dans le scénario (1.17) $f(\vec{P}) = a$.

Etape 5 :

Soit $\vec{P} \in \mathcal{L}_A^N$ tel que $P_n = (a, \dots)$ (i.e. a est l'élément préféré de n). Par comparaison avec le

scénario (1.17) et en tenant compte de la monotonie de f , $f(\vec{P}) = a$.

Ce raisonnement en 5 étapes est valable pour tout $a \in A$. Donc, pour tout $a \in A$ il existe un entier $n_a \in [1, N]$ qui est un dictateur pour f et a :

$$\forall a \in A, \forall \vec{P} \in \mathcal{L}_A^N, P_{n_a} = (a, \dots) \Rightarrow f(\vec{P}) = a.$$

Si il existe $a \neq a' \in A$ tels que $n_a \neq n_{a'}$, alors, en choisissant un $\vec{P} \in \mathcal{L}_A^N$ tel que $P_{n_a} = (a, \dots)$ et $P_{n_{a'}} = (a', \dots)$ on aurait

$$f(\vec{P}) = a = a',$$

ce qui est contradictoire. Donc il existe un entier $n \in [1, N]$ qui est un dictateur pour f . \square

Théorème 1.2.2 (Gibbard-Satterthwait 1973) *Soit A un ensemble de cardinal ≥ 3 .*

Si $f : \mathcal{S}_A^N \rightarrow A$ est surjective et non-manipulable, alors f est dictatoriale.

Esquisse de preuve : Il suffit de montrer que toute fonction $f : \mathcal{S}_A^N \rightarrow A$ surjective et non-manipulable est aussi Pareto-efficace et monotone, puis d'appliquer le théorème précédent. \square

1.3 Agrégation des préférences

Théorème de Arrow,
à écrire

Chapitre 2

Les jeux

jeux extensifs ; th de Von Neumann
jeux matriciels : equilibres de Nash en strat pures.
max-min, notion de valeur d'un jeu.

Chapitre 3

Équilibres de Nash

3.1 Théorème de Kakutani

Nous présentons ici un théorème de point fixe qui est l'outil central utilisé par J. Nash pour prouver l'existence d'équilibres dans certains jeux (voir la section suivante). Nous procédons en trois étapes :

- le lemme de Sperner
- le théorème de point fixe de Brouwer
- le théorème de Kakutani proprement dit.

3.1.1 Préliminaires

Definir :

- enveloppe convexe
- simplexe
- triangulation

3.1.2 Lemme de Sperner

Définition 3.1.1 Soit S le d -simplexe engendré par les points v^0, \dots, v^d . et T une triangulation de S . Pour tout point $x \in S$, notons (x_0, \dots, x_d) le vecteur des coordonnées barycentriques de x dans le repère affine v^0, \dots, v^d . On pose :

$$L(x) := \{i \in [0, d] \mid x_i > 0\}.$$

Un étiquetage des sommets de T sur $[0, d]$ est une application $\lambda : \text{Som}(T) \rightarrow [0, d]$ telle que,

$$\forall i \in [0, d], \lambda(v^i) = i.$$

L'étiquetage est propre si,

$$\forall x \in \text{Som}(T), \lambda(x) \in L(x).$$

Un simplexe $t \in T$, de dimension d , est dit *complètement* étiqueté ssi l'ensemble des couleurs de ses sommets est exactement $[0, d]$ (i.e. $\lambda(\text{Som}(t)) = [0, d]$).

Lemme 3.1.2 (Sperner) Soit T une triangulation d'un d -simplexe S et soit $\lambda : \text{Som}(T) \rightarrow [0, d]$ un étiquetage propre de T . Alors, T a un nombre impair de simplexes complètement-étiquetés.

Preuve : Par induction sur la dimension de S .

Base : $\dim(S) = 0$.

$S = \{v^0\}$. Donc $T = \{S\}$. Le nombre de simplexes complètement-étiquetés vaut 1.

Induction : $\dim(S) = d$.

Appelons *chambre* tout simplexe $t \in T$ de dimension d . Appelons *porte* tout simplexe $t \in T$, de dimension $(d - 1)$, étiqueté par $\{0, 1, \dots, d - 1\}$ (exactement).

Rappelons que la “frontière” de S est l’union des simplexes $\langle v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_d \rangle$.

Comptons le nombre de portes sur la frontière de S :

Si $i \neq d$: $\langle v^0, \dots, v^{i-1}, v^{i+1}, \dots, v^d \rangle$ ne contient aucune porte

Si $i = d$: $\langle v^0, \dots, v^{i-1}, v^{i+1}, \dots, v^d \rangle$ contient, par hypothèse de récurrence, un nombre impair de portes.

