

ENSEIRB

2ième année Informatique, 2015/2016

## Option Jeux

Examen du 18/05/16

Tous documents autorisés. Durée : 2 heures.

Les exercices sont indépendants. Une annexe rappelle certaines définitions vues en cours/td. On peut admettre le résultat d'une question et néanmoins l'*utiliser* dans les questions qui suivent.

### Exercice 1 (10 pts) Équilibres de Nash

On considère un jeu matriciel  $G$ , à 2 joueurs, que l'on notera  $J1, J2$ . Une stratégie pure  $s_i \in S_i$  du joueur  $i$  est *strictement dominée* par une stratégie (pure)  $t_i \in S_i$  du même joueur si :

$$\forall s_{-i} \in S_{3-i}, r_i(s_i, s_{-i}) < r_i(t_i, s_{-i})$$

On note alors  $s_i \prec t_i$ .

On note  $G \rightarrow G'$  la relation binaire, entre jeux matriciels :

$G'$  est obtenu à partir de  $G$  en supprimant une stratégie qui est strictement dominée.

Exemple : soit le jeu  $\mathcal{J}$  suivant

	B1	B2	B3	B4
A1	(1, 2)	(2, 4)	(3, 3)	(4, 1)
A2	(2, 1)	(3, 5)	(4, 2)	(5, 2)
A3	(3, 1)	(4, 2)	(5, 1)	(6, 0)
A4	(4, 2)	(3, 1)	(6, 0)	(5, 1)

On a  $A_1 \prec A_2$ , donc  $\mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}_1$  où  $\mathcal{J}_1$  est décrit par la matrice de gains

	B1	B2	B3	B4
A2	(2, 1)	(3, 5)	(4, 2)	(5, 2)
A3	(3, 1)	(4, 2)	(5, 1)	(6, 0)
A4	(4, 2)	(3, 1)	(6, 0)	(5, 1)

Dans ce jeu  $A_2 \prec A_3$ , donc  $\mathcal{J}_1 \rightarrow \mathcal{J}_2$  où  $\mathcal{J}_2$  est décrit par la matrice de gains

	B1	B2	B3	B4
A3	(3, 1)	(4, 2)	(5, 1)	(6, 0)
A4	(4, 2)	(3, 1)	(6, 0)	(5, 1)

Dans ce jeu  $B_3 \prec B_2$  et  $B_4 \prec B_1$ ; donc par deux réécritures supplémentaires on obtient  $\mathcal{J}_2 \rightarrow \mathcal{J}_3 \rightarrow \mathcal{J}_4$  où  $\mathcal{J}_4$  est décrit par la matrice de gains

	B1	B2
A3	(3, 1)	(4, 2)
A4	(4, 2)	(3, 1)

1- Montrer que, si  $G \rightarrow G'$ , alors  $G$  et  $G'$  ont les mêmes équilibres de Nash (en stratégies pures).

On note  $\rightarrow^*$  la clôture réflexive et transitive de  $\rightarrow$ .

Par exemple, on a vu que  $\mathcal{J}_1 \rightarrow^* \mathcal{J}_4$ .

2- Montrer que, si  $G \rightarrow^* G'$  et si  $G'$  est un jeu  $1 \times 1$  (chaque joueur n'a qu'une stratégie), alors  $G$  a un équilibre de Nash (en stratégies pures).

3- Montrer que, sous les hypothèses de la question 2,  $G$  a un équilibre de Nash *unique*.

Un jeu matriciel est dit *irréductible* si aucun des deux joueurs n'a une stratégie dominée (par exemple un jeu de dimension  $1 \times 1$  est irréductible). On souhaite montrer que, si  $G \rightarrow^* G'$ ,  $G \rightarrow^* G''$  et si  $G', G''$  sont des jeux irréductibles, alors  $G' = G''$ .

Pour tout entier  $k \geq 0$  on note  $\rightarrow^k$  la composée de la relation  $\rightarrow$  par elle-même itérée  $k$  fois i.e.  $G \rightarrow^0 G'$  ssi  $G = G'$  et  $G \rightarrow^{k+1} G'$  ssi  $\exists H$  tel que  $G \rightarrow H \rightarrow^k G'$ .

4- Montrer que, si  $G \rightarrow G'$  et  $G \rightarrow G''$ , alors, il existe un jeu matriciel  $H$  et des entiers  $p \leq 1, q \leq 1$  tels que

$$G' \rightarrow^p H \text{ et } G'' \rightarrow^q H.$$

5- Montrer que si  $G \rightarrow^p G'$  et  $G \rightarrow G''$ , alors, il existe un jeu matriciel  $H$  et des entiers  $q' \leq 1, p' \leq p$  tels que

$$G' \rightarrow^{q'} H \text{ et } G'' \rightarrow^{p'} H.$$

6- Montrer que si  $G \rightarrow^p G'$  et  $G \rightarrow^q G''$ , alors, il existe un jeu matriciel  $H$  et des entiers  $q' \leq q, p' \leq p$  tels que

$$G' \rightarrow^{q'} H \text{ et } G'' \rightarrow^{p'} H.$$

7- Montrer que, si  $G \rightarrow^* G'$ ,  $G \rightarrow^* G''$  et si  $G', G''$  sont des jeux irréductibles alors  $G' = G''$ .

