

Option Jeux

Examen du 18/05/16-Un corrigé

Exercice 1 (10 pts) Équilibres de Nash

On considère un jeu matriciel G , à 2 joueurs, que l'on notera $J1, J2$. Dans ce qui suit, on note $\langle T_1, T_2 \rangle$ le jeu G restreint aux sous-ensembles de stratégies $T_1 \subseteq S_1, T_2 \subseteq S_2$. Le gain du joueur Ji dans $\langle T_1, T_2 \rangle$ sur le couple de stratégies $(s, t) \in T_1 \times T_2$ est le même que dans le jeu original i.e. $r_i(s, t)$.

1- Supposons que $G \rightarrow G'$, par suppression de $s \in S_1$ telle que $s \prec t$.

$$G' = \langle S_1 \setminus \{s\}, S_2 \rangle$$

1.1 Soit (σ^*, τ^*) un équilibre de Nash de G' . Pour tout $\tau \in S_2$ on a $r_2(\sigma^*, \tau) \leq r_2(\sigma^*, \tau)$.

Pour $\sigma \in S_1 \setminus \{s\}$ on a $r_1(\sigma, \tau^*) \leq r_1(\sigma^*, \tau^*)$.

Et pour $\sigma = s$ on a :

$$r_1(\sigma, \tau^*) < r_1(t, \tau^*) \leq r_1(\sigma^*, \tau^*).$$

Donc (σ^*, τ^*) est aussi un équilibre de Nash de G .

1.2 Soit (σ^*, τ^*) un équilibre de Nash de G .

Comme $r_1(s, \tau^*) < r_1(t, \tau^*)$, (s, τ^*) n'est pas un équilibre de Nash de G , donc $\sigma^* \neq s$.

Le couple (σ^*, τ^*) est donc aussi un couple de stratégies de G' . Comme l'ensemble des stratégies de G' est inclus dans celui de G , (σ^*, τ^*) est *a fortiori* un équilibre de Nash de G' .

2- Supposons que $G \rightarrow^* G'$ et que G' est un jeu 1×1 (chaque joueur n'a qu'une stratégie). L'unique couple de stratégies de G' est clairement un équilibre de Nash de G' . D'après la Q1, par récurrence sur n :

si $G \rightarrow^n G'$ alors G et G' ont les mêmes équilibres de Nash (en stratégies pures).

3- G' n'a qu'un équilibre de Nash, donc par l'argument de Q2, G a aussi un seul équilibre de Nash.

4- Supposons que $G \rightarrow G'$ et $G \rightarrow G''$.

cas 1 : $G' = G''$.

En prenant $p := 0, q := 0$ et $H := G'$, la propriété est vraie.

cas 2 : $G' = \langle S'_1, S_2 \rangle, G'' = \langle S_1, S'_2 \rangle$,

où $S'_1 = S_1 \setminus \{s_1\}, S''_1 = S_1 \setminus \{\hat{s}_1\}, s_1 \prec t_1, \hat{s}_1 \prec \hat{t}_1, s_1 \neq \hat{s}_1$.

Posons

$$p := 1, q := 1, H := \langle S_1 \setminus \{s_1, \hat{s}_1\}, S_2 \rangle.$$

- si $\hat{t}_1 \neq s_1$, alors dans G' on a $\hat{s}_1 \prec \hat{t}_1$, donc $G' \rightarrow H$.

- si $\hat{t}_1 = s_1$, alors, dans G' , $\hat{s}_1 \prec s_1 \prec t_1$, donc $G' \rightarrow H$.

De même $G'' \rightarrow H$.

cas 3 : $G' = \langle S_1, S'_2 \rangle, G'' = \langle S_1, S''_2 \rangle$,

où $S'_2 = S_2 \setminus \{s_2\}, S''_2 = S_2 \setminus \{\hat{s}_2\}$.

On conclut, par des arguments similaires à ceux du cas 2 que, en posant

$$p := 1, q := 1, H := \langle S_1, S_2 \setminus \{s_2, \hat{s}_2\} \rangle,$$

on a bien $G' \rightarrow H \leftarrow G''$.

cas 4 : $G' = \langle S_1 \setminus \{s_1\}, S_2 \rangle, G'' = \langle S_1, S_2 \setminus \{s_2\} \rangle$,

où $s_1 \prec t_1, s_2 \prec t_2$.