Comptons le nombre de portes d’une chambre t de T :

Si $\lambda(t) = \{0, 1, \dots, d\}$: une porte

Si $\lambda(t) = \{0, 1, \dots, d - 1\}$: deux portes

Si $\lambda(t) \not\supseteq \{0, 1, \dots, d - 1\}$: aucune porte

Appelons “chaîne” une suite alternée de portes et de chambres telle que, si une porte et une chambre se touchent, alors la porte est contenue dans la chambre. Une chaîne est dite “simple” si elle ne comporte aucune répétition, ni de porte, ni de chambre. Toute porte de la frontière est reliée par une chaîne simple maximale, soit à une autre porte de la frontière, soit à une chambre complètement étiquetée (et une seule). Il y a un nombre impair de portes sur la frontière : un nombre pair d’entre elles sont appariées deux à deux par une chaîne simple ; un nombre impair de ces portes aboutit à une chambre complètement étiquetée. Cette relation entre portes non-appariées de la frontière et chambres complètement étiquetées est une bijection, donc le nombre de chambres complètement étiquetées, *reliées à la frontière* (par une chaîne simple), est impair.

Soit C une chambre complètement étiquetée, non-reliée à la frontière : considérons la chaîne simple maximale c partant de C :

- si elle se termine par une porte P :

— soit P est sur la frontière (ce qui n’est pas),

— soit P touche C , ce qui implique, puisque C n’a qu’une porte et que c n’a pas de répétition de porte, que $c = (C, P)$; la porte P , qui n’est pas sur la frontière, appartient aussi à une chambre C' autre que C ; mais alors la chaîne c n’est pas maximale,

- si elle se termine par une chambre C' qui a deux portes :

alors $C \neq C'$ (car la chaîne est simple) ; soit P la seconde porte de C' :

— si P était déjà dans c , alors C' était aussi déjà dans c , ce qui contredit la simplicité de c ;

— si P n’était pas dans c , alors la chaîne (c, P) est simple, ce qui contredit la maximalité de c .

Donc la chaîne simple maximale c partant de C se termine par une chambre $C' \neq C$ qui n’a qu’une porte. Finalement, les chambres complètement étiquetées, *non-reliées à la frontière* sont appariées deux à deux par une chaîne simple, et sont donc en nombre pair.

Le nombre total de chambres complètement étiquetées est donc impair. \square

3.1.3 Théorème de Brouwer

Théorème 3.1.3 (Brouwer 1910) *Soit S un simplexe de dimension d de \mathbb{R}^d et $f : D \rightarrow S$ une application continue. Alors, il existe $x \in S$ tel que $f(x) = x$.*

Preuve : Soit S un simplexe de dimension d de \mathbb{R}^d :

$$S = \langle v^0, \dots, v^i, \dots, v^d \rangle$$

Soit $f : D \rightarrow S$ une application continue. Soit T_δ une triangulation de S de maille δ . Définissons un étiquetage λ_δ des sommets s de T_δ sur $[0, d]$:

$$\lambda_\delta(s) := \min\{i \in [0, d] \mid (s)_i \geq (f(s))_i \text{ et } (s)_i > 0\}. \quad (3.1)$$

Fait 3.1.4 *L'application λ_δ est bien définie.*

Il suffit que l'ensemble en membre droit de (3.1) soit non-vidé : s est combinaison convexe des v^i :

$$s = \sum_{i=0}^d s_i v^i \text{ où } \sum_{i=0}^d s_i = 1 \text{ et } \forall i, s_i \geq 0.$$

Si on avait , $\forall i \in [0, d], s_i > 0 \Rightarrow (s)_i < (f(s))_i$ alors on aurait $1 = \sum_{i=0}^d s_i < \sum_{i=0}^d (f(s))_i = 1$ ce qui est impossible.

Fait 3.1.5 *L'application λ_δ est un étiquetage propre.*

En effet $\lambda_\delta(s)$ est un entier i tel que $s_i > 0$ donc $\lambda_\delta(s) \in L(s)$. q.e.d.

Considérons une suite de triangulations T_δ où δ tend vers 0. Par le lemme de Sperner, chaque triangulation T_δ possède un simplexe Δ_δ complètement étiqueté ; pour tout $i \in [0, d]$ notons

$$x_\delta^i$$

le sommet de Δ_δ étiqueté par i . Comme S est compact, il existe une sous-suite de triangulations telle que chaque suite de points x_δ^i converge (lorsque δ tend vers 0) vers un point $x^i \in S$. Comme δ tend vers 0,

$$x^0 = x^1 = \dots = x^i = \dots = x^d.$$

Notons x ce point.

