Géométrie Algorithmique
notes de cours

Géraud Sénizergues

Année 2003-2004 [1]

[1]dernière mise à jour :26 avril 2004

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Ce texte est un document de soutien du cours d' Algorithmique Géométrique de la Maîtrise de Maths-Informatique. La durée de l'enseignement est de 24 heures de cours et 36 heures de TD.
Nous nous sommes laissés guider par le livre "Géométrie algorithmique" de Jean-Daniel Boissonat et Mariette Yvinec [BY95]. [1]. Nous avons ponctuellement utilisé les ouvrages [PS85],[Zie98] et [GO97]. Nous utilisons [Ber90] pour quelques rappels de géométrie.

Sujet Décrire le sujet en quelques mots.
Définir brièvement les notions de complexité et calculabilité utilisées.
(Calculs sur des nombres réels, au sens de Schub-Hub-Smale)

Quelques problemes
PB1 : Triangulation de coût minimum d'un polygone du plan.
PB2 : Appartenance d'un point à une enveloppe convexe
PB3 : Majorer le nombre de facettes d'un polytope connaissant son nombre de sommets.
PB4 : Plus courte distance entre 2 points d'un nuage de points du plan.

[1]Je remercie ces auteurs de la gentillesse et l'efficacité avec laquelle ils m'ont aidé à utiliser ce livre pour un cours d'une durée relativement limitée

Chapitre 2

Rappels de géométrie/topologie

2.1 Espaces affines ; convexité

Notons $\mathbb{E}^d$ l' ensemble $\mathbb{R}^d$. Il possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et aussi une structure d'espace affine sur $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{E}^d$.
On appelle *combinaison linéaire* de points de $\mathcal{A}$, tout point de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$$

où $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et les A_i sont des points de $\mathcal{A}$.
On appelle *combinaison linéaire positive* de points de $\mathcal{A}$, tout point de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$$

où $\lambda_i > 0$ et les A_i sont des points de $\mathcal{A}$.
On appelle *combinaison affine* de points de $\mathcal{A}$, tout point de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$$

où les A_i sont des points de $\mathcal{A}$ et $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.
On appelle *combinaison convexe* de points de $\mathcal{A}$, tout point de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$$

où les A_i sont des points de $\mathcal{A}$ et $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ et $\forall 1 \leq i \leq n, 0 \leq \lambda_i \leq 1$.

Définition 2.1.1 *: 1-Une partie $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{E}^d$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}^d$, ssi elle est fermée par combinaison linéaire ;*
2-Une partie $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{E}^d$ est un cône de $\mathbb{E}^d$, ssi elle est fermée par combinaison linéaire positive ;
3-Une partie $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{E}^d$ est un sous-espace affine de $\mathbb{E}^d$, ssi elle est fermée par combinaison affine ;
4-Une partie $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{E}^d$ est convexe, ssi elle est fermée par combinaison convexe.

On peut vérifier que $\mathcal{A}$ est convexe ssi, pour toute paire de points $P, Q \in \mathcal{A}$, le segment $[P, Q]$ est inclus dans $\mathcal{A}$ [1].
Etant donné $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{E}^d$ on note :

$$\text{vect}(\mathcal{A}) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i \mid n \geq 0, \lambda_i \in \mathbb{R}, A_i \in \mathcal{A}\}$$

c'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant $\mathcal{A}$.

$$\text{cone}(\mathcal{A}) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i \mid n \geq 0, \lambda_i \in \mathbb{R}^+, A_i \in \mathcal{A}\}$$

c'est le plus petit cône contenant $\mathcal{A}$.

$$\langle\ \mathcal{A}\ \rangle = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i \mid n \geq 0, \lambda_i \in \mathbb{R}, A_i \in \mathcal{A}\}$$

c'est le plus petit sous-espace affine contenant $\mathcal{A}$.

$$\text{conv}(\mathcal{A}) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i \mid n \geq 0, \lambda_i \in \mathbb{R}, A_i \in \mathcal{A}\}$$

[1] Ce dernier point de vue peut être généralisé à des géométries non-euclidiennes, via la notion de géodésique de P à Q.

c'est la plus petite partie convexe contenant $\mathcal{A}$ ou encore *l'enveloppe convexe* de $\mathcal{A}$.
Remarquons que si $\mathcal{A}$ est finie, alors $\mathrm{conv}(\mathcal{A})$ est fermé et borné, donc $\mathrm{conv}(\mathcal{A})$ est un convexe compact.

Définition 2.1.2 *On appelle* polytope *toute enveloppe convexe $\mathcal{P}$ d'un ensemble* fini *de points d'un espace $\mathbb{E}^d$.*

Soit $\mathcal{C}$ une partie convexe de $\mathbb{E}^d$. On appelle *dimension* de $\mathcal{C}$, notée $\dim(\mathcal{C})$, la dimension de l'espace affine $\langle\ \mathcal{C}\ \rangle$.

Théorème 2.1.3 (Hahn-Banach) *Soit $\mathbb{E}$ un espace affine sur $\mathbb{R}$, de dimension finie. Soit $\mathcal{A}$ un ouvert convexe de $\mathbb{E}$ et L un sous-espace affine de $\mathbb{E}$ tels que $\mathcal{A} \cap L = \emptyset$. Alors il existe un hyperplan H de $\mathbb{E}$ qui contient L et ne rencontre pas $\mathcal{A}$.*

Preuve : On choisit $\mathbb{E} = \mathbb{R}^d$ où $d \geq 1$. Soit $M \supseteq L$ un sous-espace affine de dimension maximum tel que $M \cap \mathcal{A} = \emptyset$. On suppose que $0 \in L$.
Si $\dim M = d - 1$, le théorème est vrai.
Sinon

$$\dim M \leq d - 2 \tag{2.1}$$

Nous allons montrer que l'hypothèse (2.1) est en fait absurde.
Soit $p : \mathbb{E} \to \mathbb{E}/M$ la projection. $p(\mathcal{A})$ est convexe, $0 \notin p(\mathcal{A})$ et $p(\mathcal{A})$ est ouvert.
Soit $Z \subseteq \mathbb{E}/M$ un plan vectoriel rencontrant $p(\mathcal{A})$; notons

$$\mathcal{B} = p(\mathcal{A}) \cap Z.$$

$\mathcal{B}$ est convexe, $0 \notin \mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$ est ouvert dans Z.
Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre 0 et de rayon 1 (dans Z).
Soit $\pi : Z - \{0\} \to \mathcal{C}$, l'application associant à tout point $P \neq 0$ l'intersection de la demi-droite $[0, P[$ avec $\mathcal{C}$. π est continue et ouverte.
Donc $\pi(\mathcal{B})$ est connexe et ouvert. Notons $\mathcal{C}' = \pi(\mathcal{B})$. C'est donc un arc de cercle ouvert (voir la figure 2.1).
Si $\mathcal{C}'$ contenait deux points diamétralement opposés, P', Q', alors $\mathcal{B}$ contiendrait deux points P, Q tels que $0 \in [P, Q]$. Comme $\mathcal{B}$ est convexe, on aurait

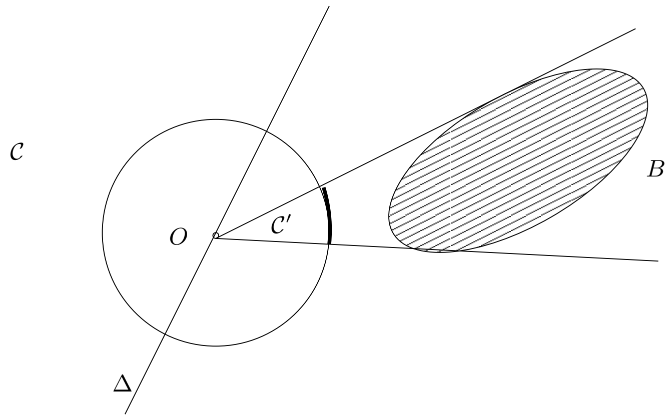


FIG. 2.1 – L'arc ouvert $\mathcal{C}'$.

$0 \in \mathcal{B}$, ce qui est faux. Donc $\mathcal{C}'$ ne contient pas deux points diamétralement opposés. Donc

$$\text{longueur}(\mathcal{C}') \leq \pi.$$

Comme $\mathcal{C}'$ est un arc ouvert, on en conclut qu'il existe une droite $\Delta, 0 \in \Delta \subseteq Z$, qui ne coupe pas $\mathcal{B}$. Donc $M' = p^{-1}(\Delta)$ est un sous-espace de dimension $\dim(M)+1$ contenant L et $M' \cap \mathcal{A} = \emptyset$. La maximalité de M est contredite, donc (2.1) est absurde. $\square$

Lemme 2.1.4 *Soit $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{E}$ un convexe. Alors son intérieur, est convexe.*

Lemme 2.1.5 *Soit $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{E}$ un convexe de dimension d. Alors $\mathcal{C} \subseteq \overline{\overset{\circ}{\mathcal{C}}}$.*

Preuve : Comme $\dim(\mathcal{C}) = d \geq 0, \exists Y \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}$.
Soit $\delta > 0$ tel que $\mathrm{B}(Y, \delta) \subseteq \overset{\circ}{\mathcal{C}}$. Soit $X \in \mathcal{C}$.
Pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ tel que $\| u \| \leq \delta$ et tout $\epsilon > 0$ on a :

$$(1-\epsilon)X + \epsilon(Y+u) \in \mathcal{C}.$$

Donc $\mathrm{B}((1-\epsilon)X + \epsilon Y, \epsilon \cdot \delta) \subseteq \mathcal{C}$. Donc , $\forall \epsilon > 0, (1-\epsilon)X + \epsilon Y \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}$. On en conclut que que $X \in \overline{\overset{\circ}{\mathcal{C}}}$. $\square$

Définition 2.1.6 *Soit* $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{E}$ *un convexe. On appelle* hyperplan-support *de* $\mathcal{C}$*, tout hyperplan* H *tel que,*
1- $\mathcal{C} \cap H \neq \emptyset$
2- $\mathcal{C} \subseteq \overline{H^+}$
où l'on note H^+, H^- *les deux composantes connexes de* $\mathbb{E} - H$*.*

Introduisons deux types de points de la frontière d'un convexe.

Définition 2.1.7 *Soit* $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{E}$ *un convexe. On appelle* sommet *de* $\mathcal{C}$*, tout point* $X \in \mathcal{C}$ *tel que : il existe un hyperplan-support* H *de* $\mathcal{C}$*, tel que* $\mathcal{C} \cap H = X$*.*

Définition 2.1.8 *Soit* $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{E}$ *un convexe et* $X \in \mathcal{C}$*.* X *est dit* extrêmal *ssi, pour tous* $Y, Z \in \mathcal{C}$*,*

$$X = \frac{Y+Z}{2} \Rightarrow Y = Z.$$

On vérifie aisément le

Lemme 2.1.9 *Tout sommet d'un convexe* $\mathcal{C}$ *est aussi un point extrêmal.*

La réciproque n'est pas vraie en général mais devient vraie lorsque $\mathcal{C}$ est un polytope (voir section 3.1).

Théorème 2.1.10 *Par tout point de la frontière d'un convexe passe un hyperplan-support.*

Preuve : Soit $\mathcal{C}$ un convexe de $\mathbb{E}$, espace affine de dimension d.
cas 1 : $\dim(\mathcal{C}) = d$;
Soit $X \in \partial\mathcal{C}$.Alors $X \notin \overset{\circ}{\mathcal{C}}$ et $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$ est convexe. Par le théorème de Hahn-Banach :

$$\exists H, \text{ hyperplan } \mid X \in H \text{ et } H \cap \overset{\circ}{\mathcal{C}} = \emptyset.$$

Notons H^+ le demi-espace tel que $\overset{\circ}{\mathcal{C}} \subseteq H^+$.
D' après le lemme 2.1.5,

$$\mathcal{C} \subseteq \overline{\overset{\circ}{\mathcal{C}}} \subseteq \overline{H^+},$$

donc H est un hyperplan-support.
cas 2 : $\dim(\mathcal{C}) \leq d-1$;
Soit H un hyperplan contenant $\langle\ \mathcal{C}\ \rangle$. Alors H est un hyperplan-support. □

Théorème 2.1.11 *Soit $\mathcal{C}$ une partie fermée de $\mathbb{E}^d$. $\mathcal{C}$ est convexe ssi $\mathcal{C}$ est l'intersection des demi-espaces fermés qui la contiennent.*

Preuve : Il suffit de montrer que , si $X \notin \mathcal{C}$, alors il existe un demi-espace fermé contenant $\mathcal{C}$ et ne contenant pas X.
Soit $X \notin \mathcal{C}$. Soit $Y \in \mathcal{C}$, et Δ la droite passant par X, Y et Z un point d'intersection de $[X, Y]$ avec $\partial\mathcal{C}$. Par le théorème 2.1.10 il existe un hyperplan support de $\mathcal{C}$ passant par Z. On a alors $X \in H^-$ alors que $\mathcal{C} \subseteq \overline{H^+}$. □

Quelques exercices

Lemme 2.1.12 *Soient $H_1, \ldots, H_i, \ldots, H_n$ des hyperplans de $\mathbb{E}^d$. Alors*
1- $\mathbb{E}^d \not\subseteq \cup_{i=1}^n H_i$
2- aucune boule ouverte de $\mathbb{E}^d$ n'est incluse dans $\cup_{i=1}^n H_i$.

2.2 Espaces projectifs et sphères

Espace projectif Soit $d \geq 0$. Considérons l' équivalence $\sim$ sur $\mathbb{R}^{d+1} - \{0\}$: étant donnés $\overrightarrow{X}, \overrightarrow{X}' \in \mathbb{R}^{d+1} - \{0\}$,

$$\overrightarrow{X} \sim \overrightarrow{X}' \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}, \overrightarrow{X} = \lambda \cdot \overrightarrow{X}'.$$

L'*espace projectif* de dimension d, noté $\mathbb{P}^d$,sur $\mathbb{R}$ est défini comme l'ensemble des classes modulo $\sim$:

$$\mathbb{P}^d = \mathbb{R}^{d+1} - \{0\}/\sim .$$

Notons : $pp : \mathbb{R}^{d+1} - \{0\} \to \mathbb{P}^d$ l'application associant à un vecteur non-nul sa classe d' équivalence.
On appelle sous-variété projective de dimension k toute partie de la forme $pp(V - \{0\})$ où V est une sous-variété vectorielle de dimension $k+1$ de $\mathbb{R}^{d+1}$.
En particulier une droite projective est la projection d'un plan vectoriel (privé de 0).

L'espace affine $\mathbb{E}^d$ dans l' espace vectoriel $\mathbb{R}^{d+1}$
L'espace affine $\mathbb{E}^d$ est plongé dans $\mathbb{R}^{d+1}$ par l'application : $j : \mathbb{E}^d \to \mathbb{R}^{d+1}$

$$X \mapsto j(X) = (X, 1).$$

Cette application est une application affine, injective, d'image

$$j(\mathbb{E}^d) : \quad x_{d+1} = 1.$$

(Voir la figure 2.2).
Les enveloppes convexes dans $\mathbb{E}^d$ sont reliées aux cônes dans $\mathbb{R}^{d+1}$ via l'

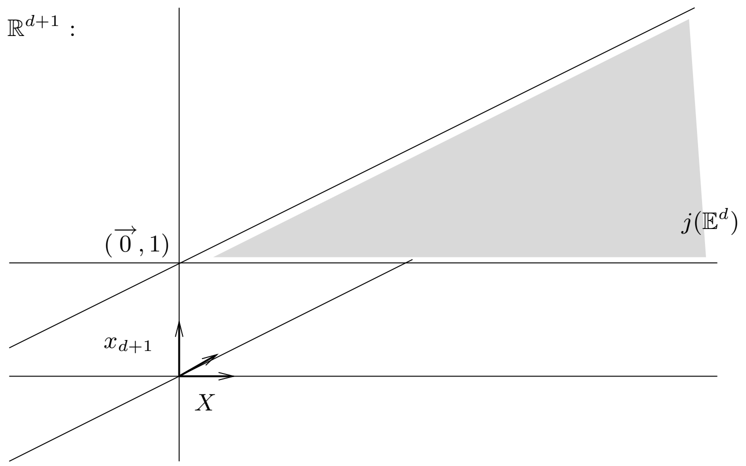


FIG. 2.2 – $\mathbb{E}^d$ dans $\mathbb{R}^{d+1}$.

