

Jeux-Langages-Logique

Examen du 06/01/16

Sujet de M. Sénizergues ;

Tous documents autorisés ; durée conseillée : 1h 30.

Les exercices sont indépendants. La note obtenue à cette moitié de l'examen sera $\min\{exo1 + exo2 + exo3, 10\}$.

On peut admettre le résultat d'une question et néanmoins l'utiliser dans les questions qui suivent.

Exercice 1 (10 pts) Systèmes de vote

On considère un entier N (le nombre d'électeurs), un ensemble fini A (l'ensemble des alternatives), l'ensemble \mathcal{L}_A des ordres linéaires sur A et une application $f : \mathcal{L}_A^N \rightarrow A$ (une fonction de choix).

Neutralité

On voit ici \mathcal{L}_A comme l'ensemble des bijections $[1, |A|] \rightarrow A$. Pour tout ensemble E , on note \mathcal{S}_E l'ensemble des bijections de E dans E .

L'application f est dite neutre *vis à vis des électeurs* ssi, pour tous $\sigma \in \mathcal{S}_{[1,N]}$, $\vec{P} \in \mathcal{L}_A^N$ on a

$$f(\vec{P} \circ \sigma) = f(\vec{P})$$

L'application f est dite neutre *vis à vis des candidats* ssi, pour tous $\tau \in \mathcal{S}_A$, $\vec{P} \in \mathcal{L}_A^N$ on a

$$f(\tau \circ \vec{P}) = \tau(f(\vec{P})).$$

L'application f est dite neutre ssi [f est neutre *vis à vis des électeurs* et f est neutre *vis à vis des candidats*].

U-croissance

L'application f est dite “unanimement-croissante” ssi, pour tout $\vec{P} \in \mathcal{L}_A^N$, pour tous $a, b \in A$,

$$(\forall i \in [1, N], a P_i b) \Rightarrow f(\vec{P}) \neq b$$

i.e. si le candidat a est *unanimement* préféré à b , alors b ne peut pas être élu.

(On écrira, en abrégé, que f est “U-croissante”).

1- On suppose $|A| = 2$ et N impair. Donner une fonction de choix $f : \mathcal{L}_A^N \rightarrow A$ qui est neutre et U-croissante.

2- On suppose $|A| = 3$ et $N = 7$. Donner une fonction de choix $f : \mathcal{L}_A^N \rightarrow A$ qui est neutre et U-croissante.

Aide : on peut s'inspirer de l'idée du vote alternatif vue au TD 1.

Soit a le candidat qui est classé premier le plus souvent par les N électeurs.

Si a a la majorité absolue (strictement) alors il est élu ($f(\vec{P}) := a$).

Sinon : soit b le candidat qui est classé premier le moins souvent par les n électeurs : b est éliminé. En enlevant b des classements des électeurs on obtient une nouvelle suite $\vec{P}' \in \mathcal{L}_{A \setminus \{b\}}^N$.

On pose $f(\vec{P}) := f(\vec{P}')$.

3- On suppose $|A| = 3$ et $N = 8$.

3.1 Donner une fonction de choix $f : \mathcal{L}_A^N \rightarrow A$ qui est neutre.

3.2 L'idée de la question 2 peut-elle être appliquée pour construire une fonction de choix neutre et U-croissante? où est la difficulté?

Nous cherchons à montrer que, si $|A|$ divise N , alors il n'existe pas de fonction de choix neutre.

4- Montrer que, si $|A|$ divise N , il existe $\tau \in \mathcal{S}_A$ telle que $\tau^N = \text{Id}_A$ (la permutation identité) et τ n'a pas de point fixe.

5- Supposons que $|A|$ divise N . Soit $P \in \mathcal{L}_A : P = (a_1, \dots, a_k, \dots, a_N)$. Choisissons $\tau \in \mathcal{S}_A$ et posons :

$$\vec{P} := (P, \tau \circ P, \tau^2 \circ P, \dots, \tau^{N-1} \circ P) \quad (1)$$

5.1 Montrer que, pour toute permutation τ telle que $\tau^N = \text{Id}_A$, il existe $\sigma \in \mathcal{S}_{[1,N]}$ telle que

$$\tau \circ \vec{P} = \vec{P} \circ \sigma$$

5.2 Montrer que, si f est une fonction de choix neutre, et \vec{P} est de la forme (1) avec $\tau^N = \text{Id}_A$, alors $f(\vec{P})$ est un point-fixe de τ .

