

Théorie des Jeux

Équilibres de Nash

Exercice 3.1 Stratégies Maxmin

On considère un jeu matriciel G , à 2 joueurs, à somme nulle. On note r la fonction de gain du joueur 1.

1- Montrer que

$$\max_{s_1 \in \Delta(S_1)} \left(\min_{s_2 \in \Delta(S_2)} r(s_1, s_2) \right) \leq \min_{s_2 \in \Delta(S_2)} \left(\max_{s_1 \in \Delta(S_1)} r(s_1, s_2) \right)$$

Lorsque les deux valeurs ci-dessus sont *égales* on dit que le jeu G a la valeur.

$$v := \max_{s_1 \in \Delta(S_1)} \left(\min_{s_2 \in \Delta(S_2)} r(s_1, s_2) \right)$$

Sinon, le jeu n'a pas de valeur.

2- Montrer que, si (s_1^*, s_2^*) est un équilibre de Nash de G , alors G a la valeur $v = r(s_1^*, s_2^*)$.

3- Supposons que (s_1^*, s_2^*) et (s_1^{**}, s_2^{**}) sont des équilibres de Nash de G . Montrer que (s_1^*, s_2^{**}) et (s_1^{**}, s_2^*) sont aussi des équilibres de Nash.

Exercice 3.2 Élimination des stratégies dominées.

On considère un jeu matriciel G , à 2 joueurs. Une stratégie pure $s_i \in S_i$ du joueur i est *strictement dominée* par une stratégie (pure) $t_i \in S_i$ du même joueur si :

$$\forall s_{-i} \in S_{3-i}, r_i(s_i, s_{-i}) < r_i(t_i, s_{-i})$$

On note $G \rightarrow G'$ la relation binaire, entre jeux matriciels :

G' est obtenu à partir de G en supprimant une stratégie qui est strictement dominée.

1- Montrer que, si $G \rightarrow G'$, alors G et G' ont les mêmes équilibres de Nash (en stratégies pures).

On note \rightarrow^* la clôture réflexive et transitive de \rightarrow .

2- Montrer que, si $G \rightarrow^* G'$ et si G' est un jeu 1×1 (chaque joueur n'a qu'une stratégie), alors G a un équilibre de Nash.

3- Montrer que, si $G \rightarrow^* G'$, $G' \rightarrow^* G''$ et si G', G'' sont des jeux 1×1 alors $G' = G''$.

4- Montrer que, sous les hypothèses de la question 2, G a un équilibre de Nash *unique*.

Exercice 3.3 Indifférence à l'équilibre.

On considère un jeu matriciel G , à N joueurs. Soit $\vec{\sigma}$ un équilibre de Nash, en stratégies mixtes, du jeu mixte G .

Notons

$$\vec{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_N), \quad \sigma_i = \sum_{s \in S_i} p_{i,s} s.$$

1- Montrer que, pour tout joueur $i \in [1, n]$, et toute stratégie pure $s \in S_i$,

$$p_{i,s} > 0 \Rightarrow R_i(s, \vec{\sigma}_{-i}) = \max_{t \in S_i} (R_i(t, \vec{\sigma}_{-i})).$$

2- Montrer que cette propriété *caractérise* les équilibres de Nash, en stratégies mixtes.

Exercice 3.4 Calcul des équilibres de Nash.

On considère le jeu (matriciel, à somme nulle) de “ tir au but” (ou encore Pile ou Face).

	<i>P</i>	<i>F</i>
<i>P</i>	1	-1
<i>F</i>	-1	1

- 1- Ce jeu a-t-il un équilibre de Nash en stratégies pures ?
- 2- Calculer l'équilibre de Nash (en stratégies mixtes) de ce jeu.
Aide : on utilisera la propriété d'indifférence à l'équilibre vue à l' exercice 3.
Reprendre le jeu de Pierre-feuille-ciseaux.
- 3- A-t-il un équilibre de Nash en stratégies pures ?
- 4- Calculer un équilibre de Nash en stratégies mixtes, pour ce jeu.