égalité :

$$\mathrm{conv}(j(\mathcal{A})) = \mathrm{cone}(j(\mathcal{A})) \cap j(\mathbb{E}^d). \tag{2.2}$$

(Voir la figure 2.3).

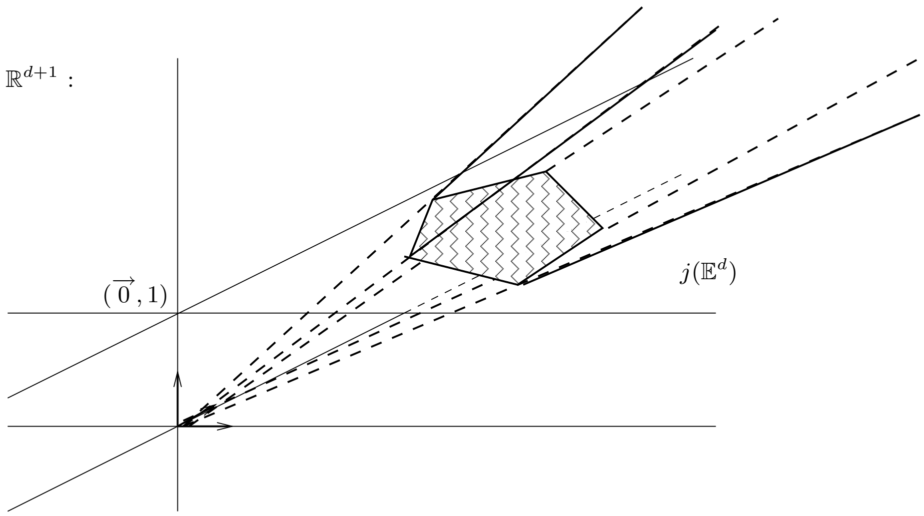


FIG. 2.3 – L'enveloppe de $\mathcal{A}$ et son cône.

L'espace affine dans l' espace projectif
L'espace affine $\mathbb{E}^d$ est plongé dans $\mathbb{P}^d$ par l'application : $\bar{j} : \mathbb{E}^d \to \mathbb{P}^d$

$$X \mapsto \bar{j}(X) = [(X, 1)]_{\sim}.$$

Cette application est une injection. Pour toute sous-variété affine $\mathbb{V}$ de dimension k, la sous-variété projective engendrée par $j(\mathbb{V})$ est de dimension k.
Posons :

$$H_\infty = \{[x_1, x_2, \dots, x_d, x_{d+1}]_{\sim} \mid x_{d+1} = 0\}.$$

L'image par $\bar{j}$ de $\mathbb{E}^d$ est exactement $\mathbb{P}^d - H_\infty$.

Sphère Soit $d \geq 0$. Considérons l' équivalence $\approx$ sur $\mathbb{R}^{d+1} - \{0\}$: étant donnés $\overrightarrow{X}, \overrightarrow{X}' \in \mathbb{R}^{d+1} - \{0\}$,

$$\overrightarrow{X} \approx \overrightarrow{X}' \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^+ - \{0\}, \overrightarrow{X} = \lambda \cdot \overrightarrow{X}'.$$

La sphère de dimension d, notée $\mathbb{S}^d$,sur $\mathbb{R}$ est définie comme l'ensemble des classes modulo $\approx$:

$$\mathbb{S}^d = \mathbb{R}^{d+1} - \{0\}/ \approx .$$

Notons : $ps : \mathbb{R}^{d+1} - \{0\} \to \mathbb{S}^d$ l'applications associant à un vecteur non-nul sa classe d' équivalence.
On appelle sous-variété sphérique de dimension k toute partie de la forme $ps(V - \{0\})$ où V est une sous-variété vectorielle de dimension $k+1$ de $\mathbb{R}^{d+1}$. En particulier une droite sphérique est la projection d'un plan vectoriel (privé de 0). L'espace affine $\mathbb{E}^d$ est plongé dans $\mathbb{S}^d$ par l'application :
$j : \mathbb{E}^d \to \mathbb{S}^d$

$$X \mapsto j(X) = [(X,1)]_{\approx}.$$

Posons :

$$H_\infty = \{[x_1, x_2, \ldots, x_d, x_{d+1}]_{\approx} \mid x_{d+1} = 0\}$$

$H_\infty^+ = \{[x_1, x_2, \ldots, x_d, x_{d+1}]_{\approx} \mid x_{d+1} > 0\}$; $H_\infty^- \{[x_1, x_2, \ldots, x_d, x_{d+1}]_{\approx} \mid x_{d+1} < 0\}$.
L'image par j de $\mathbb{E}^d$ est exactement H_∞^+.

$\mathbb{P}^d$ (resp. $\mathbb{S}^d$) sont munis de la topologie quotient déduite de la topologie habituelle sur $\mathbb{R}^{d+1}$: c'est la topologie la plus fine qui rende continue la projection pp. Dans les deux cas j est un homéomorphisme sur son image.

Considérons maintenant le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{d+1}$:

$$S(d) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1} \mid \sum_{i=1}^{d+1} x_i^2 = 1\}$$

(c'est la sphère de $\mathbb{R}^{d+1}$, au sens habituel du terme). Soit : $h : S(d) \to \mathbb{S}^d$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{d+1}) \mapsto [(x_1, x_2, \ldots, x_{d+1})]_{\sim}.$$

h est un homéomorphisme.

La sphère et l'espace projectif Remarquons que si $\overrightarrow{X} \approx \overrightarrow{X}'$ alors $\overrightarrow{X} \sim \overrightarrow{X}'$. On peut donc définir une application $r : \mathbb{S}^d \to \mathbb{P}^d$ par

$$r([\overrightarrow{X}]_{\approx}) = [\overrightarrow{X}]_{\sim}.$$

Cette application est continue. L'image réciproque de chaque point de $\mathbb{P}^d$ est une paires de points antipodaux sur la sphère (si on voit la sphère comme $S(d) \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$).

Polarité Soit $B : \mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}$, une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée sur $\mathbb{R}^{d+1}$. La forme quadratique associée à B est :

$$Q(\overrightarrow{X}) = B(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{X})$$

et la quadrique projective associée est :

$$\mathbb{Q} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{P}^d \mid \exists \overrightarrow{X} \in \mathbb{R}^{d+1}, Q(\overrightarrow{X}) = 0 \text{ et } pp(\overrightarrow{X}) = \mathbf{X}\}$$

Autrement dit, la quadrique est la projection de l'ensemble des vecteurs isotropes de B.

Etant donné un vecteur $\overrightarrow{X} \in \mathbb{R}^{d+1}$ et $\mathbf{X} = pp(\overrightarrow{X})$ on pose :

$$\overrightarrow{X}^{\perp} = \{\overrightarrow{Y} \in \mathbb{R}^{d+1}, B(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}) = 0\}$$
$$\mathbf{X}^* = \{\mathbf{Y} \in \mathbb{P}^d, \exists \overrightarrow{Y} \in \mathbb{R}^{d+1}, \mathbf{Y} = pp(\overrightarrow{Y}) \text{ et } B(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}) = 0\}.$$

$\mathbf{X}^*$ est un hyperplan projectif, appelé l'hyperplan *polaire* de $\mathbf{X}$ par rapport à la quadrique $\mathbb{Q}$.
Plus généralement,

Définition 2.2.1 *Étant donné un sous-ensemble $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{P}^d$, on pose :*

$$\mathcal{A}^* = pp(pp^{-1}(\{\mathcal{A}\})^{\perp})$$

Les propriétés de l'orthogonalité par rapport à une forme bilinéaire dégénérée entraînent que, pour toute sous-variété projective $\mathbf{V} \subseteq \mathbb{P}^d$:

$$\dim(\mathbf{V}) + \dim(\mathbf{V}^*) = d - 1 \text{ et } \mathbf{V}^{**} = \mathbf{V}. \tag{2.3}$$

et pour toute famille finie de sous-variétés projectives $\mathbf{V}_i \subseteq \mathbb{P}^d$ ($i \in \mathrm{I}$:

$$(\cap_{i\in I}\mathbf{V}_i)^* = \langle \cup_{i\in I} H_i^* \rangle \tag{2.4}$$

$$(\langle \cup_{i\in I} H_i \rangle)^* = \cap_{i\in I}\mathbf{V}_i^* \tag{2.5}$$

2.3 Courbes planes

Enonçons le théorème de Jordan :

Théorème 2.3.1 *Soit $\gamma : S^1 \to \mathbb{E}^2$, une application continue et injective. Notons C l'image de γ (C est une "courbe fermée simple". Alors $\mathbb{E}^2 - C$ a exactement deux composantes connexes, l'une d' elles, est bornée et l' autre est non-bornée.*

Nous noterons C^+ (resp. C^-) la composante bornée (resp. non-bornée) de $\mathbb{E}^2 - C$ dans la suite de ce texte. Prouvons le théorème 2.3.1 dans le cas où γ est affine par morceaux, ce qui revient à dire que C est une ligne polygonale. `Preuve suivant les idees de Boissonat-Yvinec`.

Chapitre 3

Polytopes

3.1 Treillis des faces

Soit H un hyperplan de $\mathbb{E}^d$. Le complémentaire de H dans $\mathbb{E}^d$ a deux composantes connexes que nous noterons H^+, H^-. On note

$$\overline{H^+} = H^+ \cup H \text{ et } \overline{H^-} = H^- \cup H,$$

(les adhérences topologiques de H^+, H^-).
Soit $\mathcal{P}$ un polytope de $\mathbb{E}^d$. On appelle *face propre* de $\mathcal{P}$ toute intersection $F = H \cap \mathcal{P}$ d'un hyperplan-support de $\mathcal{P}$ avec $\mathcal{P}$. On dit alors que H est un *support* de $\mathcal{P}$ suivant F. On appelle *face impropre* de $\mathcal{P}$ l'ensemble vide et l'ensemble $\mathcal{P}$ tout entier.
Chaque face est un ensemble convexe . On appelle k-face de $\mathcal{P}$, une face F dont la dimension vaut k ; k peut prendre des valeurs entre -1 (dimension de la face vide) et d (dimension du polytope entier s'il est de dimension d). Les 0-faces sont les *sommets*, les 1-faces sont les *arêtes*, les $(d-1)$-faces sont les *facettes* du polytope.

Lemme 3.1.1 *Soit $\mathbb{V}$ un sous-espace affine de $\mathbb{E}$, espace affine de dimension finie. Supposons que $\mathcal{P}$ est un polytope de $\mathbb{V}$. Alors*
1- $\mathcal{P}$ est un polytope de $\mathbb{E}$
2- Les faces de $\mathcal{P}$ polytope de $\mathbb{V}$ sont les mêmes que les faces de $\mathcal{P}$ polytope de $\mathbb{E}$.

Autrement dit, bien que la notion d'hyperplan-support dépende de l'espace affine "ambiant", la notion de face, elle, en est indépendante.
Esquisse de preuve : 1- Evident.
2.1- Soit F une face de $\mathcal{P}$, dans l'espace $\mathbb{V}$: il existe un hyperplan H de $\mathbb{V}$ tel que :

$$F = H \cap \mathcal{P} \text{ et } \mathcal{P} \subseteq \overline{H^+},$$

(où H^+ est un demi-espace de $\mathbb{V}$).
Soit U un supplémentaire de $\mathbb{V}$ dans $\mathbb{E}$, coupant $\mathbb{V}$ en un point de H. On peut supposer que ce point est 0. Alors $H + U = H'$ est un hyperplan de $\mathbb{E}$ tel que

$$F = H' \cap \mathcal{P} \text{ et } \mathcal{P} \subseteq \overline{H'^+}.$$

2.2- Soit F une face de $\mathcal{P}$, dans l'espace $\mathbb{E}$: il existe un hyperplan H' de $\mathbb{E}$ tel que :

$$F = H' \cap \mathcal{P} \text{ et } \mathcal{P} \subseteq \overline{H'^+}.$$

cas 1 : $\mathbb{V} \subseteq H'$.
Alors $\mathcal{P} \subseteq H$ donc $F = \mathcal{P}$ est bien une face dans $\mathbb{V}$.
cas 2 : $\mathbb{V} \cap H' = H$ est un hyperplan de $\mathbb{V}$.
Alors $F = H \cap \mathcal{P}$ et $\mathcal{P} \subseteq \overline{H^+}$. □

Théorème 3.1.2 *Le bord d'un polytope est l'union de ses faces propres.*

Preuve : Soit $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{E}^d$ un polytope de dimension d.
1-Soit $X_0 \in \partial\mathcal{P}$. Par le lemme 2.1.10, il existe un hyperplan support de $\mathcal{P}$ passant par X_0. $\mathcal{P} \cap H = F$ est donc une face de $\mathcal{P}$ et $X_0 \in F$.
2-Soit $X_0 \in F$ où $\mathcal{P} \cap H = F$ et H est un hyperplan support de $\mathcal{P}$. Pour tout $\epsilon > 0$,

$$H^- \cap \mathrm{B}(X_0, \epsilon) \neq \emptyset.$$

Donc $X_0 \in \overline{\mathbb{E}^d - \mathcal{P}}$. Comme on a aussi $X_0 \in \overline{\mathcal{P}}$, finalement : $X_0 \in \partial\mathcal{P}$. □

Théorème 3.1.3 *Toute face d'un polytope est elle-même un polytope. Tout polytope a un nombre fini de faces.*

Preuve : Soit χ une partie finie de $\mathbb{E}^d$ et $\mathcal{P} = \mathrm{conv}(\chi)$. Soit F une face de $\mathcal{P}$: $H \cap \mathcal{P} = F$ et H est un hyperplan support de $\mathcal{P}$.

Posons $\chi' = \chi \cap F$ et montrons que

$$H \cap \mathcal{P} = \mathrm{conv}(\chi').$$

1- Comme F est un convexe contenant χ', $\mathrm{conv}(\chi') \subseteq F$.
2- Soit $X \in F$.

$$X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i$$

avec $\lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \chi = \{X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_n\}$. L' hyperplan H a une équation de la forme

$$X \in H \Leftrightarrow (X - X_0) \cdot \overrightarrow{n} = 0$$

et $\mathcal{P} \subseteq \overline{H^+}$ d' équation

$$X \in H^+ \Leftrightarrow (X - X_0) \cdot \overrightarrow{n} \geq 0.$$

Comme $X_i \in \mathcal{P} \subseteq \overline{H^+}$, on doit avoir

$$((\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i) - X_0) \cdot \overrightarrow{n} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (X_i - X_0) \cdot \overrightarrow{n} \geq 0.$$

Dans cette somme, les $X_i \in H$ ont une contribution nulle et les $X_i \in H^+$ ont une contribution strictement positive. Mais comme X vérifie l' équation de H, la somme est nulle, donc $\sum_{X_i \in H^+} \lambda_i (X_i - X_0) \cdot \overrightarrow{n} = 0$, donc pour tous les $X_i \in H^+, \lambda_i = 0$. Finalement $X \in \mathrm{conv}(\chi')$.
3- D'après ce qui précède, le nombre de faces de $\mathcal{P} = \mathrm{conv}(\chi)$ est majoré par $2^{\mathrm{Card}\chi}$. □

Proposition 3.1.4 *Si F_2 est une face de F_1 qui est une face du polytope $\mathcal{P}$, alors F_2 est une face de $\mathcal{P}$.*

Preuve : Supposons que : H_1est un hyperplan supportant F_1, K est un hyperplan de H_1, supportant F_2 et $0 \in K$.

$$H_1 = \{X \in \mathbb{E}^d, X \cdot N_1 = 0\}; \;\; \overline{H_1^+} = \{X \in \mathbb{E}^d, X \cdot N_1 \geq 0\}$$

$$K = \{X \in H_1, X \cdot L = 0\}; \;\; \overline{K^+} = \{X \in H_1, X \cdot L \geq 0\}$$

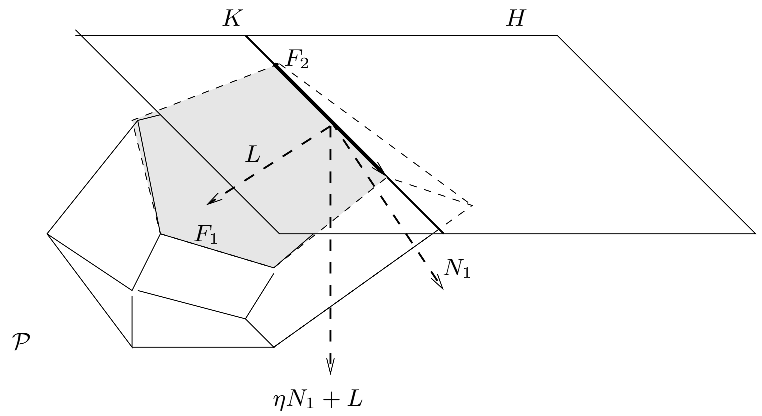


FIG. 3.1 – F_2, face de F_1.

$$\mathcal{P} = \mathrm{conv}(\chi); \quad \chi_1 = \chi \cap F_1; \quad \chi_2 = \chi \cap F_2.$$

Posons

$$\eta_0 = \max\{-\frac{V \cdot L}{V \cdot N_1} \mid V \in \chi - \chi_1\}.$$

Soit $\eta > \eta_0$ et soit H l'hyperplan de $\mathbb{E}^d$ d' équation :

$$H : \quad X \cdot (\eta N_1 + L) = 0.$$

Montrons que H supporte $\mathcal{P}$ suivant F_2.
1-H contient les points de χ_2.
Par la preuve du théorème 3.1.3, on sait que $\mathrm{conv}(\chi_2) = F_2$, donc

$$\mathcal{P} \cap H \supseteq F_2. \tag{3.1}$$

2-Considérons le demi-espace :

$$H^+ : \quad X \cdot (\eta N_1 + L) > 0.$$

2.1 :soit $X \in \chi - \chi_1$.

$$-\frac{X \cdot L}{X \cdot N_1} < \eta \text{ et } X \cdot N_1 > 0$$

donc $X \cdot (\eta N_1) + X \cdot L > 0$.
2.2 : soit $X \in \chi_1 - \chi_2$.

