

**Jeux-Langages-Logique**  
Examen du 06/01/16

Sujet de M. Sénizergues ;

Tous documents autorisés ; durée conseillée : 1h 30.

Les exercices sont indépendants. La note obtenue à cette moitié de l'examen sera  $\min\{exo1 + exo2 + exo3, 10\}$ .

On peut admettre le résultat d'une question et néanmoins l'*utiliser* dans les questions qui suivent.

**Exercice 1** (10 pts) **Systèmes de vote**

On considère un entier  $N$  (le nombre d'électeurs), un ensemble fini  $A$  (l'ensemble des alternatives), l'ensemble  $\mathcal{L}_A$  des ordres linéaires sur  $A$  et une application  $f : \mathcal{L}_A^N \rightarrow A$  (une fonction de choix).

Neutralité

On voit ici  $\mathcal{L}_A$  comme l'ensemble des bijections  $[1, |A|] \rightarrow A$ . Pour tout ensemble  $E$ , on note  $\mathcal{S}_E$  l'ensemble des bijections de  $E$  dans  $E$ .

L'application  $f$  est dite neutre *vis à vis des électeurs* ssi, pour tous  $\sigma \in \mathcal{S}_{[1,N]}$ ,  $\vec{P} \in \mathcal{L}_A^N$  on a

$$f(\vec{P} \circ \sigma) = f(\vec{P})$$

L'application  $f$  est dite neutre *vis à vis des candidats* ssi, pour tous  $\tau \in \mathcal{S}_A$ ,  $\vec{P} \in \mathcal{L}_A^N$  on a

$$f(\tau \circ \vec{P}) = \tau(f(\vec{P})).$$

L'application  $f$  est dite neutre ssi [ $f$  est neutre *vis à vis des électeurs* et  $f$  est neutre *vis à vis des candidats*].

U-croissance

L'application  $f$  est dite "unanimentement-croissante" ssi, pour tout  $\vec{P} \in \mathcal{L}_A^N$ , pour tous  $a, b \in A$ ,

$$(\forall i \in [1, N], aP_i b) \Rightarrow f(\vec{P}) \neq b$$

i.e. si le candidat  $a$  est *unanimentement* préféré à  $b$ , alors  $b$  ne peut pas être élu.

(On écrira, en abrégé, que  $f$  est "U-croissante").

1- On suppose  $|A| = 2$  et  $N$  impair. Donner une fonction de choix  $f : \mathcal{L}_A^N \rightarrow A$  qui est neutre et U-croissante.

2- On suppose  $|A| = 3$  et  $N = 7$ . Donner une fonction de choix  $f : \mathcal{L}_A^N \rightarrow A$  qui est neutre et U-croissante.

Aide : on peut s'inspirer de l'idée du vote alternatif vue au TD 1.

Soit  $a$  le candidat qui est classé premier le plus souvent par les  $N$  électeurs.

Si  $a$  a la majorité absolue (strictement) alors il est élu ( $f(\vec{P}) := a$ ).

Sinon : soit  $b$  le candidat qui est classé premier le moins souvent par les  $n$  électeurs :  $b$  est éliminé. En enlevant  $b$  des classements des électeurs on obtient une nouvelle suite  $\vec{P}' \in \mathcal{L}_{A \setminus \{b\}}^N$ .

On pose  $f(\vec{P}) := f(\vec{P}')$ .

3- On suppose  $|A| = 3$  et  $N = 8$ .

3.1 Donner une fonction de choix  $f : \mathcal{L}_A^N \rightarrow A$  qui est neutre.

3.2 L'idée de la question 2 peut-elle être appliquée pour construire une fonction de choix neutre et *U-croissante*? où est la difficulté?

Nous cherchons à montrer que, si  $|A|$  divise  $N$ , alors il n'existe pas de fonction de choix neutre.

4- Montrer que, si  $|A|$  divise  $N$ , il existe  $\tau \in \mathcal{S}_A$  telle que  $\tau^N = \text{Id}_A$  (la permutation identité) et  $\tau$  n'a pas de point fixe.

5- Supposons que  $|A|$  divise  $N$ . Soit  $P \in \mathcal{L}_A : P = (a_1, \dots, a_k, \dots, a_N)$ . Choisissons  $\tau \in \mathcal{S}_A$  et posons :

$$\vec{P} := (P, \tau \circ P, \tau^2 \circ P, \dots, \tau^{N-1} \circ P) \quad (1)$$

5.1 Montrer que, pour toute permutation  $\tau$  telle que  $\tau^N = \text{Id}_A$ , il existe  $\sigma \in \mathcal{S}_{[1,N]}$  telle que

$$\tau \circ \vec{P} = \vec{P} \circ \sigma$$

5.2 Montrer que, si  $f$  est une fonction de choix neutre, et  $\vec{P}$  est de la forme (1) avec  $\tau^N = \text{Id}_A$ , alors  $f(\vec{P})$  est un point-fixe de  $\tau$ .

