

Jeux, Synthèse et Contrôle

Logique Monadique du Second-Ordre

Exercice 6.1 Théorie de (\mathbb{Q}, \leq)

Un ordre \leq sur un ensemble E est dit *dense* ssi

$$\forall x, z \in E, x < z \Rightarrow (\exists y \in E, x < y < z)$$

- 1- L'ordre naturel sur \mathbb{N} (resp. \mathbb{Q} , \mathbb{R}) est-il dense ?
- 2- Montrer que tout ensemble ordonné (E, \leq) dénombrable, dense, sans plus petit élément et sans plus grand élément, est isomorphe à (\mathbb{Q}, \leq) .

On pose $E := \{a, c\}^*b$ et pour tous $u, v \in E$, $u \preceq v$ ssi u est lexicographiquement plus petit que v pour l'ordre $a < b < c$. Montrer que (E, \preceq) est un ordre dénombrable dense.

- 3- Montrer que la logique monadique du second ordre de la structure (\mathbb{Q}, \leq) est décidable.
Aide : On exprimera le prédicat $u \preceq v$ par une formule MSO, à deux variables libres, sur la signature $\langle S_a, S_b, S_c \rangle$.

Exercice 6.2 Théories des ordres dénombrables

- 1- Montrer que tout ensemble ordonné (E, \leq) dénombrable est *plongeable* dans (\mathbb{Q}, \leq) i.e. il existe une application strictement croissante $f : E \rightarrow \mathbb{Q}$.

- 2- On considère la signature $\langle \leq \rangle$ (i.e. un seul symbole de prédicat, qui est binaire).

- 2.1 Montrer que le problème suivant est décidable :

donnée : une formule MSO Φ sur la signature $\langle \leq \rangle$

question : cette formule est-elle vraie dans tout ensemble ordonné dénombrable (E, \leq) ?

- 2.2 Montrer que le problème suivant est décidable :

donnée : une formule MSO Φ sur la signature $\langle \leq \rangle$

question : existe-t-il un ensemble ordonné dénombrable (E, \leq) dans lequel cette formule est vraie ?

Exercice 6.3 Langages rationnels vs langages définissables

Soit A un alphabet fini. On considère dans cet exercice la structure

$$\langle A^*, (S_a)_{a \in A} \rangle.$$

Une partie $L \subseteq A^*$ est dite *définissable* (en MSO) ssi, il existe une formule MSO $\Phi(X)$, à une seule variable libre X , telle que

(i) L est un modèle de Φ (i.e. $A^*, \nu_L \models \Phi(X)$, où ν_L est la valuation qui envoie la variable X sur l'ensemble L)

(ii) si $L' \subseteq A^*$ est un modèle de Φ , alors $L = L'$.

- 1- Montrer que tout langage L définissable en MSO est rationnel.

Aide : utiliser le fait que, tout automate alternant est équivalent à un automate non-déterministe, puis le fait que, dans un jeu de parité, le gagnant a une stratégie gagnante qui est *sans-mémoire*.

- 2- Montrer que tout langage L rationnel est définissable en MSO.

Exercice 6.4 Réécriture linéaire droite

Soit A un alphabet fini. On considère dans cet exercice la structure

$$\langle A^*, (S_a)_{a \in A} \rangle$$

Soit S , une partie finie de $A^* \times A^*$. On dit que S est système de *réécriture* fini. La relation de *réduction linéaire droite* immédiate, notée $\overrightarrow{id_S}$ est définie par :

pour tous $f, g \in X^*$, $f \overrightarrow{id_S} g$ ssi il existe $(u, v) \in S$ et $\alpha \in X^*$ tels que $f = \alpha u$ et $g = \alpha v$.

La relation de réduction linéaire droite, notée $\overrightarrow{id_S}^*$, est la clôture réflexive et transitive de la relation $\overrightarrow{id_S}$.

1- Montrer qu'il existe une formule MSO $RI(x, y)$ à deux variables libres x, y , qui exprime que $x \overrightarrow{id_S} y$.

2- Montrer qu'il existe une formule MSO $R(x, y)$ à deux variables libres x, y , qui exprime que $x \overrightarrow{id_S}^* y$.

3- Montrer que, pour tout ensemble rationnel de mots $L \subseteq A^*$, l'ensemble des descendants de L pour la relation $\overrightarrow{id_S}^*$

$$\Delta_S^*(L) := \{v \in A^* \mid \exists u \in L, u \overrightarrow{id_S}^* v\}$$

est *rationnel*.

Une relation binaire \rightarrow sur un ensemble E est dite :

- *noethérienne* ssi, pour toute suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $e_n \rightarrow e_{n+1}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $e_n = e_{n+1}$.

- *sans-boucle* ssi, il n'existe pas de $e \in E$ tel que $e \rightarrow^+ e$.

4- Montrer que le problème suivant est décidable :

donnée : une partie finie de S de $A^* \times A^*$.

question : la relation $\overrightarrow{id_S}$ est-elle sans-boucle ?

donnée : une partie finie de S de $A^* \times A^*$.

question : la relation $\overrightarrow{id_S}$ est-elle noethérienne ?

Exercice 6.5 Langages rationnels

Soit A un alphabet fini et u_1, u_2, v_1, v_2 quatre mots de A^* . On considère l'application $F : \mathcal{P}(A^*) \rightarrow \mathcal{P}(A^*)$ définie par :

$$F(L) := ((Lu_1^{-1} \cup Lu_2^{-1}) \cdot v_1) \cap ((Lu_1^{-1} \cup Lu_2^{-1}) \cdot v_2).$$

On pose

$$F^*(L) := \bigcup_{n \geq 0} F^n(L)$$

où $F^0 := \text{Id}$, $F^{n+1} = F \circ F^n$.

Montrer que, si L est un langage rationnel, alors $F^*(L)$ est rationnel.