Posons

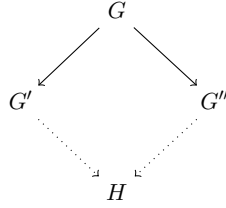
$$p := 1, \quad q := 1, \quad H := \langle S_1 \setminus \{s_1\}, S_2 \setminus \{s_2\} \rangle.$$

Puisque, pour tout $\sigma \in S_1, r_2(\sigma, s_2) \prec r_2(\sigma, t_2)$,

$$\forall \sigma \in S_1 \setminus \{s_1\}, r_2(\sigma, s_2) \prec r_2(\sigma, t_2)$$

i.e. $s_2 \prec_{G'} t_2$, donc $G' \rightarrow H$.

De même : $s_1 \prec_{G''} t_1$ donc $G'' \rightarrow H$.



5- Nous raisonnons par récurrence sur l'entier p .

Supposons que $G \rightarrow^p G'$ et $G \rightarrow G''$.

$p = 0$: $G = G'$ et $G \rightarrow G''$.

Posons $H := G''$. On a bien $G' \rightarrow^1 H$ et $G'' \rightarrow^0 H$, donc $q' := 1$ et $p' := 0$ conviennent.

$p = 1$: ce cas a été traité à la question 4.

$p \rightarrow p + 1$: Supposons que $G' \rightarrow^{p+1} G''$ et $G \rightarrow^1 G''$.

Par définition de la réécriture à l'ordre $p + 1$, cela signifie qu'il existe un jeu \hat{G} tel que

$$G \rightarrow^1 \hat{G} \rightarrow^p G''.$$

On obtient alors H en "composant des diagrammes commutatifs" (voir la figure 1). Par Q4, il

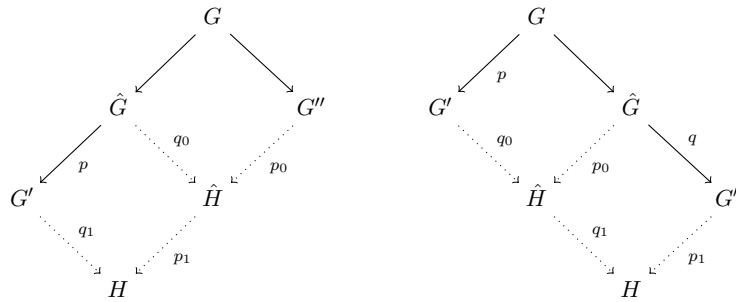


FIGURE 1 – Diagrammes pour Q5,Q6

existe \hat{H} et $p_0 \leq 1, q_0 \leq 1$ tels que

$$\hat{G} \rightarrow^{q_0} \hat{H} \xleftarrow{q_0} G''$$

Par hypothèse de récurrence, il existe un jeu H et des entiers $p_1 \leq p, q_1 \leq q_0$ tels que :

$$G' \rightarrow^{q_1} H \xleftarrow{p_1} \hat{H}.$$

On obtient finalement que :

$$G' \xrightarrow{q_1} H \xleftarrow{p_1+p_0} G''$$

avec $q_1 \leq q_0 \leq 1$ et $p_1 + p_0 \leq p + 1$.

6- Nous raisonnons par récurrence sur l'entier q .

Supposons que $G \xrightarrow{p} G'$ et $G \xrightarrow{q} G''$.

$q = 0$: En choisissant $H := G'$, $p' := p$, $q' := 0$ on a bien

$$G' \xrightarrow{q'} H \text{ et } G'' \xrightarrow{p'} H.$$

$q \rightarrow q + 1$: $G \xrightarrow{1} \hat{G} \xrightarrow{q} G''$.