$X \cdot (\eta N_1 + L) = X \cdot L > 0$.
Les deux cas 2.1,2.2 montrent que

$$H^+ \supseteq \chi - \chi_2.$$

Il en résulte que toute combinaison convexe des points de χ qui est dans H doit avoir des coefficients nuls sur les points de $\chi - \chi_2$. Donc

$$\mathcal{P} \cap H \subseteq F_2. \tag{3.2}$$

De plus, on a établi que $\chi \subseteq H \cup H^+ = \overline{H^+}$, donc

$$\mathcal{P} \subseteq \overline{H^+}. \tag{3.3}$$

Les trois équations (3.1),(3.2),(3.3), établissent que H supporte $\mathcal{P}$ suivant F_2. $\square$

Proposition 3.1.5 *Si F_2, F_1 sont des faces du polytope $\mathcal{P}$ et $F_2 \subseteq F_1$, alors F_2 est une face de F_1.*

La preuve est évidente.

Proposition 3.1.6 *Si F_1, F_2 sont des faces du polytope $\mathcal{P}$, alors $F_1 \cap F_2$, est une face de $\mathcal{P}$.*

Preuve :
Cas 1 : $F_1 \cap F_2 = \emptyset$,
alors $F_1 \cap F_2$ est la face vide de $\mathcal{P}$.
Cas 2 :$F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$: $X_0 \in F_1 \cap F_2$.
Supposons que, pour $i \in \{1, 2\}$:

$$H_i = \{X \in \mathbb{E}^d \mid (X - X_0) \cdot \overrightarrow{n_i} = 0\},$$

est un hyperplan support de $\mathcal{P}$ suivant F_i. Posons :

$$H = \{X \in \mathbb{E}^d \mid (X - X_0) \cdot (\overrightarrow{n_1} + \overrightarrow{n_2}) = 0\}.$$

Pour tout $X \in \mathcal{P}$, et $i \in \{1, 2\}$,$(X - X_0) \cdot \overrightarrow{n_i} \geq 0$, donc $(X - X_0) \cdot (\overrightarrow{n_1} + \overrightarrow{n_2}) \geq 0$, donc

$$\mathcal{P} \subseteq \overline{H^+}. \tag{3.4}$$

D'autre part, $X \in H \cap \mathcal{P}$ si et seulement si

$$(X - X_0) \cdot (\overrightarrow{n_1} + \overrightarrow{n_2}) = 0 \text{ et } X \in \mathcal{P}$$

ce qui, vu que $X \in \overline{H_1^+}$ et $X \in \overline{H_2^+}$, revient à

$$(X - X_0) \cdot \overrightarrow{n_1} = (X - X_0) \cdot \overrightarrow{n_2} = 0 \text{ et } X \in \mathcal{P}$$

i.e.

$$X \in F_1 \cap F_2.$$

Finalement, H est un hyperplan support de $\mathcal{P}$ et il détermine la face $F_1 \cap F_2$.
□

Théorème 3.1.7 *Soit $\mathcal{P} = \mathrm{conv}(\mathcal{A})$ où $\mathcal{A}$ est fini. Soit $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{E}^d$. Les 4 propriétés suivantes de $\mathcal{E}$ sont équivalentes :*
1-$\mathcal{E}$ est l'ensemble des sommets de $\mathcal{P}$.
2-$\mathcal{E}$ est l'ensemble des points extrémaux de $\mathcal{P}$.
3-$\mathcal{E} = \{X \in \mathcal{A} \mid X \notin \mathrm{conv}(\mathcal{A} - \{X\})\}$
4-$\mathcal{E}$ est la plus petite partie de $\mathbb{E}^d$ telle que $\mathcal{P} = \mathrm{conv}(\mathcal{E})$

Preuve : On note $\mathcal{E}_i$ l'ensemble de points considéré dans le point i du théorème.
$\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_2)$:
Vu dans le lemme 2.1.9.
$\mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{E}_1)$:
Par récurrence sur la dimension d de $\mathcal{P}$.
Si $d = 0$, alors le résultat est trivial.
Soit X un point extrémal de $\mathcal{P}$. Alors $X \notin \overset{\circ}{\mathcal{P}}$,donc $X \in \partial\mathcal{P}$. Soit F une face de $\mathcal{P}$ passant par X. X est aussi extrêmal dans F et comme $\dim(F) \leq d-1$, par hypothèse de récurrence, c'est un sommet de F. Par la proposition 3.1.4 X est un sommet de $\mathcal{P}$.
$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3$:
Montrons , par double inclusion, que $\mathcal{P} - \mathcal{E}_2 = \mathcal{P} - \mathcal{E}_3$. Soit X non-extrêmal. Soit $X \notin \mathcal{A}$, donc $X \notin \mathcal{E}_3$. Soit $X \in \mathcal{A}$ mais $X = \frac{Y+Z}{2}$ où $Y, Z \in \mathrm{conv}(\mathcal{A}), Y \neq Z$.
$Y \neq Z$ entraine que $Y \neq X$ et $Z \neq X$. On a

$$X = \frac{Y+Z}{2}; \;\; Y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i; \;\; Z = \sum_{i=1}^{n} \mu_i A_i.$$

Si $X = A_{i_0}$ on doit avoir $\lambda_{i_0} \neq 1$ et $\mu_{i_0} \neq 1$. Donc

$$X = (\frac{1}{1 - \frac{\lambda_{i_0}+\mu_{i_0}}{2}}) \sum_{i \neq i_0} \frac{\lambda_i + \mu_i}{2} A_i.$$

Ce qui montre que $X \notin \mathcal{E}_3$.
Réciproquement, soit $X \notin \mathcal{E}_3$. Alors X est une combinaison convexe de points de $\mathcal{P} - \{X\}$. Donc X est non-extrêmal.
$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_4)$:
Montrons, par récurrence sur la dimension d que, pour tout convexe compact $\mathcal{C}$ de dimension d, l'ensemble des points extrêmaux engendre bien $\mathcal{C}$.
Si $d = 0$, cette propriété est triviale.
Si $d = 1$: $\mathcal{C}$ est un segment, ses points extrêmaux sont ses extrémités et la propriété est encore vraie.
Soit $d \geq 2$ et $X \in \mathcal{C}$. Soit Δ une droite passant par X. $\Delta \cap \mathcal{C}$ est un convexe compact de dimension ≤ 1. Donc X est combinaison convexe des extrémités X_1, X_2 de $\Delta \cap \mathcal{C}$ (éventuellement $X_1 = X_2$ si $\Delta \cap \mathcal{C}$ est de dimension 0).(Voir la figure 3.2).

Comme X_i est dans la frontière relative de $\Delta \cap \mathcal{C}$, il est aussi dans la

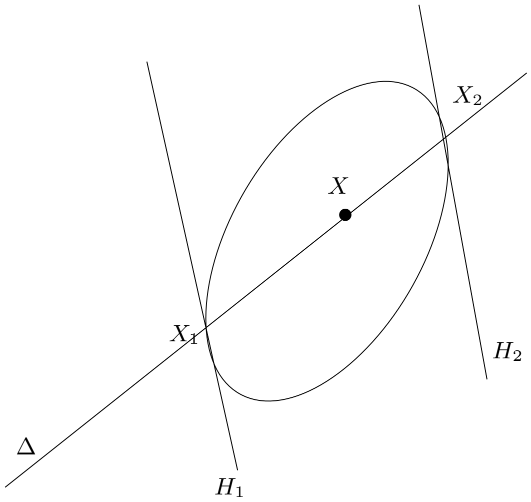


FIG. 3.2 – X,X_1,X_2.

frontière de $\mathcal{C}$. Par le théorème 2.1.10 il existe un hyperplan-support de $\mathcal{C}$, H_i, passant par X_i (pour $i \in \{1, 2\}$). Par hypothèse de récurrence, X_i est combinaison convexe des points extrêmaux de $H_i \cap \mathcal{C}$. Du fait que $\mathcal{C} \subseteq \overline{H_i^+}$,

tout point extrêmal de $H_i \cap \mathcal{C}$ est aussi extrêmal dans $\mathcal{C}$. Donc X est combinaison convexe de points extrêmaux de $\mathcal{C}$.
Donc $\mathcal{E}_2$ est bien une famille génératrice de $\mathcal{P}$.
Mais toute famille génératrice contient les points extrêmaux, donc $\mathcal{E}_2$ est bien la *plus petite* famille génératrice. □

Remarque 3.1.8 *Nous avons montré "au passage" que tout convexe compact est l'enveloppe convexe de ses points extrêmaux. C'est le théorème de Krein et Milman.*

Théorème 3.1.9 *Soit $\mathcal{P}$ un d-polytope, $\{F_i, 1 \leq i \leq m\}$ les $(d-1)$-faces de $\mathcal{P}$, H_i l'hyperplan qui supporte $\mathcal{P}$ suivant F_i et $\overline{H_i^+}$ le demi-espace fermé limité par H_i et contenant $\mathcal{P}$. Alors*

$$\mathcal{P} = \cap_{i=1}^m \overline{H_i^+}.$$

Preuve : 1- Par définition de la notion de "support", on a bien

$$\mathcal{P} \subseteq \cap_{i=1}^m \overline{H_i^+}.$$

2-Soit $X \notin \mathcal{P}$.
Comme $\dim \mathcal{P} = d$, $\overset{\circ}{\mathcal{P}} \neq \emptyset$. L'ouvert $\overset{\circ}{\mathcal{P}}$ ne peut être recouvert par l'union finie des sous-espaces affines engendrés par X et $(d-1)$ sommets de $\mathcal{P}$.
Donc il existe $Y \in \overset{\circ}{\mathcal{P}}$ tel que : Y n'appartient à aucun sous-espace affine de dimension $d-1$ engendré par X et $(d-1)$ sommets de $\mathcal{P}$.
Considérons un point $Z \in [X, Y] \cap \partial\mathcal{P}$.(Voir la figure 3.3). Par le théorème 3.1.2, Z appartient à l'une des faces propres F de $\mathcal{P}$. Par le choix de Y :
Z n'appartient à aucun sous-espace affine de dimension $j \leq d-2$ engendré par des sommets de $\mathcal{P}$.
Donc $\dim\langle\ F\ \rangle = d-1$. On en conclut que

$$\mathbb{E}^d - \mathcal{P} \subseteq \mathbb{E}^d - \cap_{i=1}^m \overline{H_i^+}.$$

□

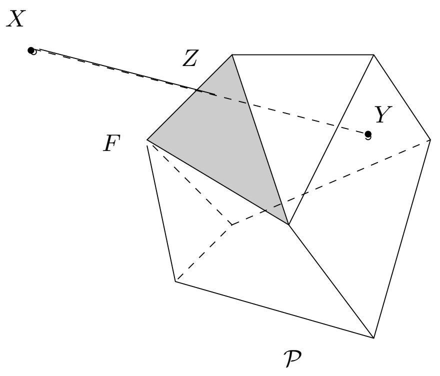


FIG. 3.3 – X extérieur, Y intérieur.

Théorème 3.1.10 *Soit $\mathcal{Q} = \cap_{i=1}^{m} \overline{H_i^+}$, où les H_i sont des hyperplans de $\mathbb{E}^d$. Si $\mathcal{Q}$ est bornée, alors $\mathcal{Q}$ est un polytope.*

Preuve : Nous prouvons ce théorème par récurrence sur l'entier d.
$d = 0$: le théorème est alors trivial.
$d = d' + 1$:
Pour tout $i \in [1, m]$ posons :

$$F_i = \mathcal{Q} \cap H_i.$$

Chaque sous-ensemble F_i de $H_i \approx \mathbb{E}^{d-1}$, est une intersection finie de demi-espaces de H_i. Donc, par hypothèse de récurrence, chaque F_i est un polytope.Posons :

$$\mathcal{V}_i = \{X \in H_i \mid X \text{ est sommet de } F_i\}; \;\; \mathcal{V} = \cup_{i=1}^{m} \mathcal{V}_i.$$

Montrons que $\mathcal{Q} = \text{conv}(\mathcal{V})$.
1- Comme $\mathcal{Q}$ est convexe et contient $\mathcal{V}$, on a bien

$$\mathcal{Q} \supseteq \text{conv}(\mathcal{V})$$

2-Soit $X \in \mathcal{Q}$.
Remarquons que $\overset{\circ}{\mathcal{Q}} = \cap_{i=1}^{m} H_i^+$, et par suite $\partial\mathcal{Q} \subseteq \cup_{i=1}^{m} H_i$.
cas 1 : $X \in \partial\mathcal{Q}$.
D'après la remarque, il existe $i \in [1, m]$ tel que $X \in F_i$. Donc $X \in \text{conv}(\mathcal{V}_i) \subseteq \text{conv}(\mathcal{V})$.

cas 2 :$X \in \overset{\circ}{\mathcal{Q}}$.
Alors il existe des points $X_1, X_2 \in \partial\mathcal{Q}$ tels que $X \in [X_1, X_2]$. D' après le cas 1, $X_j \in \mathrm{conv}(\mathcal{V})$, d' où

$$X \in \mathrm{conv}(\{X_1, X_2\}) \subseteq \mathrm{conv}(\mathcal{V}).$$

□
Nous dirons que $\mathcal{Q} = \cap_{i=1}^m \overline{H_i^+}$ est une description *minimale* de $\mathcal{Q}$ ssi, pour tout $j \in [1, m]$,

$$\mathcal{Q} \neq \cap_{\substack{i \neq j \\ 1 \leq i \leq m}} \overline{H_i^+}.$$

Lemme 3.1.11 *Soit $\mathcal{Q} = \cap_{i=1}^m \overline{H_i^+}$, une description minimale de $\mathcal{Q}$. On suppose $\mathcal{Q}$ bornée et de dimension d.*
Alors chaque $F_i = H_i \cap \mathcal{Q}$ est une $(d-1)$-face de $\mathcal{Q}$.