5.3 Montrer que, si  $|A|$  divise  $N$ , alors il n'existe pas de fonction de choix neutre pour l'ensemble d'alternatives  $A$  et  $N$  électeurs.

6\*- Montrer que, si  $|A|$  admet une décomposition en somme d'entiers positifs  $p_i$

$$|A| = \sum_{i=1}^m p_i$$

où, pour tout  $i \in [1, m]$ ,  $\text{pgcd}(p_i, N) \geq 2$ , alors il n'existe pas de fonction de choix neutre pour l'ensemble d'alternatives  $A$  et  $N$  électeurs.

Nous cherchons maintenant à caractériser les couples  $(|A|, N)$  pour lesquels il existe une fonction de choix neutre et *U-croissante*.

7\*- Montrer que, s'il existe un entier  $d \in [2, |A|]$  qui divise  $N$ , alors il n'existe pas de fonction de choix neutre et *U-croissante* pour l'ensemble d'alternatives  $A$  et  $N$  électeurs.

Aide : reprendre l'idée de la question 5 mais :

- en choisissant une permutation  $\tau$  qui admet éventuellement des points fixes
- en choisissant un ordre linéaire  $P$  qui place les points-fixes de  $\tau$  en "mauvaise posture" pour être élus.

8- Montrer que, si aucun entier  $d \in [2, |A|]$  ne divise  $N$ , alors il existe une fonction de choix neutre et *U-croissante* pour l'ensemble d'alternatives  $A$  et  $N$  électeurs.

## Exercice 2 (10 pts) Équilibres de Nash

On considère le jeu matriciel  $\Gamma$ , nommé “dilemme du prisonnier” :

	$T$	$C$
$T$	$(1, 1)$	$(3, 0)$
$C$	$(0, 3)$	$(2, 2)$

On rappelle que  $T$  évoque “trahir” et  $C$  évoque “coopérer”.

1- Ce jeu a-t-il un (ou plusieurs) équilibre de Nash en stratégies pures ?

Le but de l'exercice est de montrer que, en *itérant* ce jeu matriciel, on obtient un jeu où des comportements de *coopération* peuvent être des équilibres de Nash. Le phénomène nouveau est que, si le joueur 1 (resp. 2) trahit, il s'expose à une *punition* du joueur 2 (resp. 1) dans la suite du jeu.

Le jeu itéré  $\Gamma^\delta$  (où  $\delta$  est un nombre réel  $\delta \in ]0, 1[$ ) est défini comme suit :

- on note  $S_1 = S_2 = \{T, C\}$
- pour tous  $s_1 \in S_1, s_2 \in S_2$ , on note  $r_i(s_1, s_2)$  le gain du joueur  $i$  sur la partie  $(s_1, s_2)$  dans le jeu  $\Gamma$
- une partie de  $\Gamma^\delta$  est un mot infini  $h = h^1 \dots h^t \dots \in (S_1 \times S_2)^{\mathbb{N} \setminus \{0\}}$
- au  $t$ -ième tour du jeu, J1 (resp. J2), connaissant l'histoire  $h^1 \dots h^{t-1}$  (qui est le mot vide si  $t = 1$ ), choisit un “coup”  $h_1^t \in S_1$  (resp.  $h_2^t \in S_2$ )
- le gain du joueur  $i$  ( $i \in \{1, 2\}$ ) sur la partie  $h$  est défini par

$$R_i(h) := (1 - \delta) \cdot \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} \cdot r_i(h_1^t, h_2^t) \quad (2)$$

i.e. le gain du joueur  $i$  est la moyenne de ses gains, dans le jeu  $\Gamma$ , aux tours  $1, 2, \dots, t, \dots$  pondérés par les coefficients  $\delta^0, \delta^1, \dots, \delta^{t-1}, \dots$

- une *stratégie* (pure) du joueur  $i$  est une application  $\sigma_i : \bigcup_{t \geq 1} (S_1 \times S_2)^{t-1} \rightarrow S_i$
- la partie  $h(\sigma_1, \sigma_2)$  associée au couple de stratégies  $(\sigma_1, \sigma_2)$  est la seule suite  $h \in (S_1 \times S_2)^{\mathbb{N} \setminus \{0\}}$  telle que, pour tout entier  $t \in [1, \infty[$  :

$$h^t = (\sigma_1(h^1, \dots, h^{t-1}), \sigma_2(h^1, \dots, h^{t-1})).$$

- on note  $R_i(\sigma_1, \sigma_2)$  le gain du joueur  $i$  avec le couple de stratégies  $(\sigma_1, \sigma_2)$ ; il s'agit de son gain sur la partie  $h(\sigma_1, \sigma_2)$  (au sens de la formule (2)).