5.3 Montrer que, si $|A|$ divise N , alors il n'existe pas de fonction de choix neutre pour l'ensemble d'alternatives A et N électeurs.

6*- Montrer que, si $|A|$ admet une décomposition en somme d'entiers positifs p_i

$$|A| = \sum_{i=1}^m p_i$$

où, pour tout $i \in [1, m]$, $\text{pgcd}(p_i, N) \geq 2$, alors il n'existe pas de fonction de choix neutre pour l'ensemble d'alternatives A et N électeurs.

Nous cherchons maintenant à caractériser les couples $(|A|, N)$ pour lesquels il existe une fonction de choix neutre et U-croissante.

7*- Montrer que, s'il existe un entier $d \in [2, |A|]$ qui divise N , alors il n'existe pas de fonction de choix neutre et U-croissante pour l'ensemble d'alternatives A et N électeurs.

Aide : reprendre l'idée de la question 5 mais :

- en choisissant une permutation τ qui admet éventuellement des points fixes
- en choisissant un ordre linéaire P qui place les points-fixes de τ en "mauvaise posture" pour être élus.

8- Montrer que, si aucun entier $d \in [2, |A|]$ ne divise N , alors il existe une fonction de choix neutre et U-croissante pour l'ensemble d'alternatives A et N électeurs.

Exercice 2 (10 pts) Équilibres de Nash

On considère le jeu matriciel Γ , nommé “dilemme du prisonnier” :

	T	C
T	(1, 1)	(3, 0)
C	(0, 3)	(2, 2)

On rappelle que T évoque “trahir” et C évoque “coopérer”.

1- Ce jeu a-t-il un (ou plusieurs) équilibre de Nash en stratégies pures ?

Le but de l'exercice est de montrer que, en *itérant* ce jeu matriciel, on obtient un jeu où des comportements de *coopération* peuvent être des équilibres de Nash. Le phénomène nouveau est que, si le joueur 1 (resp. 2) trahit, il s'expose à une *punition* du joueur 2 (resp. 1) dans la suite du jeu.

Le jeu itéré Γ^δ (où δ est un nombre réel $\delta \in]0, 1[$) est défini comme suit :

- on note $S_1 = S_2 = \{T, C\}$
- pour tous $s_1 \in S_1, s_2 \in S_2$, on note $r_i(s_1, s_2)$ le gain du joueur i sur la partie (s_1, s_2) dans le jeu Γ
- une partie de Γ^δ est un mot infini $h = h^1 \dots h^t \dots \in (S_1 \times S_2)^{\mathbb{N} \setminus \{0\}}$
- au t -ième tour du jeu, J1 (resp. J2), connaissant l'histoire $h^1 \dots h^{t-1}$ (qui est le mot vide si $t = 1$), choisit un “coup” $h_1^t \in S_1$ (resp. $h_2^t \in S_2$)
- le gain du joueur i ($i \in \{1, 2\}$) sur la partie h est défini par

$$R_i(h) := (1 - \delta) \cdot \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} \cdot r_i(h_1^t, h_2^t) \quad (2)$$

i.e. le gain du joueur i est la moyenne de ses gains, dans le jeu Γ , aux tours $1, 2, \dots, t, \dots$ pondérés par les coefficients $\delta^0, \delta^1, \dots, \delta^{t-1}, \dots$

- une *stratégie* (pure) du joueur i est une application $\sigma_i : \bigcup_{t \geq 1} (S_1 \times S_2)^{t-1} \rightarrow S_i$
- la partie $h(\sigma_1, \sigma_2)$ associée au couple de stratégies (σ_1, σ_2) est la seule suite $h \in (S_1 \times S_2)^{\mathbb{N} \setminus \{0\}}$ telle que, pour tout entier $t \in [1, \infty[$:

$$h^t = (\sigma_1(h^1, \dots, h^{t-1}), \sigma_2(h^1, \dots, h^{t-1})).$$

- on note $R_i(\sigma_1, \sigma_2)$ le gain du joueur i avec le couple de stratégies (σ_1, σ_2) ; il s'agit de son gain sur la partie $h(\sigma_1, \sigma_2)$ (au sens de la formule (2)).