Preuve : Rappelons les faits suivants :

$$\overset{\circ}{\overbrace{\cap_{i=1}^m \overline{H_i^+}}} = \cap_{i=1}^m H_i^+ \tag{3.5}$$

$$\cap_{i \in I} \overline{H_i^+} = \overline{\cap_{i \in I}^m H_i^+}, \text{ pour tout ensemble } I \subseteq [1, m] \tag{3.6}$$

(le fait 3.6 résulte du fait que tout convexe fermé de dimension d est l'adhérence de son intérieur, ce que l'on peut déduire du lemme 2.1.5).
Prouvons le lemme : considérons un $j \in [1, m]$, notons $F_j = H_j \cap \mathcal{Q}$ et montrons que $\dim\langle\ F_j\ \rangle = d - 1$.

$$\mathrm{int}(F_j, H_j) = (\cap_{i \neq j} H_i^+) \cap H_j. \tag{3.7}$$

Comme $\dim \mathcal{Q} = d$, $\overset{\circ}{\mathcal{Q}} \neq \emptyset$, donc $\cap_{i=1}^m H_i^+ \neq \emptyset$, ce qui entraîne :

$$\cap_{i \neq j} H_i^+ \not\subseteq H_j^- \tag{3.8}$$

Par ailleurs, si l'on avait $\cap_{i \neq j} H_i^+ \subseteq H_j^+$, alors on aurait $\cap_{i \neq j} H_i^+ = \cap_{i=1}^m H_i^+$, d'où, en passant aux adhérences et en utilisant (3.6), $\cap_{i \neq j} \overline{H_i^+} = \cap_{i=1}^m \overline{H_i^+}$, ce qui contredirait l'hypothèse de minimalité de la description. Donc

$$\cap_{i \neq j} H_i^+ \not\subseteq H_j^+. \tag{3.9}$$

De (3.8),(3.9), il résulte que :

$$(\cap_{i \neq j} H_i^+) \cap H_j \neq \emptyset \tag{3.10}$$

De (3.7),(3.10), il résulte que $\mathrm{int}(F_j, H_j) \neq \emptyset$. Donc $\dim\langle\, F_j \,\rangle = \dim H_j = d-1$. $\square$

Lemme 3.1.12 *Soit $\mathcal{Q} = \cap_{i=1}^{m} \overline{H_i^+}$, une description minimale de $\mathcal{Q}$. On suppose $\mathcal{Q}$ bornée et de dimension d.*
Alors l'ensemble des facettes du polytope $\mathcal{Q}$ est exactement :

$$\{H_i \cap \mathcal{Q} \mid 1 \leq i \leq m\}.$$

Preuve : 1-On a vu dans le lemme 3.1.11 que les $H_i \cap \mathcal{Q}$ sont des facettes.
2-Soit F une facette de $\mathcal{Q}$: $F = \mathcal{Q} \cap H$ avec $\mathcal{Q} \subseteq \overline{H^+}$.
Soient $P_1, \ldots, P_k, \ldots, P_r$ les sommets de F et $X = \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r} P_k$. Comme X appartient à une face propre, $X \in \partial\mathcal{Q}$. Or $\partial\mathcal{Q} \subseteq \cup_{i=1}^{m} H_i$ (voir (3.5)). Donc $\exists j \in [1,m], X \in H_j$, ce qui entraîne que $\forall k \in [1,r], P_k \in H_j$, donc $F \subseteq H_j$, donc $H \subseteq H_j$, donc $H = H_j$. $\square$

Lemme 3.1.13 *Soit $\mathcal{P}$ polytope de dimension d dans $\mathbb{E}^d$. Alors $\partial\mathcal{P}$ est l'union des $(d-1)$-faces de $\mathcal{P}$.*

Preuve : Par le théorème 3.1.9

$$\mathcal{P} = \cap_{i=1}^{m} \overline{H_i^+},$$

où les $H_i \cap \mathcal{P} = F_i$ sont les $(d-1)$-faces de $\mathcal{P}$.
1-Si $X \in \cup_{i=1}^{m} F_i$, alors $X \in \partial\mathcal{P}$, d'après le théorème 3.1.2.
2- Soit $X \notin \cup_{i=1}^{m} F_i, X \in \mathcal{P}$.
Alors $X \in \cap_{i=1}^{m} H_i^+$, donc $X \in \overset{\circ}{\mathcal{P}}$, donc $X \notin \partial\mathcal{P}$.
Les points 1 et 2 établissent que : $\partial\mathcal{P} = \cup_{i=1}^{m} F_i$. $\square$

Lemme 3.1.14 *Si F est une face propre du polytope $\mathcal{P}$, alors F est une face d'une $(d-1)$-face de $\mathcal{P}$.*

Preuve : Soit F une face propre de $\mathcal{P}$, H un hyperplan-support de $\mathcal{P}$ suivant F. Considérons le point X_0 qui est le centre de gravité des sommets $P_1, \ldots, P_i, \ldots, P_r$ de F :

$$X_0 = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{r} P_i.$$

Comme $X_0 \in \partial\mathcal{P}$, X_0 appartient à l'une des facettes, disons F_1 (à une renumérotation près des facettes). Notons H_1 l'hyperplan support de $\mathcal{P}$ suivant F_1. Comme $X_0 \in H_1$ et $P_i \in \overline{H_1^+}$, en fait pour tout i, $P_i \in H_1$, donc $F \subseteq H_1$ et $F \subseteq F_1$. □

Lemme 3.1.15 (lemme des faces) *Soit $\mathcal{P}$ un polytope de dimension d dans $\mathbb{E}^d$, $\mathcal{P} = \cap_{i=1}^{m} \overline{H_i^+}$ où les H_i sont les supports des facettes de $\mathcal{P}$.*
Soit F une face de dimension $k \in [0, d-1]$.
Alors il existe $i_1 < i_2 < \ldots < i_{d-k}$ tels que :

$$\langle\ F\ \rangle = \cap_{j=1}^{d-k} H_{i_j} \tag{3.11}$$

De plus

$$F = \cap_{j=1}^{d-k} (H_{i_j} \cap \mathcal{P}). \tag{3.12}$$

Preuve :
Etape 1 : On prouve (3.11) par récurrence sur $(d-k)$.
$k = d-1$: le lemme est trivialement vrai.
$k = d-2$: par le lemme 3.1.14, il existe une facette F_j de $\mathcal{P}$ contenant F.
Par la proposition 3.1.5, F est une $(d-2)$-face du polytope F_j.
Par le théorème 3.1.9

$$F_j = H_j \cap \mathcal{P} = H_j \cap (\cap_{\substack{\ell \neq j \\ 1 \leq \ell \leq m}} \overline{H_\ell^+}) = \cap_{\substack{\ell \neq j \\ 1 \leq \ell \leq m}} (H_j \cap \overline{H_\ell^+}) = \cap_{\substack{\ell \neq j \\ 1 \leq \ell \leq m}} \overline{(H_j \cap H_\ell)^+}.$$

Par le lemme 3.1.12, les facettes de F_j sont donc les $F_j \cap (H_j \cap H_\ell)$ (où ℓ décrit une partie $I \subseteq [1, m] - \{j\}$). Donc, il existe $\ell \in [1, m] - \{j\}$ tel que

$$F = F_j \cap H_\ell = (\mathcal{P} \cap H_j) \cap H_\ell = (\mathcal{P} \cap H_j) \cap (\mathcal{P} \cap H_\ell) = F_j \cap F_\ell.$$

Le point (3.12) est établi.
D'autre part

$\dim\langle F \rangle = d-2$ (par hypothèse) et $\dim H_j \cap H_\ell = d-2$ (hyperplans sécants)

donc $\langle F \rangle$ est sous-espace affine de dimension $(d-2)$ de $H_j \cap H_\ell$, sous-espace affine de même dimension, d'où

$$\langle F \rangle = H_j \cap H_\ell,$$

le point 3.11 est établi.
$k \leq d-3$:
Soit F face de dimension k.
Il existe F' facette, $F \subseteq F'$. Soit H' l'hyperplan support de $\mathcal{P}$ suivant F'.
Soit

$$\mathcal{P} \cap H' = \cap_{i \in I} \overline{(H_i \cap H')^+}, \quad I \subseteq [1, m]$$

une description minimale.
Par hypothèse de récurrence

$$\langle F \rangle = \cap_{j=1}^{d-1-k} (H_{i_j} \cap H'), \quad (\forall j, i_j \in I)$$

donc, en posant $H_{i_{d-k}} = H'$

$$\langle F \rangle = \cap_{j=1}^{d-k} H_{i_j}.$$

Etape 2 :Déduisons (3.12) de (3.11).
On sait que

$$F \subseteq \langle F \rangle \cap \mathcal{P}. \tag{3.13}$$

Soit H un hyperplan support de $\mathcal{P}$ tel que

$$F = H \cap \mathcal{P}.$$

Comme $F \subseteq H$, $\langle F \rangle \subseteq H$. Donc

$$\langle F \rangle \cap \mathcal{P} \subseteq H \cap \mathcal{P} = F. \tag{3.14}$$

Les inclusions (3.13),(3.14) montrent que

$$F = \langle F \rangle \cap \mathcal{P} = \cap_{j=1}^{d-k} (H_{i_j} \cap \mathcal{P}).$$

□

Lemme 3.1.16 *Soit $\mathcal{P}$ un d-polytope. Pour tout couple d'entiers (k, ℓ) tels que $0 \leq k \leq \ell \leq d$, une k-face de $\mathcal{P}$ est l'intersection des ℓ-faces de $\mathcal{P}$ qui la contiennent.*

Preuve : On prouve cet énoncé par récurrence sur $\ell - k$.
Si $k = \ell$: la seule ℓ-face contenant F est F elle-même.
Si $0 \leq k < \ell$:
Soit F une k-face de $\mathcal{P}$. Il suffit de montrer que, si un point $X \in \mathcal{P}$ n'appartient pas à F, alors il n'appartient pas à l'intersection des ℓ-faces de $\mathcal{P}$ qui la contiennent.
Soit $X \in \mathbb{E} - F$. Considérons les expressions (3.11, 3.12) fournies par le lemme 3.1.15. D' après (3.12), il existe $j_0 \in [1, d-k]$, tel que $X \notin H_{i_{j_0}}$. A une renumérotation près des indices, on peut supposer que $j_0 = 1$. Posons

$$K = \cap_{j=1}^{d-k-1}(H_{i_j} \cap \mathcal{P})$$

La dimension de $\cap_{j=1}^{d-k-1} H_{i_j}$ est $\geq k+1$ (parce qu' elle est non-vide) et aussi $\leq k+1$ (sinon la dimension de $\cap_{j=1}^{d-k} H_{i_j}$ serait $\geq k+1$).
D'autre part, comme $X \notin H_{i_1}$,$X \notin K$. Comme $\ell - (k+1) < \ell - k$, par hypothèse de récurrence, il existe une ℓ-face $L \supseteq K \supseteq F$, telle que $X \notin L$. $\square$

3.2 Dualité

3.2.1 Polarité dans $\mathbb{E}^d$

Considérons la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^{d+1}$

$$B(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - x_{d+1} y_{d+1}.$$

B est non-dégénérée. Elle induit une notion de polarité sur les sous-ensembles de $\mathbb{P}^d$ (équation (2.2.1) du §2.2). Via le plongement j de $\mathbb{E}^d$ dans $\mathbb{P}^d$, on obtient une polarité dans $\mathbb{E}^d$:

$$\mathcal{A}^* = j^{-1}(j(\mathcal{A})^*)$$

ce qui revient à :

Définition 3.2.1 $\mathcal{A}^* = \{X \in \mathbb{E}^d \mid \forall A \in \mathcal{A}, X \cdot A = 1\}$.

où
$$X \cdot Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$
est le produit scallaire habituel sur $\mathbb{E}^d$. Dans $\mathbb{E}^d$, la belle assertion (2.3) devient l'assertion plus faible : pour toute sous-variété affine $\mathbb{V}$ telle que $0 \notin \mathbb{V}$, on a
$$\dim(\mathbb{V}) + \dim(\mathbb{V}^*) = d - 1 \text{ et } \mathbb{V}^{**} = \mathbb{V}. \tag{3.15}$$
(le problème vient du fait que, dans $\mathbb{P}^d$, $j(0)^* = H_\infty$, d'où, $j(0) \in \mathbf{V} \Leftrightarrow H_\infty \supseteq \mathbf{V}^*$; "on vérifie que", lorsque $0 \notin \mathbb{V}$, l'assertion reste vraie).
Notons $\mathcal{G}_0(\mathbb{E}^d)$ l'ensemble des sous-variétés affines de $\mathbb{E}^d$ ne contenant pas le point 0. L'assertion (3.15) permet de prouver le théorème suivant.

Théorème 3.2.2 *L'application* $\mathbb{V} \mapsto \mathbb{V}^*$ *de* $\mathcal{G}_0(\mathbb{E}^d)$ *dans lui-même est une involution, décroissante pour l'inclusion, telle que* $\dim(\mathbb{V}) + \dim(\mathbb{V}^*) = d - 1$.

Cas particuliers
si $\dim \mathbb{V} = 0$, $\mathbb{V} = \{X_0\}$, et on note (abusivement) $X_0^* = \mathbb{V}^*$: c'est *l'hyperplan polaire* du point X_0.
si $\dim \mathbb{V} = d - 1$ et $0 \notin \mathbb{V}$, $\mathbb{V}^* = \{X_0\}$ et on note (abusivement) $\mathbb{V}^* = X_0$; X_0 est le *pôle* de l'hyperplan $\mathbb{V}$.
Etant donné un hyperplan H ne contenant pas 0, son équation s' écrit donc :
$$H : \quad H^* \cdot X = 1$$
on pose alors :
$$H^+ = \{X \in \mathbb{E}^d \mid H^* \cdot X < 1\} \text{ et } H^- = \{X \in \mathbb{E}^d \mid H^* \cdot X > 1\}.$$

3.2.2 Transformation polaire sur les convexes

Définition 3.2.3 *Étant donné un sous-ensemble* $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{E}^d$*, on pose :*
$$\mathcal{A}^\# = \{X \in \mathbb{E}^d \mid \forall A \in \mathcal{A}, X \cdot A \leq 1\}.$$

Exemple 3.2.4 *Si P est le point de $\mathbb{E}^2$ de coordonnées $(1,0)$, alors $P^{\#}$ est le demi-plan $P^{\#} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 1\}$, $P^{\#\#}$ est le segment $[0,P]$. Pour tout réel $\rho > 0$: $\bar{\mathrm{B}}(0,\rho)^{\#} = \bar{\mathrm{B}}(0,1/\rho)$.*

Lemme 3.2.5 *Pour tout $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{E}^d$, $\mathcal{A}^{\#}$ est convexe, fermé et contient 0.*

Lemme 3.2.6 *Pour tout $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{E}^d$, $\mathcal{A}^{\#} = (\overline{\mathcal{A}})^{\#}$.*

Lemme 3.2.7 *Si $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$, alors $\mathcal{A}_2^{\#} \subseteq \mathcal{A}_1^{\#}$.*

Lemme 3.2.8 *Si $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subseteq \mathbb{E}^d$, sont convexes et compacts, alors $\mathrm{conv}(\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2)$ est compact.*

Preuve : Posons $K = \mathrm{conv}(\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2)$.
Montrons que K est une partie compacte de $\mathbb{E}^d$. Soient $(X_{i,n})_{n\geq 0}$ une suite de points de $\mathcal{C}_i$ (pour $i \in \{1,2\}$) et $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels. Examinons la suite de points de K :

$$X_n = \lambda_n X_{1,n} + (1-\lambda_n) X_{2,n}.$$

Comme les espaces $[0,1], \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ sont compacts, par 3 extractions successives, on obtient une suite d'indices $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots$ telle que les trois suites $(\lambda_{n_k})_{k\geq 0}, (X_{1,n_k})_{k\geq 0}, (X_{2,n_k})_{k\geq 0}$ soient convergentes. Posons

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} \lambda_{n_k}, \quad X_1 = \lim_{k\to\infty} X_{1,n_k}, \quad X_2 = \lim_{k\to\infty} X_{2,n_k}.$$

Par continuité du produit externe $\mathbb{R} \times \mathbb{E}^d \to \mathbb{E}^d$et de l'addition dans $\mathbb{E}^d$, on en déduit :

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_{n_k} X_{1,n_k} + (1-\lambda_{n_k}) X_{2,n_k} = \lambda X_1 + (1-\lambda) X_2.$$

Comme les $\mathcal{C}_i$ sont fermés, $X_i \in \mathcal{C}_i$ et $\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2 \in K$. On a prouvé que de toute suite dans K, on peut extraire une sous-suite convergente. □

Lemme 3.2.9 *Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{E}^d$. Alors*
1- $0 \in \overset{\circ}{\mathcal{A}} \Rightarrow \mathcal{A}^{\#}$ *est borné.*
2- $\mathcal{A}$ *est borné* $\Rightarrow 0 \in \overset{\circ}{\mathcal{A}^{\#}}$

Preuve : Soit $\rho > 0$. Par le lemme 3.2.7 on a l' implication :

$$\bar{\mathrm{B}}(0, \rho) \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}^{\#} \subseteq \bar{\mathrm{B}}(0, 1/\rho),$$

ce qui entraine le point 1 du lemme.
Par le lemme 3.2.7 on a aussi l' implication :

$$\mathcal{A} \subseteq \bar{\mathrm{B}}(0, \rho) \Rightarrow \bar{\mathrm{B}}(0, 1/\rho) \subseteq \mathcal{A}^{\#},$$

ce qui entraine le point 2 du lemme.
□

Proposition 3.2.10 *Soient $\mathcal{C}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ des convexes de $\mathbb{E}^d$. Alors*
1- $\mathrm{conv}(\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2)^{\#} = \mathcal{C}_1^{\#} \cap \mathcal{C}_2^{\#}$
2- Si $\mathcal{C}$ est fermé et contient 0 dans son intérieur, alors $\mathcal{C}^{\#\#} = \mathcal{C}$
3- $\mathcal{C}^{\#\#} = \overline{\mathrm{conv}(\{0\} \cup \mathcal{C})}$
4- Si $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ sont fermés et contiennent 0 dans leur intérieur, alors
$(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)^{\#} = \mathrm{conv}(\mathcal{C}_1^{\#} \cup \mathcal{C}_2^{\#})$.