Par Q6, on sait qu'il existe un jeu \hat{H} et des entiers $p_0 \leq p$, $q_0 \leq 1$

$$G' \xrightarrow{q_0} \hat{H} \xleftarrow{p_0} \hat{G}.$$

et par hypothèse de récurrence, il existe un jeu H et des entiers $p_1 \leq p_0$, $q_1 \leq q$ tels que :

$$\hat{H} \xrightarrow{q_1} H \xleftarrow{p_1} G''.$$

On obtient finalement (voir figure 1) que :

$$G' \xrightarrow{q_0+q_1} H \xleftarrow{p_1} G'',$$

avec $q_0 + q_1 \leq q + 1$ et $p_1 \leq p_0 \leq p$.

7- Supposons que $G \xrightarrow{*} G'$, $G \xrightarrow{*} G''$ et G', G'' sont des jeux irréductibles.

Par Q6, il existe un jeu H tel que

$$G' \xrightarrow{*} H \xleftarrow{*} G''$$

et comme G', G'' sont irréductibles, $G' = H = G''$.

8- Une succession possible de dominations (suivies d'éliminations) est :

$$C1 \prec C3, C4 \prec C3, D4 \prec D2, D1 \prec D2, C2 \prec C3, D3 \prec D2.$$

Le jeu final est $\langle \{C3\}, \{D2\} \rangle$. Par Q2, Q3, le jeu Γ a un unique équilibre de Nash, en stratégies pures, qui est $(C3, D2)$.

9- Comme $\mathcal{J} \xrightarrow{4} \mathcal{J}_4$, en appliquant 4 fois le résultat de Q1, on obtient que \mathcal{J} a le même ensemble d'équilibres de Nash que \mathcal{J}_4 . On remarque que $(A4, B1)$, $(A3, B2)$ sont des équilibres de Nash de \mathcal{J}_4 et qu'il n'y en a pas d'autre. Les équilibres de Nash de \mathcal{J} sont donc

$$(A4, B1), (A3, B2).$$

10- Supposons que $G \rightarrow G'$, par suppression de $s_0 \in S_1$ telle que $s_0 \prec t$ (on note $S_1 = \{s_i \mid i \in I\}$, $S_2 = \{\tau_j \mid j \in J\}$).

$$G' = \langle S_1 \setminus \{s_0\}, S_2 \rangle$$

10.1 Soit (σ^*, τ^*) un équilibre de Nash de G' .

$$\sigma^* = \sum_{i \in I} p_i s_i, \quad \tau^* = \sum_{j \in J} q_j \tau_j$$

où $p_i \geq 0, \sum_{i \in I} p_i = 1, q_j \geq 0, \sum_{j \in J} q_j = 1$ et $p_0 = 0$ (car $s_0 \notin S_1 \setminus \{s_0\}$).
 Soit $\sigma = \sum_{i \in I} p'_i s_i$ une stratégie mixte du joueur J1, dans G .

$$r_1(\sigma, \tau^*) = \sum_{i \in I} p'_i (r_1(s_i, \tau^*)).$$

Soit σ_1 la stratégie obtenue à partir de σ en remplaçant s_0 par t :

$$\sigma_1 = \sigma - p'_0 s_0 + p'_0 t.$$

On a alors

$$r_1(\sigma, \tau^*) \leq r_1(\sigma_1, \tau^*) \leq r_1(\sigma^*, \tau^*)$$

donc (σ^*, τ^*) est un équilibre de Nash de G .

10.2 Soit (σ^*, τ^*) un équilibre de Nash de G' .

$$\sigma^* = \sum_{i \in I} p_i s_i.$$

Si $p_0 \neq 0$, pour tout $\tau \in S_2, p_0 r_1(s_0, \tau) < p_0 r_1(t, \tau)$ donc

$$r_1(\sigma^*, \tau^*) < r_1(\sigma^* - p_0 s_0 + p_0 t, \tau^*)$$

et (σ^*, τ^*) ne serait pas un équilibre de Nash de G . On a ainsi prouvé que $p_0 = 0$. Donc $\sigma^* \in \text{conv}(S_1 \setminus \{s_0\})$ est une stratégie mixte de G' . Comme $S_1 \setminus \{s_0\} \subseteq S_1$, le fait que σ^* maximise le gain de J1 contre la stratégie τ^* reste vrai pour G' . Donc (σ^*, τ^*) est un équilibre de Nash de G .