Fait 3.1.6 *Pour tout $i \in [0, d]$, $(x)_i \geq (f(x))_i$*

Supposons que $(x)_i < (f(x))_i$. Posons $\varepsilon = (f(x))_i - (x)_i$.

Comme f est continue et l'application $v \mapsto (v)_i$ est continue,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^i)_i = (x)_i \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n^i))_i = (f(x))_i$$

Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N \Rightarrow |(x_n^i)_i - (x)_i| \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ et } n \geq N \Rightarrow |(f(x_n^i))_i - (f(x))_i| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Donc

$$(f(x_N^i))_i \geq \frac{\varepsilon}{3} + (x_N^i)_i$$

ce qui contredit le fait que $\lambda(x_N^i) = i$. q.e.d.

Sachant que $\sum_{i=0}^d (x)_i = \sum_{i=0}^d (f(x))_i$, le fait 3.1.6, entraîne que pour tout $i \in [0, d]$, $(x)_i \geq (f(x))_i$, donc que $x = f(x)$. \square

3.1.4 Théorème de Kakutani

Nous prouvons tout d'abord ce lemme dont nous déduirons ensuite le théorème de Kakutani.

Lemme 3.1.7 *Soit S un simplexe de dimension d et soit $f \subseteq S \times S$. Si*

1- $\forall x \in S$, $f(x)$ est convexe, non-vide

2- f est une partie fermée de $S \times S$,

alors $\exists x^* \in S \mid x^* \in f(x^*)$.

Preuve : Soit T^n la nième subdivision barycentrique de S .

Définissons une application $\Phi_n : \text{Som}(T) \rightarrow S$ par :

$$\Phi_n(s) := y$$

où l'on choisit $y \in f(s)$ (grâce à l'hypothèse 1, via l'axiome du choix¹).

On étend ensuite Φ_n à S tout entier en une application convexe sur chaque cellule de T . Par le théorème de point-fixe de Brouwer, Φ_n a un point fixe :

$$x_n \in S, \Phi_n(x_n) = x_n.$$

Comme S est compact, il existe une injection $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et un point $x \in S$ tels que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{\alpha(n)} = x.$$

Montrons maintenant que $x \in f(x)$.

Comme Φ_n est convexe sur chaque cellule de T^n , pour tout n , il existe des sommets x_n^i de même cellule de T^n et des coefficients $\mu_n^i \in [0, 1]$, avec $\mu_n^i \geq 0$ et $\sum_{i=0}^d \mu_n^i = 1$, tels que

$$x_n = \sum_{i=0}^d \mu_n^i \Phi_n(x_n^i) \quad (3.2)$$

Notons $y_n^i := \Phi_n(x_n^i)$ (on sait que $y_n^i \in f(x_n^i)$).

Par extractions successives de suites convergentes (à partir de suites à valeur dans des espaces compacts) on obtient une injection $\beta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que

$$x_{\beta(n)} \rightarrow x, \quad x_{\beta(n)}^i \rightarrow x, \quad \mu_{\beta(n)}^i \rightarrow \mu^i, \quad y_{\beta(n)}^i \rightarrow y^i.$$

Comme la suite $(x_{\beta(n)}^i, y_{\beta(n)}^i)$ a toutes ses valeurs dans f , qui est fermé (hypothèse 2), sa limite appartient à f :

$$y^i \in f(x).$$

En passant à la limite dans l'égalité (3.2) on obtient :

$$x = \sum_{i=0}^d \mu^i y^i$$

avec $\mu^i \geq 0$ et $\sum_{i=0}^d \mu^i = 1$, et comme chaque y^i appartient au convexe $f(x)$ on a bien

$$x \in f(x).$$

□

1. on peut aussi choisir y comme le point *lexicographiquement le plus petit*, car $f(x)$ est un fermé borné

Théorème 3.1.8 (Kakutani 1941) Soit X un sous-espace compact, convexe de \mathbb{R}^n et $f \subseteq X \times X$.
Si

- 1- $\forall x \in X, f(x)$ est convexe, non-vide
 - 2- f est une partie fermée de $X \times X$,
- alors $\exists x^* \in X \mid x^* \in f(x^*)$.