Preuve : 1-Pour tout $i \in \{1, 2\}$, $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \supseteq \mathcal{C}_i$. Donc, d'après le lemme 3.2.7,

$$(\mathrm{conv}(\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2))^{\#} \subseteq \mathcal{C}_1^{\#} \cap \mathcal{C}_2^{\#}.$$

Réciproquement, soit $Y \in \mathcal{C}_1^{\#} \cap \mathcal{C}_2^{\#}$. Soit $X \in \mathrm{conv}(\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2)$:
$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$, où $\lambda_i \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1, X_i \in \mathcal{C}_i$.

$$\begin{aligned} Y \cdot X &= \lambda_1 Y \cdot X_1 + \lambda_2 Y \cdot X_2 \\ &\leq \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{aligned}$$

ce qui montre que $Y \in \mathrm{conv}(\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2)^{\#}$.
2-On vérifie aisément que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}^{\#\#}$.
Montrons maintenant que $\mathbb{E} - \mathcal{C} \subseteq \mathbb{E} - \mathcal{C}^{\#\#}$.
Soit $Z \notin \mathcal{C}$. Le segment de droite $[0, Z]$ coupe la frontière de $\mathcal{C}$ en un point Y.

Par le théorème 2.1.10 , un hyperplan-support H de $\mathcal{C}$ passe par Y. Comme $0 \notin H$, H a pour équation : $H^* \cdot X = 1$ On a donc

$$H^* \in \mathcal{C}^\# \text{ mais } Z \cdot H^* > 1$$

donc $Z \notin \mathcal{C}^{\#\#}$.
3- $\mathcal{C}^{\#\#}$ contient $\{0\}$ et $\mathcal{C}$. Comme il est convexe, il contient $\operatorname{conv}(\{0\} \cup \mathcal{C})$ et comme il est fermé, $\mathcal{C}^{\#\#} \supseteq \overline{\operatorname{conv}(\{0\} \cup \mathcal{C})}$.
Montrons maintenant l'inclusion inverse.
Soit $Z \in \mathcal{C}^{\#\#}$. Comme la fonction $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^\#$ est décroissante pour l'inclusion,

$$Z \in (\mathcal{C}^\# \cap \bar{\mathrm{B}}(0, 1/\epsilon))^\# \quad (\text{ pour tout } \epsilon > 0 \text{ })$$

et, en utilisant le point 1,

$$Z \in ((\operatorname{conv}(\mathcal{C} \cup \bar{\mathrm{B}}(0, \epsilon)))^\#)^\# (\text{ pour tout } \epsilon > 0 \text{ })$$

puis en utilisant le lemme 3.2.6

$$Z \in (\overline{(\operatorname{conv}(\mathcal{C} \cup \bar{\mathrm{B}}(0, \epsilon)))}^\#)^\# \quad (\text{ pour tout } \epsilon > 0 \text{ })$$

soit, d'après le point 2

$$Z \in \overline{\operatorname{conv}(\mathcal{C} \cup \bar{\mathrm{B}}(0, \epsilon))} \quad (\text{ pour tout } \epsilon > 0 \text{ }).$$

En choisissant $\epsilon = 1/n$ on obtient que, pour tout $n \geq 0$, il existe $C_n \in \mathcal{C}, B_n \in \bar{\mathrm{B}}(0, 1/n), \lambda_n \in [0, 1]$ tels que

$$\mathrm{d}(Z, \lambda_n C_n + (1 - \lambda_n) B_n) \leq 1/n$$

donc

$$\forall n \geq 0, \mathrm{d}(Z, \lambda_n C_n) \leq 2/n$$

ce qui montre que $Z \in \overline{\operatorname{conv}(\{0\} \cup \mathcal{C})}$.
4- Supposons que $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ sont fermés et contiennent 0 dans leur intérieur.

$$\begin{aligned}
(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)^\# &= (\mathcal{C}_1^{\#\#} \cap \mathcal{C}_2^{\#\#})^\# \text{ (par le point 2)} \\
&= (\operatorname{conv}(\mathcal{C}_1^\# \cup \mathcal{C}_2^\#)^\#)^\# \text{ (par le point 1)} \\
&= \overline{\operatorname{conv}(\mathcal{C}_1^\# \cup \mathcal{C}_2^\#)} \text{ (par le point 3)}
\end{aligned}$$

Par le lemme 3.2.5 les $\mathcal{C}_i^\#$ sont fermés et par le lemme 3.2.9 ils sont bornés. Ils sont donc compacts et par le lemme 3.2.8, l'enveloppe convexe de leur union est fermée. Finalement :

$$(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)^\# = \operatorname{conv}(\mathcal{C}_1^\# \cup \mathcal{C}_2^\#).$$

□

Lemme 3.2.11 *Soit* $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{E}^d$*, convexe fermé contenant* 0*. Soit* $A \in \mathcal{C}$*.*
1-Si $A \in \partial\mathcal{C}$*, alors* A^* *est support de* $\mathcal{C}^\#$*.*
2-Si $A \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}$*, alors* A^* *ne rencontre pas* $\mathcal{C}^\#$*.*
3- Si $A \notin \mathcal{C}$*, alors* A^* *rencontre* $\mathrm{int}(\mathcal{C}^\#, \langle\ \mathcal{C}^\#\ \rangle)$.

Preuve : Remarquons que

$$A \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \overline{A^{*+}} \supseteq \mathcal{C}^\# \tag{3.16}$$

En effet, l'implication de gauche à droite découle du lemme 3.2.7 et sa réciproque résulte du fait que, puisque $\mathcal{C}$ est convexe fermée contenant 0, par le point 3 du lemme 3.2.10, elle est égale à $\mathcal{C}^{\#\#}$.
Cas 1 :$A \in \partial\mathcal{C}$.
Par le théorème 2.1.10, il existe un hyperplan H support de $\mathcal{C}$ au point A. Donc :

$$\mathcal{C} \subseteq \bar{H}^+; \;\; H \cap \mathcal{C} \supseteq \{A\}$$

Le premier point s'interprète comme : $H^* \in \mathcal{C}^\#$
et le fait que $A \in H$ comme : $H^* \in A^*$.
Finalement

$$A^* \cap \mathcal{C}^\# \neq \emptyset \tag{3.17}$$

puisqu'il possède H^*. Les conditions (3.16,3.17) établissent que A^* est support de $\mathcal{C}^\#$.
Cas 2 :$A \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}$.
Soit $\epsilon > 0$ tel que $\mathrm{B}(A, \epsilon) \subseteq \mathcal{C}$ et soit $X \in A^*$:

$$X \cdot A = 1 \text{ donc } X \cdot (A + \epsilon \frac{A}{\parallel A \parallel}) = 1 + \frac{\epsilon}{\parallel A \parallel} > 1.$$

Or $A + \epsilon \frac{A}{\|A\|} \in \mathrm{B}(A, \epsilon) \subseteq \mathcal{C}$. Donc $X \notin \mathcal{C}^\#$. Dans ce cas $A^* \cap \mathcal{C}^\# = \emptyset$.
Cas 3 :$A \notin \mathcal{C}$.
Par l'équivalence 3.16, dans ce cas A^* n'est pas support puisque $\mathcal{C}^\#$ n'est pas contenu dans l'un des demi-espaces de frontière A^*. Le bilan des 3 cas de figure montre le lemme. □

3.2.3 Dualité sur les polytopes

Théorème 3.2.12 *Soit $\mathcal{P}$ un polytope de $\mathbb{E}^d$ contenant 0 dans son intérieur. Il existe une bijection entre les faces de $\mathcal{P}$ et les faces de $\mathcal{P}^\#$ qui inverse la relation d'inclusion. Cette bijection associe les k-faces de $\mathcal{P}$ aux $d-1-k$-faces de $\mathcal{P}^\#$ et elle est involutive.*

Preuve : Considérons l'application de Faces($\mathcal{P}$) $\rightarrow$ Faces($\mathcal{P}$) définie par :

$$\forall F \in \text{Faces}(\mathcal{P}), F^\bullet = \{Y \in \mathcal{P}^\# \mid \forall X \in F, Y \cdot X = 1\}.$$

On remarque immédiatement que :
Si $\dim F = d$,$F^\bullet = \emptyset$.
Si $\dim F = d-1$, $F^\bullet$ est le pôle du support de F.
Si $\dim F = 0$, $F^\bullet$ est l'hyperplan polaire de F, F^*, intersecté avec $\mathcal{P}^\#$.
Si $\dim F = -1$, $F^\bullet = \mathcal{P}^\#$. Vérifions maintenant le théorème.
1- $F^\bullet$ est bien une face de $\mathcal{P}^\#$:

$$F^\bullet = \cap_{X \in F}(\mathcal{P}^\# \cap X^*) \tag{3.18}$$

Par le lemme 3.2.11, chaque X^* est un hyperplan-support. Donc chaque $\mathcal{P}^\# \cap X^*$ est une face de $\mathcal{P}^\#$. Par la proposition 3.1.6, l'intersection (3.18) est une face de $\mathcal{P}^\#$.
2- La formule (3.18) montre aussi que $F \mapsto F^\bullet$ est décroissante.
3- Montrons que pour toute face F de $\mathcal{P}$,

$$\langle\ F^\bullet\ \rangle = \langle\ F\ \rangle^*. \tag{3.19}$$

La définition de $F^\bullet$ montre que $F^\bullet = \mathcal{P}^\# \cap \langle\ F\ \rangle^*$. Par le lemme 3.1.15, il existe une famille finie $(H_i)_{i\in I}$ d'hyperplans-support de $\mathcal{P}$ tels que

$$\langle\ F\ \rangle = \cap_{i\in I} H_i.$$

Alors, en utilisant la propriété (2.4) de la polarité sur appliquée à une intersection de sous-espaces affines :

$$\langle\ F\ \rangle^* = \langle\ \cup_{i\in I} H_i^*\ \rangle.$$

Par le lemme 3.2.11, tous les H_i^* appartiennent à $\mathcal{P}^\#$, donc $F^\bullet$ contient une famille génératrice de $\langle\ F\ \rangle^*$. L' égalité (3.19) est prouvée.

4- On sait déjà que, pour tout sous-espace $\mathbb{V}$ ne contenant pas 0, $\dim \mathbb{V} + \dim \mathbb{V}^* = d - 1$ (théorème 3.2.2). En utilisant (3.19) on en conclut que

$$\dim F + \dim F^\bullet = d - 1.$$

5- Appliquons deux fois de suite l' égalité (3.19) :

$$\langle\ F^{\bullet\bullet}\ \rangle = \langle\ F^\bullet\ \rangle^* = \langle\ F\ \rangle^{**}.$$

Comme la polarité sur les sous-espaces affines est involutive,

$$\langle\ F^{\bullet\bullet}\ \rangle = \langle\ F\ \rangle^{**} = \langle\ F\ \rangle.$$

Et comme toute face K est égale à $\mathcal{P} \cap \langle\ K\ \rangle$, on conclut que $F^{\bullet\bullet} = F$. $\square$

3.3 Procédure de Fourier-Motzkin

On considère le problème algorithmique suivant :
Donnée : des points $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de $\mathbb{E}^d$
Calculer : une description du polytope engendré par les X_i comme intersection d'hyperplans.
Autrement dit, on souhaite calculer les équations d'hyperplans $H_1, H_2, \ldots, H_m$ tels que

$$\mathrm{conv}(\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}) = \cap_{j=1}^m \overline{H_j^+}.$$

En d'autres termes, on souhaite "passer d'une $\mathcal{V}$-description à une $\mathcal{H}$-description". Remarquons que, par application d'une polarité bien choisie, le même algorithme, doit permettre aussi de "passer d'une $\mathcal{H}$-description à une $\mathcal{V}$-description".

Étape 1 En utilisant la correspondance entre polytopes de $\mathbb{E}^d$ et cônes de $\mathbb{R}^{d+1}$ (revoir l' équation (2.2)), on se réduit au même problème pour les cônes :
Donnée : des vecteurs $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de $\mathbb{R}^d$
Calculer : des hyperplans vectoriels $H_1, H_2, \ldots, H_m$ tels que

$$\mathrm{cone}(\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}) = \cap_{j=1}^m \overline{H_j^+}.$$

Étape 2 Soit $C = \mathrm{cone}(\{X_1, X_2, \dots, X_n\})$ où $X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathbb{R}^d$.
Notons $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^{d\times n}$ la matrice dont le i-ème vecteur-colonne est le vecteur X_i.
Le cône C peut être décrit comme :

$$C = \{Z \in \mathbb{R}^{d\times 1} \mid \exists T \in \mathbb{R}^{n\times 1}, T \geq 0, Z = \mathrm{X}T\}.$$

Posons :

$$C' = \{(Z,T) \in \mathbb{R}^{(d+n)\times 1} \mid T \in \mathbb{R}^{n\times 1}, T \geq 0, Z = \mathrm{X}T\}.$$

L'ensemble C' est un $\mathcal{H}$-cône et $C = \mathrm{pr}(C')$, où $\mathrm{pr} : \mathbb{R}^{d+n} \to \mathbb{R}^d$ est la projection sur les d premières coordonnées. Il suffit donc de fournir une procédure faisant passer d'un $\mathcal{H}$-cône de $\mathbb{R}^{d+1}$ à sa projection sur $\mathbb{R}^d$ obtenue en supprimant une coordonnée (on choisira la première).

Étape 3 Notons $X = (x_0, x_1, \dots, x_d)$ un vecteur de $\mathbb{R}^{d+1}$.

Lemme 3.3.1 *Soit $C = \{X \in \mathbb{R}^{d+1} \mid A \cdot X \leq 0\}$ où $A \in \mathbb{R}^{n\times(d+1)}$. Alors $C^{(1)} = \{Y \in \mathbb{R}^d \mid \exists x \in \mathbb{R}, (x, Y) \in C\}$ est un $\mathcal{H}$-cône de la forme*

$$C^{(1)} = \{Y \in \mathbb{R}^d \mid A^{(1)} \cdot Y \leq 0\}$$

et la matrice $A^{(1)}$ peut être calculée à partir de A en temps $O(n^2)$.

Preuve : Soit $Y = (y_1, y_2, \dots, y_\ell, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$. Y appartient à $C^{(1)}$ si et seulement si

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall i \in [1,n], a_{i,0}x + \sum_{\ell=1}^{d} a_{i,\ell} y_\ell \leq 0.$$

Partitionnons $I = [1,n]$ en trois sous-ensembles :

$$I_+ = \{i \in I, a_{i,0} > 0\}; \;\; I_- = \{i \in I, a_{i,0} < 0\}; \;\; I_0 = \{i \in I, a_{i,0} = 0\}.$$

Le vecteur Y appartient à $C^{(1)}$ si et seulement si

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall i \in I_+, x + \sum_{\ell=1}^{d} \frac{a_{i,\ell}}{a_{i,0}} y_\ell \leq 0 \forall i \in I_-, x + \sum_{\ell=1}^{d} \frac{a_{i,\ell}}{a_{i,0}} y_\ell \geq 0 \forall i \in I_0, \sum_{\ell=1}^{d} a_{i,\ell} y_\ell \leq 0.$$

Un tel $x \in \mathbb{R}$ existe , si et seulement si

$$\forall i \in I_+, \forall j \in I_-, \sum_{\ell=1}^{d} \frac{a_{i,\ell}}{a_{i,0}} y_\ell \leq \sum_{\ell=1}^{d} \frac{a_{j,\ell}}{a_{j,0}} y_\ell \text{ et } \forall i \in I_0, \sum_{\ell=1}^{d} a_{i,\ell} y_\ell \leq 0.$$

Finalement, $Y \in C^{(1)}$ si et seulement si

$$\sum_{\ell=1}^{d}(a_{i,0}a_{j,\ell}-a_{j,0}a_{i,\ell})y_\ell \leq 0 \quad (\forall i \in I_+, \forall j \in I_-) \text{ et } \sum_{\ell=1}^{d} a_{i,\ell}y_\ell \leq 0 \quad (\forall i \in I_0).$$

Les inéquations ci-dessus forment bien une $\mathcal{H}$-description de $C^{(1)}$ et leur nombre est $\leq n^2/4$. $\square$

3.4 Intersection et projection

Projection

Lemme 3.4.1 *Soit $\mathcal{P}$ un polytope de $\mathbb{E}^d$. Soient K, L deux sous-espaces affines supplémentaires dans $\mathbb{E}^d$ et considérons la projection $p : \mathbb{E}^d \to L$, sur L parallèlement à K. Supposons que H soit un hyperplan-support de $\mathcal{P}$ et $K \subseteq H$. Alors*
1- $p(\mathcal{P})$ est un polytope de L,
2- $p(H)$ est un hyperplan de L , support de $p(\mathcal{P})$.