Exemple : pour les parties

$$h := (C, T)(T, C)(C, T)(T, C) \dots, \quad h' := (C, T)(C, C)(C, T)(C, C) \dots$$

i.e. plus formellement,  $h := ((C, T)(T, C))^\omega$ ,  $h' := ((C, T)(C, C))^\omega$ , on a les gains suivants :

$$R_1(h) = (1 - \delta)(0 + 3\delta + 0 + 3\delta^3 + \dots) = 3(1 - \delta)\delta \frac{1}{1 - \delta^2} = \frac{3\delta}{1 + \delta},$$

$$R_2(h) = (1 - \delta)(3 + 0 + 3\delta^2 + \dots) = (1 - \delta) \frac{3}{1 - \delta^2} = \frac{3}{1 + \delta},$$

$$R_1(h') = (1 - \delta)(0 + 2\delta + 0 + 2\delta^3 + \dots) = \frac{2\delta}{1 + \delta},$$

2- Calculer  $R_2(h')$ .

Trahir Toujours

Notons TT la stratégie du joueur J1 (resp. J2) définie par : pour toute histoire  $(h^1 \dots h^{t-1}) \in (S_1 \times S_2)^{t-1}$  :

$$\text{TT}(h^1 \dots h^{t-1}) = T.$$

3- Montrer que  $R_1(\text{TT}, \text{TT}) = 1$ .

4- Montrer que, pour toute stratégie  $\sigma_1$  du joueur J1,  $R_1(\sigma_1, \text{TT}) \leq 1$ .

5- Montrer que, pour tout  $\delta \in ]0, 1[$ ,  $(\text{TT}, \text{TT})$  est un équilibre de Nash du jeu  $\Gamma^\delta$ .

Punir Éternellement

Notons PE la stratégie du joueur Ji définie par : pour toute histoire  $h^1 \dots h^{t-1} \in (S_1 \times S_2)^{t-1}$  :

$$\text{PE}(h^1 \dots h^{t-1}) = T \text{ si } \exists t_0 \in [1, t-1], h_{3-i}^{t_0} = T, \text{ PE}(h^1 \dots h^{t-1}) = C \text{ sinon}$$

i.e. Ji coopère tant que son partenaire coopère, et trahit éternellement, dès que son partenaire a trahi au moins une fois.

6- Montrer que  $R_1(\text{PE}, \text{PE}) = 2$ .

7- Soit  $t_0 \in [1, \infty[$ . Soit  $h$  est une partie où J1 coopère aux tours  $t \in [1, t_0 - 1]$  et trahit aux tours  $t \in [t_0, \infty[$ , alors que J2 joue la stratégie PE. Montrer que

$$R_1(h) = 2 + \delta^{t_0-1}(1 - 2\delta).$$

8- Pour quelles valeurs de  $\delta$  le couple  $(\text{PE}, \text{PE})$  est-il un équilibre de Nash du jeu  $\Gamma^\delta$  ?

On dit que  $(\sigma_1, \sigma_2)$  est un équilibre de Nash *uniforme* de la famille de jeux  $(\Gamma^\delta)_{\delta \in ]0, 1[}$  si,

$$\exists \delta_0 \in [0, 1[, \forall \delta \in ]\delta_0, 1[, (\sigma_1, \sigma_2) \text{ est un équilibre de Nash de } \Gamma^\delta.$$

9- Montrer que  $(\text{PE}, \text{PE})$  est un équilibre de Nash uniforme de la famille  $(\Gamma^\delta)_{\delta \in ]0, 1[}$ .

Punir et Pardonner

Notons  $\text{PP}_k$  (où  $k$  est un entier non nul), la stratégie du joueur Ji définie par :

$$\begin{aligned} \text{PP}_k(h^1 \dots h^{t-1}) &= T \text{ si } \exists t_0 \in [t-k, t-1], [(t_0 = 1 \text{ ou } h^{t_0-1} = (C, C)) \text{ et } h^{t_0} \neq (C, C)], \\ \text{PP}_k(h^1, \dots, h^{t-1}) &= C \text{ sinon} \end{aligned}$$

i.e. Ji coopère tant que son partenaire coopère, et trahit pendant  $k$  coups, dès que son partenaire (ou lui-même) a trahi, puis redevient coopératif.

10- Soit  $\delta \in ]0, 1[$ . Montrer que,  $(\text{PP}_1, \text{PP}_1)$  n'est pas un équilibre de Nash de  $\Gamma^\delta$ .

11- Soit  $h$  est une partie où J2 joue la stratégie  $\text{PP}_k$  et J1 joue la stratégie  $\text{PP}_k$  à tous les tours d'ordre  $t \neq t_0$  mais trahit au coup  $t_0 \in [1, \infty[$ .