11- En utilisant la succession de dominations : $E1 \prec E2, F3 \prec F1$, le jeu se réduit au jeu :

		F1		F2
<u>E2</u>		(3, 4)		(4, 3)
<u>E3</u>		(4, 3)		(3, 4)

Soit $(p_2 E2 + (1 - p_2) E3, q_1 F1 + (1 - q_1) F2)$ un équilibre de Nash de ce jeu. Nous le noterons $(\sigma(p_2), \tau(q_1))$. On calcule

$$\begin{aligned} r_1(p_2, q_1) &= 3p_2 q_1 + 4p_2(1 - q_1) + 4(1 - p_2)q_1 + 3(1 - p_2)(1 - q_1) \\ &= p_2(4 - 2q_1) + q_1 + 3 \end{aligned}$$

D'après le théorème d'indifférence à l'équilibre, si $(\sigma(p_2), \tau(q_1))$ est un équilibre de Nash, alors cette valeur est indépendante de p_2 , donc $4 - 2q_1 = 0$, d'où $q_1 = \frac{1}{2}$.

De la même façon on obtient :

$$\begin{aligned} r_2(p_2, q_1) &= 4p_2 q_1 + 3p_2(1 - q_1) + 3(1 - p_2)q_1 + 4(1 - p_2)(1 - q_1) \\ &= q_1(2p_2 - 1) - p_2 + 4 \end{aligned}$$

et par le théorème d'indifférence à l'équilibre, $2p_2 - 1 = 0$, d'où $p_2 = \frac{1}{2}$.

L'unique équilibre de Nash de ce jeu est donc

$$\left(\frac{1}{2}E2 + \frac{1}{2}E3, \frac{1}{2}F1 + \frac{1}{2}F2\right).$$

Exercice 2 (10 pts) **Jeu de parité**

1- On calcule le plus grand point fixe de l'application $X \mapsto \chi^{-1}(0) \cap \text{pre}_0(\mathcal{G}, X)$.

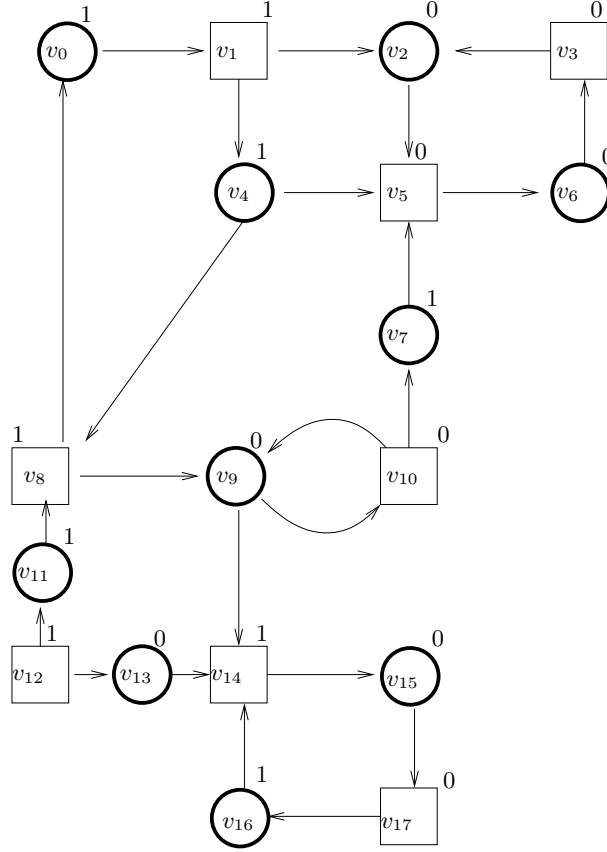


FIGURE 2 – Le graphe \mathcal{G} .

On itère cette application, en partant de V :

$$V_0 = V, \quad V_1 = \{v_2, v_3, v_5, v_6, v_9, v_{10}, v_{13}, v_{15}, v_{17}\}, \quad V_2 = \{v_2, v_3, v_5, v_6, v_9, v_{15}\}, \quad V_3 = \{v_2, v_3, v_5, v_6\}, \quad V_4 = V_3.$$

Donc

$$\text{Piege}_1(\mathcal{G}, \chi^{-1}(0)) = \{v_2, v_3, v_5, v_6\}.$$

Notons P_1 ce piège pour le joueur J_1 .