Voir la figure 3.4.
Preuve : 1- Supposons $\mathcal{P} = \text{conv}(A_1, A_2, \dots, A_m)$.
Comme une application affine conserve les barycentres on obtient :

$$p(\text{conv}(A_1, A_2, \dots, A_m)) = \text{conv}(p(A_1), p(A_2), \dots, p(A_m)),$$

qui est bien un polytope.
2- Soit $\ell = \dim(L)$ et $\overrightarrow{p} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^\ell$ l'application linéaire associée à p. Appliquons la formule $\dim(E) = \dim(\ker f) + \dim(\text{im} f)$ aux deux applications linéaires $\overrightarrow{p}$, puis $\overrightarrow{p}_{|\overrightarrow{H}}$:
$\dim(\mathbb{E}^d) = \dim(\ker \overrightarrow{p}) + \dim(L)$; $\dim(H) = \dim(\ker \overrightarrow{p}) + \dim(p(H))$ d'où

$$\dim(L) - \dim(p(H)) = \dim(\mathbb{E}^d) - \dim(H).$$

Donc $p(H)$ est un hyperplan.
Comme $p(H) \cap p(\mathcal{P}) \supseteq p(H \cap \mathcal{P})$,

$$p(H) \cap p(\mathcal{P}) \neq \emptyset.$$

Il reste à vérifier que l'image par p de $\overline{H^+}$ est bien $\overline{p(H)^+}$. $\square$

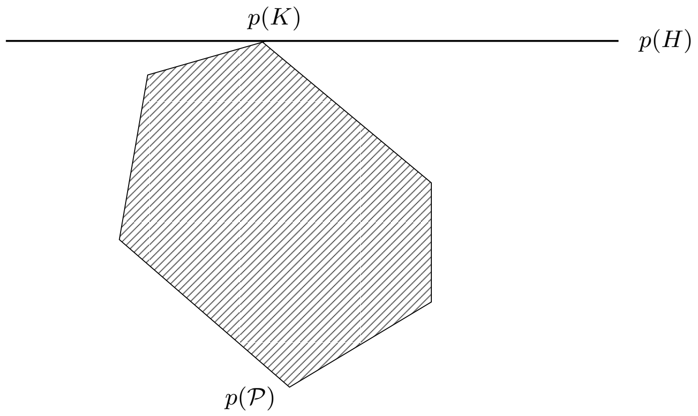


FIG. 3.4 – $p(H)$ est support.

Intersection Nous donnons ici des propriétés du polytope $\mathcal{P} \cap K$ obtenu par *intersection* d'un polytope avec un hyperplan. Ces propriétés seront utiles dans la preuve de la formule d' Euler (voir §4.1).

Proposition 3.4.2 *Soit $\mathcal{P}$ un polytope de dimension d dans $\mathbb{E}^d$ et K un hyperplan tel que*
1- aucun sommet de $\mathcal{P}$ n'appartient à K,
Alors :
2- $\mathcal{P} \cap \mathcal{K}$ est un polytope de dimension -1 ou $d-1$.
Si $\dim(\mathcal{P} \cap K) \neq -1$ *alors* $\overset{\circ}{\mathcal{P}} \cap K \neq \emptyset$.
3- si F est une face de dimension k $(0 \leq k \leq d-1)$ de $\mathcal{P}$, coupant K, alors $F \cap K$ est une face de dimension $k-1$ de $\mathcal{P} \cap K$ et $\mathrm{int}(F, \langle\ F\ \rangle) \cap K \neq \emptyset$
4- si F' est une face de dimension $k-1$ de $\mathcal{P} \cap K$ $(0 \leq k \leq d-1)$, alors elle est de la forme $F' = F \cap K$ où F est une face de dimension k de $\mathcal{P}$
5- pour $1 \leq k \leq d-1$, la face F associée à F' par (4) est unique.

Preuve : Supposons que (1) est vérifiée.
2- On peut supposer, sans perte de généralité, que $0 \notin K$, donc que K a pour équation :

$$K : \quad K^* \cdot X = 1$$

Si $\mathcal{P} \cap K = \emptyset$, alors $\dim \mathcal{P} \cap K = -1$.
Supposons maintenant que $\mathcal{P} \cap K \neq \emptyset$. Comme K ne passe par aucun sommet

de $\mathcal{P}$, K n'est pas un hyperplan-support de $\mathcal{P}$. Si l'on avait $\overset{\circ}{\mathcal{P}} \subseteq K^\epsilon$ pour $\epsilon \in \{+,-\}$, on en déduirait que $\mathcal{P} \subseteq \overline{K^\epsilon}$, i.e. qu'il est support. Finalement :

$$\overset{\circ}{\mathcal{P}} \cap K^+ \neq \emptyset \text{ et } \overset{\circ}{\mathcal{P}} \cap K^- \neq \emptyset.$$

Soit P le sommet de $\mathcal{P}$ tel que :

$$K^* \cdot P = \max\{K^* \cdot X, X \in \mathcal{P}\}.$$

Remarquons que $P \in K^-$.
Soit $\Omega \in \overset{\circ}{\mathcal{P}} \cap K^+$ et $\epsilon > 0$ tels que

$$\mathrm{B}(\Omega, \epsilon) \subseteq \overset{\circ}{\mathcal{P}} \cap K^+.$$

Alors l'intersection $\mathrm{conv}(\mathrm{B}(\Omega,\epsilon) \cup \{P\}) \cap K$ est une boule $\mathrm{B}_K(\Omega', \epsilon')$ de K et cette intersection est incluse dans $\mathcal{P} \cap K$. (Voir figure 3.5). Donc

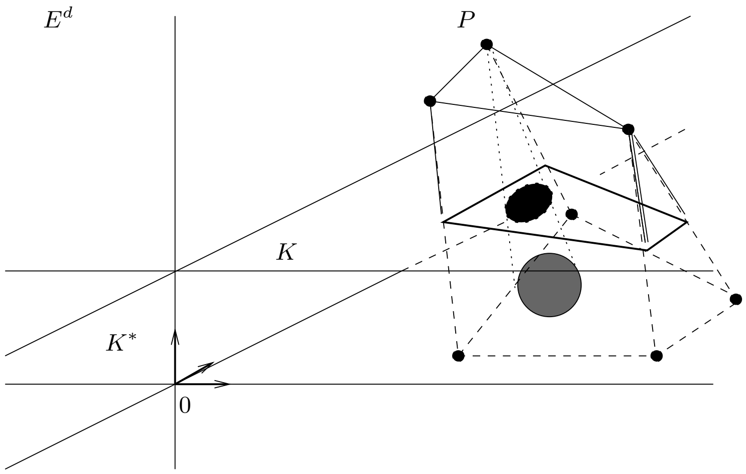


FIG. 3.5 – La boule $\mathrm{B}_K(\Omega', \epsilon')$.

$$\mathrm{int}(\mathcal{P} \cap K, K) \neq \emptyset$$

d' où $\dim(\mathcal{P} \cap K) = d - 1$.
De plus $\Omega' \in \overset{\circ}{\mathcal{P}} \cap K$. Donc $\overset{\circ}{\mathcal{P}} \cap K \neq \emptyset$.
3-Soit F une k-face de $\mathcal{P}$ déterminée par un hyperplan-support H.Supposons

que K rencontre F.

$$F \cap K = (\mathcal{P} \cap H) \cap K = (\mathcal{P} \cap K) \cap (H \cap K). \tag{3.20}$$

On sait que $H \cap K \neq \emptyset$ puisque K rencontre F, et aussi que $H \neq K$ puisque K ne contient pas de sommet de $\mathcal{P}$. Le sous-espace $(H \cap K)$ est donc un hyperplan de K.
Le fait que $\mathcal{P} \subseteq \overline{H^+}$ entraine que $\mathcal{P} \cap K \subseteq \overline{(H \cap K)^+}$. Finalement l' égalité 3.20 montre que $F \cap K$ est une face de $\mathcal{P} \cap K$ déterminée par l'hyperplan-support $H \cap K$.
Le sous-espace $\langle\ F\ \rangle \cap K$ est un hyperplan de $\langle\ F\ \rangle$ ne passant par aucun sommet de F. Donc le point 2, appliqué au polytope F dans $\langle\ F\ \rangle$, montre que : $\dim(F \cap K) = k - 1$, et $\operatorname{int}(F, \langle\ F\ \rangle) \cap K \neq \emptyset$.
4- Soit F' une face de dimension $k-1$ de $\mathcal{P} \cap \mathcal{K}$ $(0 \leq k \leq d-1)$.
Considérons une description minimale de $\mathcal{P}$ comme intersection de demi-espaces :

$$\mathcal{P} = \cap_{i \in I} \overline{H_i^+}.$$

Alors

$$\mathcal{P} \cap K = \cap_{j=1}^{m} \overline{(H_j \cap K)^+},$$

(où les H_j forment un sous-ensemble des H_i et la description de $\mathcal{P} \cap K$ est minimale).
Par le lemme 3.1.15 :

$$F' = \cap_{j=1}^{d-k}((H_j \cap K) \cap \mathcal{P}),$$

à une renumérotation près des H_j, et

$$\langle\ F'\ \rangle = \cap_{j=1}^{d-k}(H_j \cap K).$$

Choisissons :

$$F = (\cap_{j=1}^{d-k} H_j) \cap \mathcal{P}.$$

L'intersection $(\cap_{j=1}^{d-k} H_j)$ est non-vide, donc

$$\dim(\cap_{j=1}^{d-k} H_j) \geq k; \tag{3.21}$$

d'autre part,

$$k - 1 = \dim F' = \dim\langle\ F'\ \rangle = \dim \cap_{j=1}^{d-k}(H_j \cap K).$$

donc

$$\dim(\cap_{j=1}^{d-k} H_j) \leq k. \tag{3.22}$$

Par (3.21,3.22), $\dim F = k$.
5- Supposons que F_1, F_2 sont des k-faces distinctes de $\mathcal{P}$ telles que $F_1 \cap K = F_2 \cap K = F'$ et $1 \leq k$.
On a alors

$$F_1 \cap F_2 \supseteq (F_1 \cap K) \cap (F_2 \cap K) = F_i \cap K$$

pour tout $i \in \{1, 2\}$. D'autre part

$$\dim F_i \cap K = k - 1 \text{ et } \dim F_1 \cap F_2 \leq k - 1$$

(la seconde inégalité découle du fait que $F_1 \neq F_2$).
Finalement : $F_1 \cap F_2 = F_i \cap K$, donc $F_1 \cap F_2 \subseteq K$. Or $F_1 \cap F_2$ est une face non-vide (puisque $k - 1 \geq 0$). Elle contient donc un sommet. Donc K contiendrait un sommet de $\mathcal{P}$, ce qui contredit l'hypothèse 1. $\square$

Proposition 3.4.3 *Soit $\mathcal{P}$ un polytope de dimension d dans $\mathbb{E}^d$ et K un hyperplan tel que*
1'- un et un seul sommet de $\mathcal{P}$ appartient à K,
Alors :
2- $\mathcal{P} \cap K$ est un polytope de dimension 0 ou $d - 1$.
Si $\dim(\mathcal{P} \cap K) \neq 0$, alors $\overset{\circ}{\mathcal{P}} \cap K \neq \emptyset$.
3- si F est une face de dimension k ($1 \leq k \leq d - 1$) de $\mathcal{P}$, coupant K, alors $F \cap K$ est une face de dimension $k - 1$ de $\mathcal{P} \cap K$ et $\mathrm{int}(F, \langle\ F\ \rangle) \cap K \neq \emptyset$
4- si F' est une face de dimension $k - 1$ de $\mathcal{P} \cap K$ ($1 \leq k \leq d - 1$), alors elle est de la forme $F' = F \cap K$ où F est une face de dimension k de $\mathcal{P}$
5- pour $2 \leq k \leq d - 1$, la face F associée à F' par (4) est unique.

Preuve : On reprend la preuve de la proposition précédente, en tenant compte du fait que l'hypothèse (1) est remplacée par (1') :

$$\mathcal{V}(\mathcal{P}) \cap K = \{X_0\}.$$

2- Si $\mathcal{P} \cap K = \{X_0\}$, alors $\dim \mathcal{P} \cap K = 0$.
Supposons maintenant que

$$\mathcal{P} \cap K \neq \{X_0\}. \tag{3.23}$$

cas 1 : K est un hyperplan-support.
Par (1') il ne peut être support que d'une face n'ayant qu'un sommet, donc

d'une face de dimension 0, ce qui est contraire à l'hypothèse. Ce cas est donc impossible.
cas 2 : K n'est pas un hyperplan-support.
On peut conclure comme dans la preuve de la proposition 3.4.2 que $\dim(\mathcal{P}\cap K) = d-1$ et $\overset{\circ}{\mathcal{P}} \cap K \neq \emptyset$.
3-Soit F une k-face de $\mathcal{P}$ ($1 \leq k \leq d-1$) déterminée par un hyperplan-support H. Supposons que K rencontre F.
Cette fois-ci on sait que $H \neq K$ car K ne peut contenir plus d'un sommet de F.
On sait aussi que le sous-espace $\langle\ F\ \rangle \cap K$ est un hyperplan de $\langle\ F\ \rangle$ passant par un et un seul sommet de F. Donc le point 2 s'applique au polytope F dans $\langle\ F\ \rangle$.
4-Soit F' une face de dimension $k-1$ de $\mathcal{P} \cap \mathcal{K}$ $(0 \leq k \leq d-1)$.
Les arguments de la preuve du point 4 du lemme 3.4.2 sont encore valables ici.
5-Supposons que F_1, F_2 sont des k-faces distinctes de $\mathcal{P}$ telles que $F_1 \cap K = F_2 \cap K = F'$ et $2 \leq k$.
Cette fois-ci on conclut l'argumentation par :
Or $F_1 \cap F_2$ est une face de dimension $k-1 \geq 1$. Elle contient donc au moins deux sommets. Donc K contiendrait au moins deux sommets de $\mathcal{P}$, ce qui contredit l'hypothèse (1'). $\square$
Le lemme suivant affirme que, le polytope $\mathcal{P}$ et un hyperplan H étant donnés, il existe un hyperplan K aussi proche que l'on veut de H vérifiant l' hypothèse de la proposition 3.4.2.

Lemme 3.4.4 *Soit $\mathcal{P}$ un polytope de dimension d dans $\mathbb{E}^d$, H un hyperplan et $\epsilon > 0$. Il existe un hyperplan K tel que*
0- $\mathrm{d}(H^*, K^*) < \epsilon$
1- aucun sommet de $\mathcal{P}$ n'appartient à K,
2- pour tous sommets X, Y de $\mathcal{P}$, $K^* \cdot \overrightarrow{XY} \neq 0$.