11.1 Vérifier que

$$h = (C, C)^{t_0-1} \cdot (T, C) \cdot (T, T)^k \cdot (C, C)^\omega$$

11.2 Montrer que

$$R_1(h) = 2 + (1 - \delta)\delta^{t_0-1}(1 - \delta - \delta^2 - \dots - \delta^k).$$

12- On note  $\varphi$  la racine réelle positive de l'équation  $x^2 + x - 1 = 0$ . Soit  $\delta \in ]\varphi, 1[$ .

12.1 Soit  $h$  une partie où J2 joue la stratégie  $\text{PP}_2$  (à tous les tours), et J1 joue la stratégie

$PP_2$  à tous les tours d'ordre  $t \leq t_0 - 1$  mais trahit au tour  $t_0 \in [1, \infty[$ . Montrer que

$$R_1(h) \leq 2 + (1 - \delta)\delta^{t_0-1}(1 - \delta - \delta^2).$$

12.2 Montrer que  $(PP_2, PP_2)$  est un équilibre de Nash de  $\Gamma^\delta$ .

13- Le couple de stratégies  $(PP_2, PP_2)$  est-il un équilibre de Nash uniforme de la famille  $(\Gamma^\delta)_{\delta \in ]0,1[}$  ?

14- Pour quelles valeurs de  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  est-il vrai que  $(PP_k, PP_k)$  est un équilibre de Nash uniforme de la famille  $(\Gamma^\delta)_{\delta \in ]0,1[}$  ?

### Exercice 3 (10 pts) Logique

On considère dans cet exercice la structure

$$\langle A^*, (s_a)_{a \in A} \rangle.$$

Chaque symbole  $s_a$  est un symbole de prédicat binaire qui prend deux arguments du premier ordre. Il est interprété, dans cette structure, par : pour tous  $u, v \in A^*$

$$s_a(u, v) \text{ signifie que } v = u \cdot a.$$

Soit  $S$ , une partie finie de  $A^* \times A^*$ . On dit que  $S$  est système de *réécriture* fini. La relation de *réduction linéaire droite* immédiate, notée  $\xrightarrow{\text{id}S}$  est définie par :

pour tous  $f, g \in X^*$ ,  $f \xrightarrow{\text{id}S} g$  ssi il existe  $(u, v) \in S$  et  $\alpha \in X^*$  tels que  $f = \alpha u$  et  $g = \alpha v$ .

La relation de réduction linéaire droite, notée  $\xrightarrow{\text{id}S^*}$ , est la clôture réflexive et transitive de la relation  $\xrightarrow{\text{id}S}$ .

1- Montrer qu'il existe une formule, dans la logique MSO sur la signature  $(s_a)_{a \in A}$ ,  $\text{RI}(x, y)$ , à deux variables libres  $x, y$ , qui exprime que  $x \xrightarrow{\text{id}S} y$ .

2- Montrer qu'il existe une formule MSO  $R(x, y)$  à deux variables libres  $x, y$ , qui exprime que  $x \xrightarrow{\text{id}S^*} y$ .

3- Montrer que, pour tout ensemble rationnel de mots  $L \subseteq A^*$ , l'ensemble des descendants de  $L$  pour la relation  $\xrightarrow{\text{id}S^*}$

$$\Delta_S^*(L) := \{v \in A^* \mid \exists u \in L, u \xrightarrow{\text{id}S^*} v\}$$

est rationnel.

Aide : on se rappellera que les parties rationnelles de  $A^*$  sont exactement les parties *définissables* en logique MSO sur la signature  $(s_a)_{a \in A}$ .

Une relation binaire  $\rightarrow$  sur un ensemble  $E$  est dite :

- *sans-boucle* ssi, il n'existe pas de  $e \in E$  tel que  $e \rightarrow^+ e$ .
- *noethérienne* ssi, pour toute suite  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $e_n \rightarrow e_{n+1}$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $e_n = e_{n+1}$ .

4- Montrer que le problème suivant est décidable :

*donnée* : une partie finie de  $S$  de  $A^* \times A^*$ .

*question* : la relation  $\xrightarrow{\text{id}S}$  est-elle sans-boucle ?

5\*- Montrer qu'il existe une formule MSO  $\text{Inf}(X)$ , à une variable libre  $X$  d'ordre 2, qui exprime que l'ensemble  $X$  est infini.

Aide : une partie  $L$  de  $A^*$  est infinie ssi l'ensemble de ses préfixes contient une partie infinie, totalement ordonnée pour l'ordre préfixe (une "branche infinie").

6- Montrer que le problème suivant est décidable :

*donnée* : une partie finie de  $S$  de  $A^* \times A^*$ . *question* : la relation  $\xrightarrow{\text{id}S}$  est-elle noethérienne ?