2- On calcule le plus petit point fixe de l'application $f : X \mapsto P_1 \cup \text{pre}_0(\mathcal{G}, X)$.

On itère cette application f , en partant de \emptyset :

$$W_0 = \emptyset, \quad W_1 = P_1, \quad W_2 = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}, \quad W_3 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}, \quad W_4 = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}, \quad W_5 = W_4.$$

On obtient

$$A_0 = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}.$$

3- A_0 est décomposable en

$$A_0 = \bigcup_{i=0}^3 f^i(P_1).$$

On définit le rang de $v \in A_0$ par :

$$rg(v) = \min\{i \in [0, 4] \mid v \in f^i(P_1)\}.$$

Une stratégie positionnelle gagnante de $J0$ sur $\mathcal{G}[A_0]$ consiste à diminuer le rang du sommet (si ce rang est non-nul) puis, lorsque v appartient au piège P_1 , à jouer dans le piège P_1 . On peut ainsi choisir σ_0 :

$$v_0 \mapsto v_1, \quad v_4 \mapsto v_5, \quad v_7 \mapsto v_5, \quad v_6 \mapsto v_3, \quad v_2 \mapsto v_5.$$

Montrons que σ_0 est gagnante pour $J0$:

soit $\pi = (w_0, \dots, w_n, \dots)$ une partie jouée selon la stratégie σ_0 . Pour $n \geq 3$, $w_n \in P_1 \subseteq \chi^{-1}(0)$. Donc π est gagnée par $J0$.

4- On calcule le plus grand point fixe de : $X \mapsto \chi^{-1}(0) \cap \bar{A}_0 \cap pre_0(\mathcal{G}[\bar{A}_0], X)$.

On itère cette application, en partant de \bar{A}_0 :

$$U_0 = \bar{A}_0, \quad U_1 = \{v_9, v_{10}, v_{13}, v_{15}, v_{17}\}, \quad U_2 = \{v_9, v_{10}, v_{15}\}, \quad U_3 = \{v_9, v_{10}\}, \quad U_4 = U_3.$$

En notant $P'_1 := Piege_1(\mathcal{G}[\bar{A}_0], \chi^{-1}(0) \cap \bar{A}_0)$, on a obtenu

$$P'_1 = \{v_9, v_{10}\}.$$

On calcule maintenant le plus petit point fixe de $g : X \mapsto P'_1 \cup pre_0(\mathcal{G}[\bar{A}_0], X)$.

On itère donc cette application, en partant de \emptyset :

$$X_0 = \emptyset, \quad X_1 = \{v_9, v_{10}\}, \quad X_2 = \{v_8, v_9, v_{10}, v_{15}\}, \quad X_3 = \{v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}, \quad X_4 = X_3.$$

On obtient

$$A_1 = \{v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}.$$

5- 5.1 Pour définir une stratégie positionnelle gagnante de $J0$ sur $\mathcal{G}[A_1]$, on procède comme en Q3 :

$$A_1 = \bigcup_{i=0}^2 g^i(P'_1).$$

Le rang d'un sommet $v \in A_1$ est défini par

$$rg_1(v) = \min\{i \in [0, 2] \mid v \in g^i(P'_1)\}.$$

Une stratégie positionnelle gagnante de $J0$ sur $\mathcal{G}[A_1]$ consiste à diminuer le rang du sommet (si ce rang est non-nul) puis, lorsque v appartient au piège P'_1 , à jouer dans le piège P'_1 . On obtient ainsi la stratégie σ_1 :

$$v_9 \mapsto v_{10}, \quad v_{11} \mapsto v_8.$$

Cette stratégie est gagnante (pour $J0$, sur $\mathcal{G}[A_1]$) par les mêmes arguments qu'en Q3.

5.2 Posons

$$\sigma_{0,1} := \sigma_0 \cup \sigma_1.$$

Soit $\pi = (w_0, \dots, w_n, \dots)$ une partie jouée, sur l'arène $\mathcal{G}[A_0 \cup A_1]$, selon la stratégie $\sigma_{0,1}$.

cas 1 : $w_0 \in A_0$.