Preuve : On suppose que $0 \notin K$. Soit $\epsilon > 0$. Considérons la boule ouverte $\mathrm{B}(H^*, \epsilon)$. Comme aucune boule ouverte de E^d n'est recouverte par une union finie d'hyperplans (lemme 2.1.12),

$$\mathrm{B}(H^*, \epsilon) \not\subseteq (\cup_{X,Y \in \mathcal{S}(\mathcal{P})} (\overrightarrow{XY})^\perp) \cup (\cup_{X \in \mathcal{S}(\mathcal{P})} X^*).$$

Soit
$$Z \in \mathrm{B}(H^*, \epsilon) - (\cup_{X,Y \in \mathcal{S}(\mathcal{P})} (\overrightarrow{XY})^\perp) \cup (\cup_{X \in \mathcal{S}(\mathcal{P})} X^*).$$

Il existe un hyperplan K tel que $Z = K^*$.
Comme $K^* \in \mathrm{B}(H^*, \epsilon)$, le point (0) du lemme est vérifié.
Comme $K^* \nsubseteq \cup_{X \in \mathcal{S}(\mathcal{P})} X^*$,on est sûr que $K \notin \mathcal{S}(\mathcal{P})$, donc le point (1) est vérifié.
Comme $K^* \nsubseteq (\cup_{X,Y \in \mathcal{S}(\mathcal{P})} (\overrightarrow{XY})^{\perp})$, le point (2) est vérifié. $\square$

Chapitre 4

Analyse combinatoire des Polytopes

4.1 Relation d'Euler

Soit $\mathcal{P}$ un d-polytope. Pour tout $k \in [-1, d]$, on note $\mathcal{F}_k(\mathcal{P})$ l'ensemble des k-faces de $\mathcal{P}$ et $n_k(\mathcal{P})$ le nombre de ces k-faces.

Théorème 4.1.1 *Les nombres* $n_k(\mathcal{P})$ *satisfont la relation*
$\sum_{k=-1}^{d}(-1)^k n_k(\mathcal{P}) = 0$

Nous prouvons cette relation par récurrence sur la dimension. Dans une première phase nous nous concentrons sur l'aspect *calculatoire* de cette preuve. Dans une seconde phase nous justifions par des arguments *géométriques* précis les relations arithmétiques utilisées au cours de la première phase.

Phase 1
$d = 0$:
Alors $n_{-1}(\mathcal{P}) = 1; n_0(\mathcal{P}) = 0$. Donc la somme alternée vaut :
$(-1)^{-1} \cdot 1 + (-1)^0 \cdot 1 = 0$.
$d = 1$:

Alors $n_{-1}(\mathcal{P}) = 1; n_0(\mathcal{P}) = 2, n_1(\mathcal{P}) = 1$. Donc la somme alternée vaut :
$(-1)^{-1} \cdot 1 + (-1)^0 \cdot 2 + (-1)^1 \cdot 1 = 0$.
induction : soit $d > 1$ et supposons que la relation est vérifiée pour tout polytope de dimension $d-1$.
On choisit un repère orthonormé $(\mathrm{O}, e_1, e_2, \ldots, e_d)$ de $\mathbb{E}^d$ tel que, pour tous sommets P, Q de $\mathcal{P}$, $e_d \cdot \overrightarrow{PQ} \neq 0$. Donc deux sommets distincts P, Q de $\mathcal{P}$ ont des dernières coordonnées $x_d(P), x_d(Q)$ distinctes. Soit $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ la suite des sommets de $\mathcal{P}$, triée par ordre croissant de coordonnée x_d. On considère une suite de $2n-1$ hyperplans "horizontaux" $(H_1, H_2, \ldots, H_{2n-1})$ tels que :

$$P_i \in H_{2i-1};\ \ H_{2i} \text{ est compris entre } H_{2i-1} \text{ et } H_{2i+1}.$$

`ici figure plansHi`
Pour toute face F de $\mathcal{P}$ et tout $j \in [1, 2n-1]$ on pose :

$$\chi_j(F) = 1 \text{ si } H_j \cap \mathrm{int}(F, \langle\ F\ \rangle) \neq \emptyset;\ \ \chi_j(F) = 0 \text{ sinon }.$$

Si $\dim(F) = k \geq 1$ alors

$$1 = \sum_{j=2}^{2n-2} (-1)^j \chi_j(F) \tag{4.1}$$

(i.e. un hyperplan pair H_{2i} de plus que d'hyperplans impairs H_{2i+1} rencontre l'intérieur relatif de F). En utilisant cette formule (compliquée) pour l'entier 1 on obtient :

$$n_k(\mathcal{P}) = \sum_{F \in \mathcal{F}_k(\mathcal{P})} \sum_{j=2}^{2n-2} (-1)^j \chi_j(F)$$

et en utilisant cette formule pour chaque entier $n_k(\mathcal{P})$ on obtient :

$$\sum_{k=1}^{d-1} (-1)^k n_k(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{d-1} (-1)^k \sum_{F \in \mathcal{F}_k(\mathcal{P})} \sum_{j=2}^{2n-2} (-1)^j \chi_j(F)$$

En utilisant l'associativité-commutativité de la somme, on transforme l' équation précédente en :

$$\sum_{k=1}^{d-1} (-1)^k n_k(\mathcal{P}) = \sum_{j=2}^{2n-2} (-1)^j \Big[\sum_{k=1}^{d-1} (-1)^k \sum_{F \in \mathcal{F}_k(\mathcal{P})} \chi_j(F)\Big] \tag{4.2}$$

On cherche maintenant à évaluer l'expression entre crochets, pour chaque j, au moyen de la relation d' Euler dans $\mathcal{P} \cap H_j$.

D'après la proposition 3.4.2 point 2 (pour j pair) et la proposition 3.4.3 point 2 (pour j impair),

$$\forall j \in [2, 2n-2], \mathcal{P} \cap H_j \text{ est un polytope de dimension } d-1.$$

Notons $\mathcal{P}_j$ ce $(d-1)$-polytope $\mathcal{P} \cap H_j$.

Par hypothèse de récurrence

$$\sum_{k=0}^{d-2} (-1)^k n_k(\mathcal{P}_j) = \sum_{k=1}^{d-1} (-1)^{k-1} n_{k-1}(\mathcal{P}_j) = 1 - (-1)^{d-1} \tag{4.3}$$

Si j est pair :

$$\forall k \in [1, d-1], \ \ n_{k-1}(\mathcal{P}_j) = \sum_{F \in \mathcal{F}_k(\mathcal{P})} \chi_j(F) \tag{4.4}$$

Si j est impair :

$$n_0(\mathcal{P}_j) = 1 + \sum_{F \in \mathcal{F}_1(\mathcal{P})} \chi_j(F) \tag{4.5}$$

$$\forall k \in [2, d-1], \ \ n_{k-1}(\mathcal{P}_j) = \sum_{F \in \mathcal{F}_k(\mathcal{P})} \chi_j(F) \tag{4.6}$$

En utilisant (4.3) et (4.4),

$$\forall k \in [2, d-1], \ \ \sum_{k=1}^{d-1} (-1)^k \sum_{F \in \mathcal{F}_k(\mathcal{P})} \chi_j(F) = -1 + (-1)^{d-1} \quad \text{pour } j \text{ pair} \tag{4.7}$$

En utilisant (4.3),(4.5) et (4.6)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{d-1} (-1)^k \sum_{F \in \mathcal{F}_k(\mathcal{P})} \chi_j(F) &= -(n_0(\mathcal{P}_j) - 1) - \sum_{k=2}^{d-1} (-1)^{k-1} n_{k-1}(\mathcal{P}_j) \\
&= \sum_{k=1}^{d-1} (-1)^k n_{k-1}(\mathcal{P}_j) + 1 \\
&= -(1 - (-1)^{d-1}) + 1 \\
&= (-1)^{d-1} \quad \text{pour } j \text{ impair}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

On a ainsi trouvé, dans chaque cas de parité de j, une expression très simple du crochet de l' équation (4.2). En remplaçant le crochet par cette expression dans (4.2), on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{d-1}(-1)^k n_k(\mathcal{P}_j) &= \sum_{j\in[2,2n-2],\, j\text{pair}} [-1+(-1)^{d-1}] + \sum_{j\in[2,2n-2],\, j\text{impair}} (-1)^{d-1} \\ &= (n-1)[-1+(-1)^{d-1}] + (n-2)[(-1)^d] \\ &= (-1)^{d-1} - (n-1) \end{aligned} \tag{4.9}$$

D' où

$$\sum_{k=0}^{d-1}(-1)^k n_k(\mathcal{P}) = (-1)^{d-1} - (n-1) + n_0(\mathcal{P}) = (-1)^{d-1} + 1,$$

et finalement

$$\sum_{k=-1}^{d}(-1)^k n_k(\mathcal{P}) = 0.$$

Phase 2 Nous devons fournir des justifications géométriques précises des assertions (4.1),(4.4),(4.5),(4.6).
Assertion (4.1) :
Soient P^+ (resp. P^-) le sommet de "hauteur" maximum (resp. minimum) de F (on appelle hauteur de X le nombre $\overrightarrow{OX}\cdot e_d$).
Soient $2i_+ - 1, 2i_- - 1$ les indices des hyperplans tels que

$$P^+ \in H_{2i_+-1}, \quad P^- \in H_{2i_--1}.$$

Si $j \notin [2i_- - 1, 2i_+ - 1]$, H_j ne rencontre pas F.
Si $j \in \{2i_- - 1, 2i_+ - 1\}$, H_j est un hyperplan-support du polytope F, donc ne rencontre pas son intérieur relatif.
Si $j \in]2i_- - 1, 2i_+ - 1[$, H_j rencontre le polytope F et n'est pas support. Donc H_j rencontre l'intérieur relatif de F.
Finalement, l'ensemble $\{j \in [1,n], \chi_j(F) = 1\}$ contient un élément pair de plus que d' éléments impairs. D' où l' assertion.
Assertion (4.4) :
Par la proposition 3.4.2, points 4,5, l'application $F \mapsto F\cap H_j$ est une bijection de l'ensemble

$$\mathcal{F}_{k,j}(\mathcal{P}) = \{F \in \mathcal{F}_k(\mathcal{P}) \mid F\cap H_j \neq \emptyset\}$$

dans l'ensemble $\mathcal{F}_{k-1}(\mathcal{P}_j)$. Le point 2 montre, qu'en outre,

$$\mathcal{F}_{k,j}(\mathcal{P}) = \{F \in \mathcal{F}_k(\mathcal{P}) \mid \chi_j(F) = 1\}.$$

Assertion (4.5) :
Soit $j = 2k-1$. Comptons le nombres de points de $\mathcal{S}(\mathcal{P}_{2k-1}) - \{P_k\}$.
1- Si F est une 1-face de $\mathcal{P}$ et son intérieur relatif rencontre H_{2k-1}, alors $F \cap H_{2k-1}$ est un sommet de $\mathcal{P}_{2k-1}$ qui n'est pas sommet de $\mathcal{P}$ (par le point 3 de la proposition 3.4.3). Donc c'est un point $X \in \mathcal{S}(\mathcal{P}_{2k-1}) - \{P_k\}$.
2- Le point 4 de la proposition 3.4.3 est encore valide (seule l'unicité peut tomber en défaut). Donc, pour tout $X \in \mathcal{S}(\mathcal{P})_{2k-1} - \{P_k\}$,

$$\exists F \in \mathcal{F}_1(\mathcal{P}), F \cap H_{2k-1} = \{X\}.$$

3- Supposons que $F, F' \in \mathcal{F}_1(\mathcal{P})$ vérifient : $F \cap H_{2k-1} = F' \cap H_{2k-1} = \{X\} \in \mathcal{S}(\mathcal{P}_{2k-1}) - \{P_k\}$. Alors $F \cap F'$ est une face de $\mathcal{P}$ qui est non-vide et n'est pas un sommet (puisque X n'est pas un sommet de $\mathcal{P}$). Donc $\dim F \cap F' = 1$ d' où l'on déduit $F = F'$.
Les points 1,2,3 montrent que $F \mapsto F \cap H_j$ est une bijection de
$\{F \in \mathcal{F}_1(\mathcal{P}) \mid \chi_j(F) = 1\}$ dans $\mathcal{S}(\mathcal{P}_j) - \{P_k\}$.
Assertion (4.6) :
Par la proposition 3.4.3, points 4,5, l'application $F \mapsto F \cap H_j$ est une bijection de l'ensemble

$$\mathcal{F}_{k,j}(\mathcal{P}) = \{F \in \mathcal{F}_k(\mathcal{P}) \mid F \cap H_j \neq \emptyset\}$$

dans l'ensemble $\mathcal{F}_{k-1}(\mathcal{P}_j)$. Le point 2 montre, qu'en outre,

$$\mathcal{F}_{k,j}(\mathcal{P}) = \{F \in \mathcal{F}_k(\mathcal{P}) \mid \chi_j(F) = 1\}.$$

Note bibliographique Une histoire des versions successives de cette formule, de leurs preuves et ... de leurs réfutations, est donnée dans [Lak84].

4.2 Théorème de la Borne supérieure

Théorème 4.2.1 *Soit $d \geq 0$. Tout d-polytope qui a n facettes (resp. n sommets) a $O(n^{\lfloor d/2 \rfloor})$ faces et $O(n^{\lfloor d/2 \rfloor})$ paires de faces incidentes.*

Ce théorème est la clé de l'analyse de la complexité des algorithmes développés dans les chapitres 6 et 7.
Nous utilisons quelques définitions et lemmes techniques.
Soit X un sommet d'un polytope $\mathcal{P}$. On note

$$\mathcal{V}(X,\mathcal{P}) = \{Y \in \mathcal{S}(\mathcal{P}) \mid X = Y \text{ ou } [X,Y] \text{ est une arête de } \mathcal{P}\}.$$

C'est l'ensemble des voisins de X auquel on adjoint X lui-même.

Lemme 4.2.2 *Soit $\mathcal{P}$ un polytope de $\mathbb{E}^d$, X un sommet de $\mathcal{P}$. Alors* $\mathcal{P} \subseteq X + \operatorname{cone}(\{\overrightarrow{XY} \mid Y \in \mathcal{V}(X)\})$.

Preuve : Considérons :
- un hyperplan H séparant strictement X des autres sommets de $\mathcal{P}$,
-le polytope $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \cap H$.
Par les points (3-4) de la proposition 3.4.2, les sommets de $\mathcal{Q}$ sont les intersections des segments $[XY]$, $Y \in \mathcal{V}(X)$, avec H.
Soit maintenant Z, un point quelconque de $\mathcal{P}$. $[XZ]$ coupe H en un point T de $\mathcal{Q}$.
`Ici une figure`.
T est combinaison convexe des sommets de $\mathcal{Q}$. Donc $\overrightarrow{XT}$ est combinaison positive des $\{\overrightarrow{XY} \mid Y \in \mathcal{V}(X)\}$. $\square$

Lemme 4.2.3 *Soit $\mathcal{P}$ un polytope de $\mathbb{E}^d$, X un sommet de $\mathcal{P}$, H un hyperplan de $\mathbb{E}^d$. Si $\mathcal{V}(X,\mathcal{P}) \subseteq \overline{H^+}$ alors $\mathcal{P} \subseteq \overline{H^+}$.*

Preuve : Les hypothèses entrainent que

$$X + \operatorname{cone}(\{\overrightarrow{XY} \mid Y \in \mathcal{V}(X)\}) \subseteq \overline{H^+}.$$

Le lemme 4.2.2 permet de conclure que $\mathcal{P} \subseteq \overline{H^+}$. $\square$
Nous dirons qu'un polytope est en position F-générale si les supports de ses facettes $H_1, H_2 \ldots H_n$ sont en position générale (i.e. toute intersection $H_{i_1} \cap H_{i_2} \cap \ldots \cap H_{i_p}$ de p hyperplans distincts est de dimension $d-p$, pour tout $0 \leq p \leq d+1$).