Exemple : pour les parties

$$h := (C, T)(T, C)(C, T)(T, C) \dots, \quad h' := (C, T)(C, C)(C, T)(C, C) \dots$$

i.e. plus formellement, $h := ((C, T)(T, C))^\omega$, $h' := ((C, T)(C, C))^\omega$, on a les gains suivants :

$$\begin{aligned} R_1(h) &= (1 - \delta)(0 + 3\delta + 0 + 3\delta^3 + \dots) = 3(1 - \delta)\delta \frac{1}{1 - \delta^2} = \frac{3\delta}{1 + \delta}, \\ R_2(h) &= (1 - \delta)(3 + 0 + 3\delta^2 + \dots) = (1 - \delta) \frac{3}{1 - \delta^2} = \frac{3}{1 + \delta}, \\ R_1(h') &= (1 - \delta)(0 + 2\delta + 0 + 2\delta^3 + \dots) = \frac{2\delta}{1 + \delta}, \end{aligned}$$

2- Calculer $R_2(h')$.

Trahir Toujours

Notons TT la stratégie du joueur J1 (resp. J2) définie par : pour toute histoire $(h^1 \cdots h^{t-1}) \in (S_1 \times S_2)^{t-1}$:

$$\text{TT}(h^1 \cdots h^{t-1}) = T.$$

3- Montrer que $R_1(\text{TT}, \text{TT}) = 1$.

4- Montrer que, pour toute stratégie σ_1 du joueur J1, $R_1(\sigma_1, \text{TT}) \leq 1$.

5- Montrer que, pour tout $\delta \in]0, 1[$, (TT, TT) est un équilibre de Nash du jeu Γ^δ .

Punir Éternellement

Notons PE la stratégie du joueur Ji définie par : pour toute histoire $h^1 \cdots h^{t-1} \in (S_1 \times S_2)^{t-1}$:

$$\text{PE}(h^1 \cdots h^{t-1}) = T \text{ si } \exists t_0 \in [1, t-1], h_{3-i}^{t_0} = T, \quad \text{PE}(h^1 \cdots h^{t-1}) = C \text{ sinon}$$

i.e. Ji coopère tant que son partenaire coopère, et trahit éternellement, dès que son partenaire a trahi au moins une fois.

6- Montrer que $R_1(\text{PE}, \text{PE}) = 2$.

7- Soit $t_0 \in [1, \infty[$. Soit h est une partie où J1 coopère aux tours $t \in [1, t_0 - 1]$ et trahit aux tours $t \in [t_0, \infty[$, alors que J2 joue la stratégie PE. Montrer que

$$R_1(h) = 2 + \delta^{t_0-1}(1 - 2\delta).$$

8- Pour quelles valeurs de δ le couple (PE, PE) est-il un équilibre de Nash du jeu Γ^δ ?

On dit que (σ_1, σ_2) est un équilibre de Nash *uniforme* de la famille de jeux $(\Gamma^\delta)_{\delta \in]0, 1[}$ si,

$$\exists \delta_0 \in [0, 1[, \forall \delta \in]\delta_0, 1[, (\sigma_1, \sigma_2) \text{ est un équilibre de Nash de } \Gamma^\delta.$$

9- Montrer que (PE, PE) est un équilibre de Nash uniforme de la famille $(\Gamma^\delta)_{\delta \in]0, 1[}$.

Punir et Pardonner

Notons PP_k (où k est un entier non nul), la stratégie du joueur Ji définie par :

$$\begin{aligned} \text{PP}_k(h^1 \cdots h^{t-1}) &= T \text{ si } \exists t_0 \in [t-k, t-1], [(t_0 = 1 \text{ ou } h^{t_0-1} = (C, C)) \text{ et } h^{t_0} \neq (C, C)], \\ \text{PP}_k(h^1, \dots, h^{t-1}) &= C \text{ sinon} \end{aligned}$$

i.e. Ji coopère tant que son partenaire coopère, et trahit pendant k coups, dès que son partenaire (ou lui-même) a trahi, puis redevient coopératif.

10- Soit $\delta \in]0, 1[$. Montrer que, $(\text{PP}_1, \text{PP}_1)$ n'est pas un équilibre de Nash de Γ^δ .

11- Soit h est une partie où J2 joue la stratégie PP_k et J1 joue la stratégie PP_k à tous les tours d'ordre $t \neq t_0$ mais trahit au coup $t_0 \in [1, \infty[$.