Alors la partie se déroule dans A_0 et est jouée selon σ_0 , donc, par Q3, π est gagnée par $J0$.

cas 2 : $w_0 \in A_1$.

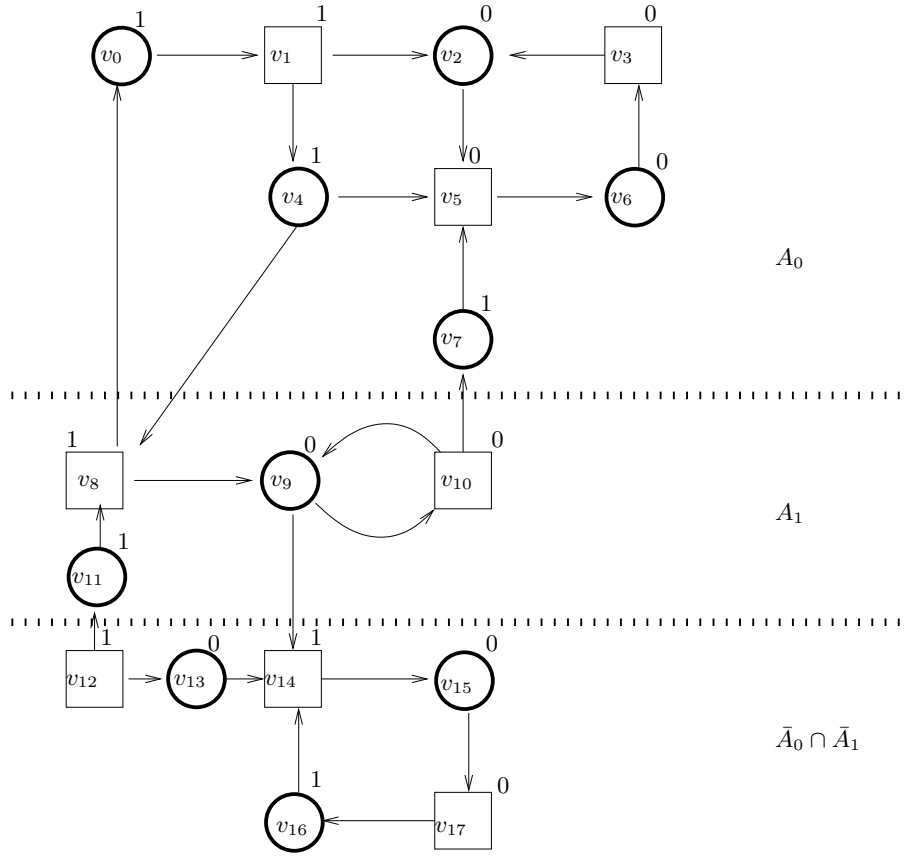


FIGURE 3 – Les 0-attracteurs A_0, A_1 .

1. sous-cas 2.1 $\exists n, w_n \in A_0$.

(i.e. $J1$ joue (v_8, v_0) ou (v_{10}, v_7) au coup $n - 1$).

Alors $(w_n, \dots, w_{n+k}, \dots)$ se déroule dans A_0 et est jouée selon σ_0 donc, par Q3, π est gagnée par $J0$.

2. sous-cas 2.2 $\forall n, w_n \in A_1$.

Alors la partie se déroule dans A_1 et est jouée selon σ_1 , donc, par Q5.1, π est gagnée par $J0$.

5.3 - Comme pour tout $v \in A_0 \cup A_1$, $\sigma_{0,1}(v) \in A_0 \cup A_1$

$$(A_0 \cup A_1) \cap V_0 \subseteq pre_0(A_0 \cup A_1).$$

- si $v \in A_0 \cap V_1$, comme A_0 est un 1-piège (car $pre_0(A_0) = A_0$ donc $A_0 \subseteq pre_0(A_0)$), $vE \subseteq A_0$

- pour $v \in A_1 \cap V_1$, on a $v_8E = \{v_0, v_9\} \subseteq A_0 \cup A_1$ et $v_{10}E = \{v_7, v_9\} \subseteq A_0 \cup A_1$.