Preuve : Soit E le sous-espace affine engendré par X . Notons d sa dimension. Comme X est compact, il existe un simplexe de E , S' , de dimension d , contenant X . Soit P un point de l'intérieur de X dans E (un tel point existe : par exemple l'équibarycentre de $d + 1$ affinement indépendants de X). À un isomorphisme affine près, on peut supposer que $E = \mathbb{R}^d$ et que $P = 0$. On définit alors une application $f' : S' \rightarrow 2^{S'}$ par :

$$f'(s) := f(M(s) \cdot s)$$

où

$$\forall s \in \mathbb{R}^d, M(s) := \max\{m \in [0, 1] \mid m \cdot s \in X\}.$$

Remarquons que f' prolonge f : si $s \in X$ alors $M(s) = 1$.

Remarquons aussi que $\forall s' \in S', \exists s \in X \mid f'(s') = f(s)$. Donc f' vérifie l'hypothèse 1.

Fait 3.1.9 La fonction $M : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ est continue.

Montrons tout d'abord que

$$\forall s \in X, \forall \varepsilon > 0, (1 - \varepsilon)s \in \overset{\circ}{X}$$

En effet, comme 0 appartient à $\overset{\circ}{X}$, il existe un rayon $r > 0$ tel que $B(0, r) \subseteq X$. Soit $u \in B(0, \varepsilon \cdot r)$.

$$(1 - \varepsilon)s + u = (1 - \varepsilon) \cdot s + \varepsilon \cdot \frac{u}{\varepsilon}$$

Comme $s \in X, \frac{u}{\varepsilon} \in B(0, r) \subseteq X$ et X est convexe

$$(1 - \varepsilon)s + u \in X$$

Nous avons ainsi montré que

$$B((1 - \varepsilon)s, \varepsilon \cdot r) \subseteq X$$

donc que $(1 - \varepsilon)s \in \overset{\circ}{X}$.

Soit $s \in \mathbb{R}^d$ et $m = M(s)$.

cas 1 : $m < 1$.

Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que,

$$(m + \varepsilon)s \notin X, (m - \varepsilon)s \in \overset{\circ}{X}.$$

Comme $\mathbb{R}^d - X$ est ouvert, il existe $r_1 > 0$ tel que

$$\forall s' \in \mathbb{R}^d, \|s' - s\| \leq r_1 \Rightarrow (m + \varepsilon)s' \notin X$$

Comme $\overset{\circ}{X}$ est ouvert, il existe $r_2 > 0$ tel que

$$\forall s' \in \mathbb{R}^d, \|s' - s\| \leq r_2 \Rightarrow (m - \varepsilon)s' \in \overset{\circ}{X}$$

En prenant $r := \min\{r_1, r_2\}$ on obtient que

$$\|s' - s\| \leq r \Rightarrow M(s') \in [m - \varepsilon, m + \varepsilon].$$

cas 2 : $m = 1$.

Par un raisonnement analogue on trouve qu'il existe $r_1 > 0$ tel que

$$\|s' - s\| \leq r_1 \Rightarrow M(s') \in [1 - \varepsilon, 1].$$

q.e.d.

Montrons maintenant que f' est fermée.

Soit $(s_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de couples de f' , convergeant vers un couple $(s, y) \in E$. Par continuité de M :

$$s_n \rightarrow s, \quad M(s_n) \rightarrow M(s), \quad M(s_n) \cdot s_n \rightarrow M(s) \cdot s$$

Comme f est fermée et $\forall n \in \mathbb{N}, (M(s_n) \cdot s_n, y_n) \in f$

$$(M(s) \cdot s, y) \in f$$

donc, par définition de f' ,

$$(s, y) \in f'.$$

Par le Lemme 3.1.7 f' admet un point $x^* \in f'(x^*)$. Mais $\text{Im}(f') \subseteq X$ donc $x^* \in X$ et $x^* \in f(x^*)$. \square

3.2 Théorème de Nash

Théorème 3.2.1 (Nash 1950) *Soit Γ un jeu matriciel fini. Alors, l'extension mixte Γ_m de Γ admet un équilibre de Nash.*

Précisons les notations.

Γ est un jeu à N joueurs. Le joueur i ($i \in [1, N]$) a un ensemble de stratégies (fini) S_i . On rappelle que $\Delta(S_i)$ est l'ensemble des distributions de probabilités sur S_i (c'est un simplexe de dimension $\text{Card}(S_i) - 1$). Pour tout t-uple de "stratégies mixtes" $(\sigma_1, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_N) \in \prod_{i=1}^N \Delta(S_i)$ le *gain* du joueur i est un nombre réel $R_i(\sigma_1, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_N)$:

$$R_i : \prod_{i=1}^N \Delta(S_i) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Chaque R_i est une application "exactement convexe" : $\forall j \in [1, N], p \in [0, 1], \sigma, \sigma' \in S_j$

$$\begin{aligned} R_i(\sigma_1, \dots, \sigma_{j-1}, p\sigma + (1-p)\sigma', \sigma_{j+1}, \dots, \sigma_N) &= p \cdot R_i(\sigma_1, \dots, \sigma_{j-1}, \sigma, \sigma_{j+1}, \dots, \sigma_N) \\ &+ (1-p) \cdot R_i(\sigma_1, \dots, \sigma_{j-1}, \sigma', \sigma_{j+1}, \dots, \sigma_N). \end{aligned}$$