11.1 Vérifier que

$$h = (C, C)^{t_0-1} \cdot (T, C) \cdot (T, T)^k \cdot (C, C)^\omega$$

11.2 Montrer que

$$R_1(h) = 2 + (1 - \delta)\delta^{t_0-1}(1 - \delta - \delta^2 - \dots - \delta^k).$$

12- On note φ la racine réelle positive de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$. Soit $\delta \in]\varphi, 1[$.

12.1 Soit h une partie où J2 joue la stratégie PP₂ (à tous les tours), et J1 joue la stratégie

PP_2 à tous les tours d'ordre $t \leq t_0 - 1$ mais trahit au tour $t_0 \in [1, \infty[$. Montrer que

$$R_1(h) \leq 2 + (1 - \delta)\delta^{t_0-1}(1 - \delta - \delta^2).$$

12.2 Montrer que $(\text{PP}_2, \text{PP}_2)$ est un équilibre de Nash de Γ^δ .

13- Le couple de stratégies $(\text{PP}_2, \text{PP}_2)$ est-il un équilibre de Nash uniforme de la famille $(\Gamma^\delta)_{\delta \in]0,1[}$?

14- Pour quelles valeurs de $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ est-il vrai que $(\text{PP}_k, \text{PP}_k)$ est un équilibre de Nash uniforme de la famille $(\Gamma^\delta)_{\delta \in]0,1[}$?

Exercice 3 (10 pts) Logique

On considère dans cet exercice la structure

$$\langle A^*, (s_a)_{a \in A} \rangle.$$

Chaque symbole s_a est un symbole de prédicat binaire qui prend deux arguments du premier ordre. Il est interprété, dans cette structure, par : pour tous $u, v \in A^*$

$$s_a(u, v) \text{ signifie que } v = u \cdot a.$$

Soit S , une partie finie de $A^* \times A^*$. On dit que S est système de *réécriture* fini. La relation de réduction linéaire droite immédiate, notée $\xrightarrow{\text{ld}}_S$ est définie par :

pour tous $f, g \in X^*$, $f \xrightarrow{\text{ld}}_S g$ ssi il existe $(u, v) \in S$ et $\alpha \in X^*$ tels que $f = \alpha u$ et $g = \alpha v$.

La relation de réduction linéaire droite, notée $\xrightarrow{*}_{\text{ld}}_S$, est la clôture réflexive et transitive de la relation $\xrightarrow{\text{ld}}_S$.

1- Montrer qu'il existe une formule, dans la logique MSO sur la signature $(s_a)_{a \in A}$, $\text{RI}(x, y)$, à deux variables libres x, y , qui exprime que $x \xrightarrow{\text{ld}}_S y$.

2- Montrer qu'il existe une formule MSO $\text{R}(x, y)$ à deux variables libres x, y , qui exprime que $x \xrightarrow{*}_{\text{ld}}_S y$.

3- Montrer que, pour tout ensemble rationnel de mots $L \subseteq A^*$, l'ensemble des descendants de L pour la relation $\xrightarrow{*}_{\text{ld}}_S$

$$\Delta_S^*(L) := \{v \in A^* \mid \exists u \in L, u \xrightarrow{*}_{\text{ld}}_S v\}$$

est *rationnel*.

Aide : on se rappellera que les parties rationnelles de A^* sont exactement les parties *définissables* en logique MSO sur la signature $(s_a)_{a \in A}$.

Une relation binaire \rightarrow sur un ensemble E est dite :

- *sans-boucle* ssi, il n'existe pas de $e \in E$ tel que $e \rightarrow^+ e$.
- *noethérienne* ssi, pour toute suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $e_n \rightarrow e_{n+1}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $e_n = e_{n+1}$.

4- Montrer que le problème suivant est décidable :

donnée : une partie finie de S de $A^* \times A^*$.

question : la relation $\xrightarrow{\text{ld}}_S$ est-elle sans-boucle ?

5*- Montrer qu'il existe une formule MSO $\text{Inf}(X)$, à une variable libre X d'ordre 2, qui exprime que l'ensemble X est infini.

Aide : une partie L de A^* est infinie ssi l'ensemble de ses préfixes contient une partie infinie, totalement ordonnée pour l'ordre préfixe (une "branche infinie").

6- Montrer que le problème suivant est décidable :

donnée : une partie finie de S de $A^* \times A^*$. *question* : la relation $\xrightarrow{\text{ld}}_S$ est-elle noethérienne ?