On considère le jeu matriciel  $\Gamma$  :

	D1	D2	D3	D4
C1	(3, 7)	(1, 2)	(3, 3)	(0, 5)
C2	(7, 3)	(2, 4)	(3, 5)	(2, 3)
C3	(4, 1)	(3, 3)	(4, 2)	(1, 2)
C4	(2, 0)	(2, 2)	(3, 5)	(0, 4)

8- Calculer un équilibre de Nash de  $\Gamma$  (en stratégies pures) en "éliminant les stratégies dominées" (i.e. en appliquant la relation  $\rightarrow$  jusqu'à obtenir un jeu irréductible).

Le jeu  $\Gamma$  a-t-il un équilibre de Nash *unique* en stratégies pures ?

9- Le jeu  $\mathcal{J}$  a-t-il un équilibre de Nash, en stratégies pures ? est-il unique ?

10- Reprendre la question 1 mais du point de vue des équilibres de Nash en stratégies *mixtes*.

11- Calculer un équilibre de Nash, en stratégies mixtes, pour le jeu suivant :

	F1	F2	F3
E1	(2, 5)	(3, 5)	(6, 6)
E2	(3, 4)	(4, 3)	(7, 3)
E3	(4, 3)	(3, 4)	(5, 2)

Est-il unique ?

## Exercice 2 (10 pts) Jeu de parité

On choisit comme arène le *graphe* de la figure 1, et la partition  $V_0 = \{v_0, v_2, v_4, v_6, v_7, v_9, v_{11}, v_{13}, v_{15}, v_{16}\}$ ,

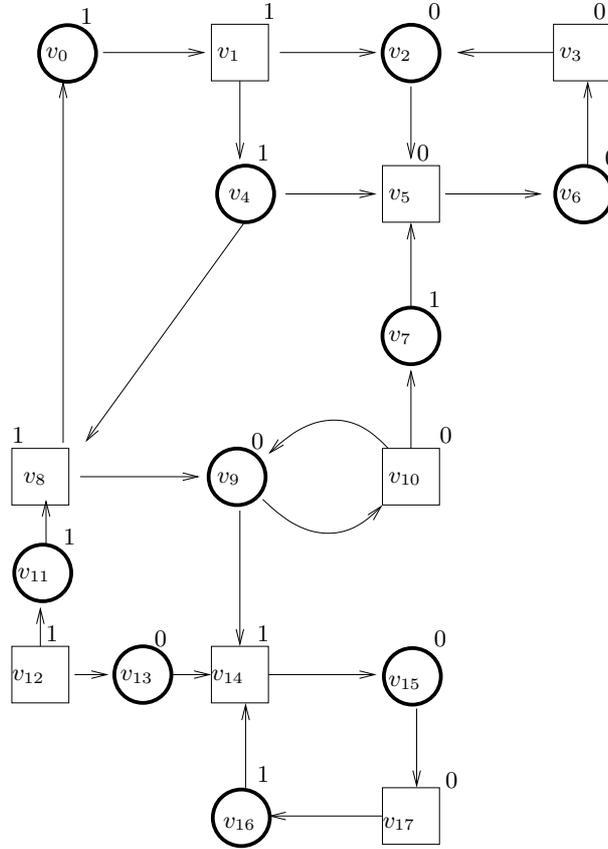


FIGURE 1 – Le graphe  $\mathcal{G}$ .

$V_1 = \{v_1, v_3, v_5, v_8, v_{10}, v_{12}, v_{14}, v_{17}\}$ . On se donne un *coloriage* des sommets  $\chi : V \rightarrow \{0, 1\}$  par :

$$\chi^{-1}(0) := \{v_2, v_3, v_5, v_6, v_9, v_{10}, v_{13}, v_{15}, v_{17}\}, \quad \chi^{-1}(1) := V \setminus \chi^{-1}(0).$$

(voir la figure 1). La partie  $\pi \in V^* \cup V^\omega$  est gagnée par le joueur  $J_0$  ssi

- soit la partie se termine dans un sommet de  $V_1$
- soit la partie est infinie et

$$\max\{c \in \{0, 1\} \mid \pi \text{ passe infiniment souvent par la couleur } c\} = 0$$

sinon, elle est gagnée par le joueur  $J_1$ .