Fait 3.2.2 *L'espace $X := \prod_{i=1}^N \Delta(S_i)$ est une partie compacte et convexe de \mathbb{R}^d , où $d := \sum_{i=1}^N \text{Card}(S_i)$.*

En effet, X est le produit direct des simplexes $\Delta(S_i)$. Comme un produit de convexes est convexe, il est convexe. Comme un produit de fermés bornés est fermé et borné, il est fermé et borné, donc c'est une partie compacte de \mathbb{R}^d . q.e.d.

Définissons pour tout $i \in [1, n]$ l'application $f_i : X \rightarrow 2^{\Delta(S_i)}$ par

$$f_i(\sigma_1, \dots, \sigma_N) = \{\sigma \in \Delta(S_i) \mid R_i(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_N) \text{ est maximal}\}$$

puis $f : X \rightarrow 2^X$ par

$$f(\vec{\sigma}) := f_1(\vec{\sigma}) \times \dots \times f_i(\vec{\sigma}) \dots \times f_N(\vec{\sigma}).$$

Fait 3.2.3 Pour tout $\vec{\sigma} \in X$, $f(\vec{\sigma})$ est convexe et non-vide.

Prouvons-le pour chaque f_i :

- comme R_i est continue et $\Delta(S_i)$ est compact, R_i atteint son maximum, donc $f_i(\vec{\sigma})$ est non-vide
- comme R_i est exactement convexe (en particulier concave), si $R_i(\sigma_{-i}, *)$ atteint son maximum v en τ et en τ' , alors $R_i(\sigma_{-i}, p\tau + (1-p)\tau') = pv + (1-p)v = v$ donc $p\tau + (1-p)\tau' \in f_i(\vec{\sigma})$. L'ensemble $f_i(\vec{\sigma})$ est donc convexe.
- $f(\vec{\sigma})$ est le produits de convexes non-vides, donc est convexe non-vide. q.e.d.

Fait 3.2.4 f est une partie fermée de $X \times X$.

Soit $(\vec{\sigma}(n), \vec{\tau}(n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de f convergeant vers $(\vec{\sigma}, \vec{\tau}) \in X \times X$.

Soit $i \in [1, n]$, soit $\xi \in \Delta(S_i)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par définition de f_i on a :

$$R_i(\vec{\sigma}_{-i}(n), \tau_i(n)) \geq R_i(\vec{\sigma}_{-i}(n), \xi) \quad (3.3)$$

Comme R_i est continue, par passage à la limite dans l'inégalité (3.3) on obtient :

$$R_i(\vec{\sigma}_{-i}, \tau_i) \geq R_i(\vec{\sigma}_{-i}, \xi) \quad (3.4)$$

ce qui montre que $(\vec{\sigma}, \vec{\tau}) \in f$. q.e.d.

Prouvons maintenant le théorème de Nash.

Preuve : D'après le fait 3.2.2 X est une partie convexe compacte de \mathbb{R}^d et, d'après les faits (3.2.3-3.2.4) l'application $f : X \rightarrow 2^X$ vérifie les hypothèses (1) et (2) du théorème de Kakutani. Donc f admet un "point fixe" $\vec{\sigma}^*$ i.e.

$$\vec{\sigma}^* \in f(\vec{\sigma}^*).$$

Par définition de f , cela signifie que : pour tout $\xi \in \Delta(S_i)$:

$$R_i(\vec{\sigma}_{-i}^*, \xi) \leq R_i(\vec{\sigma}_{-i}^*, \sigma_i^*).$$

i.e. $\vec{\sigma}^*$ est un équilibre de Nash. \square

Jeux a somme nulle: theoreme maxmin de Von-Neumann

Chapitre 4

Jeux de Blackwell

jeux de Blackwell
cas non-determine : AC et AD sont incompatibles
cas de jeu associe a un automate : Buchi-Muller-Parite
strategie sans-memoire
expression en mu-calcul

Chapitre 5

Automates sur les mots infinis

MSO versus automates
automates versus jeux

Chapitre 6

Logique

Th de Rabin
Th de Muchnik.