

Jeux-Langages-Logique

DM- à rendre le 16/12/15

Exercice 6.1 Poker

On étudie une version (très) simplifiée du Poker : deux joueurs A et B s'affrontent. Le jeu de cartes ne comporte que 3 cartes 1, 2, 3. A reçoit une carte, B reçoit une carte, la troisième carte reste cachée. L'arbre du jeu est représenté sur la figure 1. Les nombres indiqués sont les gains de J1 (J2 gagne l'opposé de J1 i.e. à chaque partie, la somme des gains de J1 et J2 est nulle). Un hasard externe produit la "donne" A_i/B_j : A reçoit la carte i et B la carte j ; ces

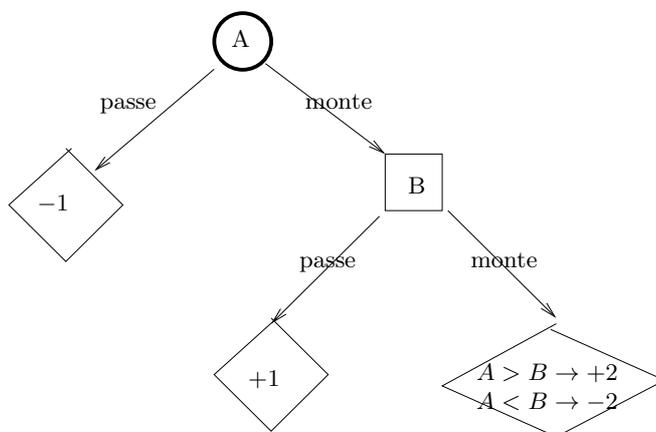


FIGURE 1 – Le poker à 3 cartes.

6 donnes sont équiprobables.

On analyse les stratégies possibles de A et B.

1- Montrer que les seuls comportements raisonnables de A,B consistent :

- si A_3/B_j : A monte
- si A_i/B_1 : B passe
- si A_i/B_3 : B monte
- si A_2/B_j : A monte (comparer les espérances de A selon qu'il passe ou qu'il monte).

2- Dans le cas A_1/B_j , A décide de monter (avec proba p) ou de passer (proba $1 - p$). Dans le cas A_i/B_2 , B décide de monter (avec proba q) ou de passer (proba $1 - q$).

On appelle σ_p (resp. τ_q) ces stratégies de A (resp. B).

Calculer le gain moyen $r(\sigma_p, \tau_q)$ de A, lorsque A joue σ_p et B joue τ_q .

3- Montrer que ce jeu "a une valeur" i.e. qu'il existe un nombre $v \in \mathbb{R}$ tel que

$$v = \max_{p \in [0,1]} \{ \min_{q \in [0,1]} \{ r(\sigma_p, \tau_q) \} \} = \min_{q \in [0,1]} \{ \max_{p \in [0,1]} \{ r(\sigma_p, \tau_q) \} \}.$$

Calculer v . Pour quelles valeurs (\bar{p}, \bar{q}) a-t-on $r(\sigma_{\bar{p}}, \tau_{\bar{q}}) = v$?

4- Montrer que (\bar{p}, \bar{q}) est un "équilibre de Nash".

5- Montrer que, si A joue une stratégie $\sigma_p \neq \sigma_{\bar{p}}$, alors B possède une stratégie τ_q telle que $r(\sigma_p, \tau_q) < v$.

6- Montrer que, si B joue une stratégie $\tau_q \neq \tau_{\bar{q}}$, alors A possède une stratégie σ_p telle que $r(\sigma_p, \tau_q) > v$.

Exercice 6.2 Attracteurs et jeu d'accessibilité

Soit $\mathcal{G} = \langle V_0, V_1, E, W \rangle$ un jeu sur un graphe orienté. Pour tout numéro de joueur $\sigma \in \{0, 1\}$, on définit l'applications $\mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{P}(V)$:

$$pre_\sigma(\mathcal{G}, Y) := \{v \in V_\sigma \mid vE \cap Y \neq \emptyset\} \cup \{v \in V_{\bar{\sigma}} \mid vE \subseteq Y\}.$$

1- Vérifier que cette application est croissante (pour l'inclusion)

2- Montrer que pour tout $Y \in \mathcal{P}(V)$, il existe un plus petit ensemble U tel que

$$Y \subseteq U \text{ et } pre_\sigma(\mathcal{G}, U) \subseteq U.$$

On note cet ensemble $Attr_\sigma(\mathcal{G}, Y)$ (l'*attracteur* de Y pour le joueur σ).

3- Montrer que $Attr_\sigma(\mathcal{G}, Y)$ est le plus petit point fixe de l'application

$$f : X \mapsto Y \cup pre_\sigma(X)$$

4- En utilisant la q.7 de l'exercice 3 de la feuille 4, écrire une expression de $Attr_\sigma(\mathcal{G}, Y)$ à partir des applications itérées de f sur le point initial \emptyset .

5- On définit l'ensemble W comme :

$$W := \{\pi \mid \pi \text{ visite l'ensemble } A\}.$$

5.1 Donner une stratégie sans-mémoire du joueur σ qui est gagnante sur $Attr_\sigma(\mathcal{G}, A)$.

5.2 Montrer que $Attr_\sigma(\mathcal{G}, A)$ est l'ensemble des positions gagnantes de σ .

Exercice 6.3 Attracteurs et pièges

Soit $\mathcal{G} = \langle V_0, V_1, E, W \rangle$ un jeu sur un graphe orienté. On dit qu'une partie $Y \in \mathcal{P}(V)$ est :

- un σ -*attracteur* ssi

$$Y \supseteq pre_\sigma(Y)$$

- est un σ -*piège* ssi

$$Y \subseteq pre_{\bar{\sigma}}(Y)$$

1- Montrer que toute intersection de σ -attracteurs est un σ -attracteur.

2- Montrer que toute union de σ -pièges est un σ -piège.

3- Montrer que les applications $X \mapsto pre_\sigma(\mathcal{G}, X)$ et $X \mapsto pre_{\bar{\sigma}}(\mathcal{G}, X)$ sont duales (l'une de l'autre).

4- Montrer que, pour tout $Y \in \mathcal{P}(V)$, Y est un σ -attracteur ssi $V \setminus Y$ est un σ -piège.

5- Montrer que pour tout $Y \in \mathcal{P}(V)$, il existe un plus grand σ -piège inclus dans Y ; on note cet ensemble $Piege_\sigma(\mathcal{G}, Y)$ (le *piège* de Y pour le joueur σ).

6- Montrer que

$$V \setminus Attr_\sigma(\mathcal{G}, Y) = Piege_\sigma(\mathcal{G}, V \setminus Y).$$

7- Montrer que, si Y est un σ -piège, alors $Attr_{\bar{\sigma}}(\mathcal{G}, Y)$ est un σ -piège.

Aide : montrer que, dans ce cas, $Attr_{\bar{\sigma}}(\mathcal{G}, Y)$ est obtenu par itération de $pre_{\bar{\sigma}}(\mathcal{G}, *)$ à partir de Y .