On remarquera que  $J_1$  gagne lorsque

- soit la partie se termine dans un sommet de  $V_0$
- soit la partie est infinie et

$$\max\{c \in \{0, 1\} \mid \pi \text{ passe infiniment souvent par la couleur } c\} = 1.$$

1- Calculer  $\text{Piege}_1(\mathcal{G}, \chi^{-1}(0))^1$ .

Aide :  $\text{Piege}_1(\mathcal{G}, Y)$  est le plus grand point fixe de l'application  $X \mapsto Y \cap \text{pre}_0(\mathcal{G}, X)$ .

1. Voir en annexe les rappels sur les pièges et les attracteurs

2- Calculer

$$A_0 := Attr_0(\mathcal{G}, Piege_1(\mathcal{G}, \chi^{-1}(0))).$$

Aide :  $Attr_0(\mathcal{G}, Y)$  est le plus petit point fixe de l'application  $X \mapsto Y \cup pre_0(\mathcal{G}, X)$ .

Pour tout sous-ensemble de sommets  $X \subseteq V$  on note

$$\mathcal{G}[X] := \langle V'_0, V'_1, E', \chi' \rangle$$

l'arène obtenue en prenant

$$V' := V \cap X, V'_0 := V_0 \cap X, V'_1 := V_1 \cap X, E' := E \cap (V' \times V') \text{ et } \forall v \in V', \chi'(v) := \chi(v).$$

3- Donner une stratégie positionnelle gagnante de  $J0$  sur  $\mathcal{G}[A_0]$ .

Pour tout ensemble  $X \subseteq V$  on note  $\bar{X} := V \setminus X$  (i.e. son complémentaire dans  $V$ ).

4- On pose

$$A_1 := Attr_0(\mathcal{G}[\bar{A}_0], Piege_1(\mathcal{G}[\bar{A}_0], \chi^{-1}(0) \cap \bar{A}_0)).$$

Calculer  $A_1$ .

5- 5.1 Donner une stratégie positionnelle gagnante de  $J0$  sur  $\mathcal{G}[A_1]$ .

5.2 En déduire une stratégie positionnelle gagnante de  $J0$  sur  $\mathcal{G}[A_0 \cup A_1]$ .

5.3 Montrer que  $A_0 \cup A_1$  est un 1-piège (de  $\mathcal{G}$ ). En déduire une stratégie positionnelle de  $J0$  sur  $\mathcal{G}$ , qui est gagnante sur tous les sommets de  $A_0 \cup A_1$ .

6- Donner une stratégie positionnelle gagnante de  $J1$  sur  $\mathcal{G}[\bar{A}_0 \cap \bar{A}_1]$ .

7- Montrer que  $\bar{A}_0 \cap \bar{A}_1$  est un 0-piège (de  $\mathcal{G}$ ).

En déduire une stratégie positionnelle de  $J1$  sur  $\mathcal{G}$ , qui est gagnante sur tous les sommets de  $\bar{A}_0 \cap \bar{A}_1$ .

8- Quel est l'ensemble des positions gagnantes de  $J0$  (resp.  $J1$ ) dans le jeu  $\mathcal{G}$ ?

## ANNEXE

Soit  $\mathcal{G} = \langle V_0, V_1, E, W \rangle$  un jeu sur un graphe orienté. Pour tout numéro de joueur  $\sigma \in \{0, 1\}$ , on définit l'application  $\mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{P}(V)$  :

$$pre_\sigma(\mathcal{G}, Y) := \{v \in V_\sigma \mid vE \cap Y \neq \emptyset\} \cup \{v \in V_{1-\sigma} \mid vE \subseteq Y\}.$$

On dit qu'un sous-ensemble  $Y \in \mathcal{P}(V)$  est :

- un  $\sigma$ -attracteur ssi  $Y \supseteq pre_\sigma(\mathcal{G}, Y)$

- un  $\sigma$ -piège ssi  $Y \subseteq pre_{1-\sigma}(\mathcal{G}, Y)$ .

Pour tout  $Y \subseteq V$  il existe un plus petit ensemble  $U$  tel que

$$Y \subseteq U \text{ et } pre_\sigma(\mathcal{G}, U) \subseteq U.$$

On le note  $Attr_\sigma(\mathcal{G}, Y)$  (c'est l'attracteur de  $Y$  pour le joueur  $\sigma$ ).

Pour tout  $Y \subseteq V$  il existe un plus grand ensemble  $U$  tel que

$$Y \supseteq U \text{ et } pre_{1-\sigma}(\mathcal{G}, U) \supseteq U.$$

On le note  $Piege_\sigma(\mathcal{G}, Y)$  (c'est le piège de  $Y$  pour le joueur  $\sigma$ ).