On a vérifié que

$$(A_0 \cup A_1) \cap V_1 \subseteq pre_0(A_0 \cup A_1).$$

Donc $A_0 \cup A_1$ est un 1-piège.

Considérons à nouveau $\sigma_{0,1}$. Soit $\pi = (w_0, \dots, w_n, \dots)$ une partie jouée selon $\sigma_{0,1}$ dans \mathcal{G} et commençant en $w_0 \in A_0 \cup A_1$. Comme $A_0 \cup A_1$ est un 1-piège, la partie se déroule entièrement

dans $\mathcal{G}[A_0 \cup A_1]$ et par Q5.2 elle est gagnée par J_0 .

6- Soit

$$\tau : v_{12} \mapsto v_{13}, \quad v_{14} \mapsto v_{15}, \quad v_{17} \mapsto v_{16}.$$

Soit $\pi = (w_0, \dots, w_n, \dots)$ une partie jouée selon τ , dans $\bar{A}_0 \cap \bar{A}_1$. Alors, $\forall n \geq 2, w_n \in \{v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{17}\}$. La partie est donc gagnée par J_1 .

7- Montrons que $\bar{A}_0 \cap \bar{A}_1$ est un 0-piège (de \mathcal{G}).

Solution 1 : vérification calculatoire.

On teste, pour chaque $v \in \bar{A}_0 \cap \bar{A}_1$ que $v \in pre_1(\bar{A}_0 \cap \bar{A}_1)$.

$$v_{12}E \supseteq \{v_{13}\} \subseteq \bar{A}_0 \cap \bar{A}_1$$

$$v_{13}E \subseteq \{v_{14}\} \subseteq \bar{A}_0 \cap \bar{A}_1$$

$$v_{14}E \supseteq \{v_{15}\} \subseteq \bar{A}_0 \cap \bar{A}_1$$

$$v_{15}E \subseteq \{v_{17}\} \subseteq \bar{A}_0 \cap \bar{A}_1$$

$$v_{17}E \supseteq \{v_{16}\} \subseteq \bar{A}_0 \cap \bar{A}_1$$

$$v_{16}E \subseteq \{v_{14}\} \subseteq \bar{A}_0 \cap \bar{A}_1$$

Solution 2 : plus conceptuelle.

Montrons que $A_0 \cup A_1$ est un 0-attracteur.

Soit $v \in pre_0(\mathcal{G}, A_0 \cup A_1)$.

Si $v \in A_0 : v \in A_0 \cup A_1$.

Si $v \in \bar{A}_0 \cap V_0 : Ev \cap (A_0 \cup A_1) \neq \emptyset$.

- si $Ev \cap A_0 \neq \emptyset$ alors $v \in pre_0(\mathcal{G}, A_0) = A_0 \subseteq A_0 \cup A_1$.

- si $Ev \cap A_1 \neq \emptyset$ alors $v \in pre_0(\mathcal{G}[\bar{A}_0], A_1) = A_1 \subseteq A_0 \cup A_1$.

Si $v \in \bar{A}_0 \cap V_1 : Ev \cap \bar{A}_0 \subseteq A_1$, donc $v \in pre_0(\mathcal{G}[\bar{A}_0], A_1) = A_1 \subseteq A_0 \cup A_1$.

Finalement

$$pre_0(\mathcal{G}, A_0 \cup A_1) \subseteq A_0 \cup A_1$$

(q.e.d)

Par dualité, $\bar{A}_0 \cap \bar{A}_1$ est un 0-piège.

La stratégie τ de J_1 lui permet donc de gagner sur l'arène \mathcal{G} :

pour toute partie commençant dans un sommet de $\bar{A}_0 \cap \bar{A}_1$, comme $\bar{A}_0 \cap \bar{A}_1$ est un 0-piège, la partie se déroule entièrement dans $\bar{A}_0 \cap \bar{A}_1$, et par Q6, elle est gagnée par J_1 .

8- Par Q5,3, J_0 est gagnant sur $A_0 \cup A_1$. Par Q7, J_1 est gagnant sur $\bar{A}_0 \cup \bar{A}_1$.