Lemme 4.2.4 *Soit $\mathcal{P}$ un d-polytope en position F-générale. Alors tout sommet X de $\mathcal{P}$ a exactement d sommets voisins.*

Preuve : Comme $\mathcal{P}$ est de dimension d, on peut aussi supposer que $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{E}^d$ et $0 \in \overset{\circ}{\mathcal{P}}$. Par application de la polarité par rapport à la sphère unité : les points $0, H_1^*, \ldots, H_i^*, \ldots, H_n^*$ sont en position générale. Soit F une facette de $\mathcal{P}^\#$: F a exactement d sommets affinements indépendants. Donc F est un simplexe. Donc F contient exactement d faces de dimension $d-2$. Par dualité, chaque sommet de $\mathcal{P}$ a exactement d sommets voisins . □
Nous prouvons le théorème 4.2.1 pour tout d-polytope $\mathcal{P}$ qui est en position F-générale. Il a une description :

$$\mathcal{P} = \cap_{i=1}^n \overline{H_i^+}.$$

Comme $\mathcal{P}$ est de dimension d, on peut aussi supposer que $0 \in \overset{\circ}{\mathcal{P}}$.
Preuve du théorème 4.2.1 :
1-Majorons le nombre de sommets de $\mathcal{P}$ en fonction de n.
Choisissons un vecteur $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^d$ tel que, pour tous sommets P, Q de $\mathcal{P}$, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{PQ} \neq 0$.
Soit X un sommet de $\mathcal{P}$. L'ensemble $\mathcal{V}(X, \mathcal{P})$, se décompose en deux sous-ensembles (dont l'intersection est réduite à $\{X\}$) :

$$\mathcal{V}_+(X) = \{Y \in \mathcal{V}(X) \mid \overrightarrow{u} \cdot Y \geq \overrightarrow{u} \cdot X\}; \;\; \mathcal{V}_-(X) = \{Y \in \mathcal{V}(X) \mid \overrightarrow{u} \cdot Y \leq \overrightarrow{u} \cdot X\}.$$

Considérons les faces de $\mathcal{P}$ définies comme des bornes supérieures dans le treillis des faces :

$$F_+(X) = \sup \mathcal{V}_+(X); \;\; F_-(X) = \sup \mathcal{V}_-(X).$$

Par dualité,

$$(F_+(X))^\bullet = \inf\{Y^\bullet \mid Y \in \mathcal{V}_+(X)\}; \;\; (F_+(X))^\bullet = \inf\{Y^\bullet \mid Y \in \mathcal{V}_-(X)\}.$$

Comme les $Y^\bullet$ sont des $(d-1)$-simplexes ayant exactement $d-1$ sommets en commun avec $X^\bullet$, pour tout $\alpha \in \{+, -\}$,

$$\dim(F_\alpha(X))^\bullet) = d - k \text{ où } k = \mathrm{Card}(\mathcal{V}_\alpha(X)).$$

Donc, pour tout $\alpha \in \{+, -\}$,

$$\dim(F_\alpha(X)) = \mathrm{Card}(\mathcal{V}_\alpha(X)) - 1. \tag{4.10}$$

Le polytope $F_\alpha(X)$ est lui-aussi en position F-générale. Par le lemme 4.2.4 X a exactement $\mathrm{Card}(\mathcal{V}_\alpha(X)) - 1$ voisins dans $F_\alpha(X)$. Donc

$$\mathcal{V}(X, F_\alpha(X)) = \mathcal{V}_\alpha(X) \tag{4.11}$$

Pour toute face $F \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$, on note $S_+(F)$ (resp. $S_-(F)$) l'unique sommet X de F qui minimise (resp. maximise) $\overrightarrow{u} \cdot X$. Soit X un sommet de $\mathcal{P}$ et $H(X)$ l'hyperplan, passant par X, d' équation $\overrightarrow{u} \cdot Y = \overrightarrow{u} \cdot X$. Les points de $\mathcal{V}_\alpha(X)$ sont tous du même côté de $H(X)$. Donc, par l ' égalité (4.11) et le lemme 4.2.3 tous les points de $F_\alpha(X)$ sont du même coté de $H(X)$. On en conclut que, pour tout sommet X de $\mathcal{P}$, tout $\alpha \in \{+, -\}$

$$X = S_\alpha(F_\alpha(X)). \tag{4.12}$$

Notons $\mathcal{F}'$ l'ensemble des faces de $\mathcal{P}$ dont la dimension est dans l'intervalle $[\lceil\ d/2\ \rceil, d]$. Pour tout sommet X de $\mathcal{P}$, il existe un $\alpha \in \{+, -\}$ tel que $\mathrm{Card}(\mathcal{V}_\alpha(X)) - 1 \geq \lceil\ d/2\ \rceil$, donc, en utilisant (4.10) et (4.12) tel que

$$F_\alpha(X) \in \mathcal{F}' \text{ et } X = S_\alpha(F_\alpha(X))$$

Il en résulte que

$$\mathcal{F}_0(\mathcal{P}) = \{S_+(F) \mid F \in \mathcal{F}'\} \cup \{S_-(F) \mid F \in \mathcal{F}'\},$$

d'où

$$\mathrm{Card}(\mathcal{F}_0(\mathcal{P})) \leq 2 \cdot \mathrm{Card}(\mathcal{F}'). \tag{4.13}$$

Majorons le cardinal de $\mathcal{F}'$. Par le lemme 3.1.15, toute face de dimension k est l'intersection d'une famille de $d - k$ facettes. Donc

$$\mathrm{Card}(\mathcal{F}') \leq \sum_{k=\lceil\ d/2\ \rceil}^{d} \binom{n}{d-k}.$$

De la formule (4.13) et de la majoration précédente on tire :

$$\mathrm{Card}(\mathcal{F}_0(\mathcal{P})) \leq 2 \cdot \sum_{k=\lceil\ d/2\ \rceil}^{d} \binom{n}{d-k} \leq 2 \cdot \sum_{k=\lceil\ d/2\ \rceil}^{d} n^{d-k} \leq 2 \cdot (d/2+1) \cdot n^{\lfloor\ d/2\ \rfloor},$$

d' où

$$n_0(\mathcal{P}) = \mathrm{O}(\mathrm{n}^{\lfloor\ d/2\ \rfloor}).$$

2-Majorons maintenant le nombre de relations d'incidences dans $\mathcal{P}$.
Le polytope dual $\mathcal{P}^\#$ a $n_0(\mathcal{P})$ facettes. Or toute paire de faces incidentes

(F, F') de $\mathcal{P}^{\#}$, est une paire de faces d'une même facette F''.
Chaque facette F'' de $\mathcal{P}^{\#}$ est un simplexe de dimension $d-1$ donc le nombre de paires incidentes (F, F') qu'elle contient est majoré par 2^{2d}. Le nombre total de paires de faces incidentes est donc majoré par

$$n_0(\mathcal{P}) \cdot 2^{2d} = \mathrm{O}(\mathrm{n}^{\lfloor\ \mathrm{d}/2\ \rfloor}).$$

□

Chapitre 5

Programmation linéaire

5.1 Définitions

Le problème de la programmation linéaire est le problème algorithmique suivant :
Instance : un entier $d \geq 0$; des demi-espaces $(\overline{H_i^+})_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{E}^d$ donnés par les inéquations :

$$H_i : \quad A_i \cdot X \leq a_i$$

une fonction linéaire $f : X \in \mathbb{E}^d \mapsto V \cdot X \in \mathbb{R}$.
Question : Calculer un point $X_0 \in \cap_{i=1}^n \overline{H_i^+} = \mathcal{P}$ tel que

$$f(X_0) = \min\{f(X) \mid X \in \mathcal{P}\}.$$

Autrement dit, il s'agit de minimiser une fonction linéaire sur un $\mathcal{H}$-polytope.
Les réponses possibles à une instance peuvent être :
R1 : ce problème est *infaisable*, ce qui signifie que

$$\mathcal{P} = \emptyset$$

R2 : ce problème est *non-borné*, ce qui signifie que

$$\{\ f(X) \mid X \in \mathcal{P}\} \text{ n'est pas minoré}$$

R3 : un point $X_0 \in \mathcal{P}$ qui réalise le minimum de f sur $\mathcal{P}$.

5.2 Un algorithme randomisé

Nous proposons ici un algorithme randomisé pour ce problème. Nous utilisons les deux lemmes techniques suivants.

Lemme 5.2.1 *Soient* $H_1, \ldots, H_{d+1}$ *des hyperplans de* $\mathbb{E}^d$ *en position générale. Si* $\mathcal{P} = \cap_{i=1}^{d+1} \overline{H_i^+}$ *est borné et non-vide, alors* $\mathcal{P}$ *est un simplexe.*

Preuve : On prouve ce lemme par récurrence sur l' entier d.
Base : $d = 0$
Dans ce cas $\mathcal{P}$ est vide, donc

$$\dim \mathcal{P} = -1.$$

Induction : $d = d' + 1$
Les hyperplans de H_1 : $(H_1 \cap H_i)_{2 \leq i \leq d+1}$ sont en position générale. Soit

$$\mathcal{P}' = \cap_{i=2}^{d+1} (H_1 \cap \overline{H_i^+}).$$

Remarquons que toute intersection de d demi-espaces de $\mathbb{E}^d$ est vide ou non-bornée. La description de $\mathcal{P}$ donnée dans le lemme est donc minimale. Par le lemme 3.1.12, $\mathcal{P}'$ est une facette de $\mathcal{P}$.

Par hypothèse de récurrence, $\dim \mathcal{P}' = d - 1$, et comme $\mathcal{P}'$ est une facette de $\mathcal{P}$:

$$\dim \mathcal{P} = \dim \mathcal{P}' + 1 = d.$$

□

Lemme 5.2.2 *Soient* f *une fonction linéaire :* $\mathbb{E}^d \to \mathbb{R}$ *et* $\mathcal{C}$ *une partie convexe de* $\mathbb{E}^d$*. Si* X *est un minimum local de* f *sur* $\mathcal{C}$ *alors* X *est un minimum global de* f *sur* $\mathcal{C}$*.*

Preuve : Soit $\epsilon > 0$ tel que

$$f(X) = \min\{f(Y) \mid Y \in \mathcal{C} \cap \mathrm{B}(X, \epsilon)\}.$$

Soit $Z \in \mathcal{C} - \{X\}$. Posons $\lambda = \min\{\frac{\epsilon}{2||Z-X||}, 1\}$ et $Z' = (1-\lambda)X + \lambda Z \in \mathcal{C}$.
Le choix de λ entraîne que :
$\mathrm{d}(X, Z') = ||(1-\lambda)X + \lambda Z) - X|| = |\lambda| \cdot ||Z - X|| \leq \frac{\epsilon}{2}$, donc $Z' \in \mathcal{C} \cap \mathrm{B}(X, \epsilon)$.
Comme $f(X)$ est minimum sur $\mathcal{C} \cap \mathrm{B}(X, \epsilon)$:

$$f(X) \leq f(Z')$$

soit, par linéarité de f : $f(X) \leq (1-\lambda)f(X) + \lambda f(Z)$, d' où il suit que $f(X) \leq f(Z)$. □
On se place maintenant dans le cas où les deux hypothèse suivantes sont vérifiées :

(PG) les hyperplans $(V^*, H_1, H_2, \ldots, H_n)$ sont en position générale

(B) $\mathcal{P}_{d+1}$ est borné.

Schéma récursif : version déterministe On considère les polytopes successifs

$$\mathcal{P}_i = \cap_{j=1}^{i} \overline{H_j^+}$$

Pour chaque indice $i \in [d+1, n]$, on calcule un point $X_i \in \mathcal{P}_i$ qui minimise f sur $\mathcal{P}_i$

Étape 1 : Initialisation
On considère $\mathcal{P}_{d+1}$. Posons $\cap_{k \in [1,d+1]-\{j\}} H_k = \{Y_j\}$.
Cas 1 : $Y_1 \notin \overline{H_1^+}$
Alors $\mathcal{P}_{d+1} = \emptyset$. L' instance est donc *infaisable*.
Cas 2 : $Y_1 \in \overline{H_1^+}$
Dans ce cas $\mathcal{P}_{d+1}$ est borné, non-vide. Par le lemme 5.2.1 $\mathcal{P}_{d+1}$ est un simplexe. Choisissons $X_{d+1} := Y_j$ tel que

$$f(Y_j) = \min\{f(Y_\ell) \mid 1 \leq \ell \leq d+1\}.$$

Étape 2 : Itération
Supposons que $d + 2 \leq i \leq n$.
Cas 1 : $X_{i-1} \in \overline{H_i^+}$
Alors $X_i := X_{i-1}$.
Cas 2 : $X_{i-1} \notin \overline{H_i^+}$
`une figure pour chaque cas`
– Si $\mathcal{P}_i \neq \emptyset$, il existe un point X_i tel que, $f(X_i) = \min\{f(X) \mid X \in \mathcal{P}_i\}$, alors $X_i \notin H_i^+$: sinon X_i serait un minimum local de f sur $\mathcal{P}_{i-1}$ et par

le lemme 5.2.2, on aurait $X_i = X_{i-1}$. Par conséquent $X_i \in H_i$.
Donc X_i est aussi solution de l' instance plus petite I' définie par

$$d' = d - 1; \quad \text{les demi-espaces } (\overline{K_j^+} \cap H_i)_{1 \leq j \leq i-1} \text{ de } H_i; \quad \text{la fonction } f_{|H_i}$$

– Si $\mathcal{P}_i = \emptyset$, alors, a fortiori, $\mathcal{P}_{i-1} \cap H_i = \emptyset$.
Donc l' instance I' est infaisable.

Finalement :
si I' a une solution, alors cette solution minimise aussi f sur $\mathcal{P}_i$
si I' n'a pas de solution, alors $\mathcal{P}_i = \emptyset$.
On exécute donc l'algorithme (Phases 1,2) sur l' instance I'.
X_i (resp. "probleme infaisable") est le résultat fourni par cet appel récursif.

Schéma récursif : version randomisée On remarque que, à l' étape i , le nombre d' hyperplans parmi $\mathcal{H}_i = \{H_{d+2}, \ldots, H_i\}$ qui possèdent X_i est majoré par d (d' après l' hypothèse (PG)). Le cas 2, qui est le plus coûteux, ne se produit que sous cette hypothèse. On *randomise* donc l'algorithme , de façon que, pour une instance géométrique fixe, le temps moyen de calcul soit conforme au temps moyen de l'algorithme déterministe sur l' univers de toutes les instances géométriques : il suffit de tirer au hasard l ' hyperplan H_i dans l'ensemble d' hyperplans $\mathcal{H}_i$.

Algorithme

```
fonction MIN(r,K: s.e.a. de dim r de 𝔼^d;m: entier; K): point de K;
(* -1 <= r <= max(0,r)<= d <=d+1 <= m <= n;  *)
(* K est l'intersection de (d-r) hyperplans  ∂ E[k]  *)
(* renvoie un point de K , qui minimise f sur  (∩_i = 1^m  E[i]) ∩ K   *)
var k: entier; X: point de 𝔼^d;
début
1     𝒫 :=  (∩_ i = 1^ d + 1  E[i])  ∩  K  ;
2    si  𝒫 =  ∅  alors retourner ‘‘problème infaisable ‘‘;
     (* donc pour r=-1, on retourne infaisable *)
3    X := un point de  𝒫 qui minimise f;
4    pour i:= d+2 jusqua m faire
5         si  X  ∉  E[i]  ∩  K  alors
6        X := MIN ( r-1, K  ∩  ∂ E[i],i-1);
```

```
7   MIN := X;
fin

fonction PROGRAMLIN(d,n: entiers; E: tableau [1 .. n] de demi-espaces fermés de E^d):
 point de E^d;
début
  σ := permutation aléatoire de [d+2,m];
    pour i:= d+2 jusqua n faire F[i] := E[σ(i)];
    pour i:= d+2 jusqua n faire E[i] := F[i];
PROGRAMLIN:= MIN(d,E^d,n);
fin
```

Correction Cet algorithme est la réalisation directe du schéma récursif décrit plus haut.

Complexité Analysons la complexité, en temps, en moyenne, $M(r, K, m)$ d'un appel `MIN(r,K,m)`.
On fixe une suite $H_1, \dots, H_{d+1}, \dots, H_n$ d' hyperplans de $\mathbb{E}^d$. Soit $\Omega = \{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid \sigma_{|[1,d+1]} = \mathrm{I}_{d+1}\}$ (l'ensemble des permutations de $[1, n]$ qui fixent les entiers de 1 à $d+1$). On considère la loi de probabilité uniforme p sur la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$:

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \ \ p(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}.$$

On note $T(r, K, m, \sigma)$ le temps moyen pris par l'exécution de `MIN(r,K,m)` sur une donnée $r \in [-1, d], m \in [d+1, n]$ et K un s.e.a. de dim. r de $\mathbb{E}^d$ et la variable globale $E \circ \sigma$.
On note $M(r, K, m)$ l'espérance de la variable aléatoire : $T(r, K, m, *) : \Omega \to \mathbb{R}$.

Temps pris par les lignes 1,2,3 :
On calcule une fois pour toutes le polytope $\mathcal{P}_{d+1}$ et on construit ses faces de toutes dimensions. Le nombre N de ces faces est $O(d+1)^{\lfloor d/2 \rfloor}$ (par le théorème 4.2.1).
On obtient les sommets de $\mathcal{P}_{d+1} \cap K$ en intersectant les $(d-r)$-faces de $\mathcal{P}_{d+1}$ avec K.
Si l'ensemble de sommets est vide on renvoie "instance infaisable".
Sinon, on calcule f sur tous ces sommets et on choisit X comme celui qui

minimise f.
Le temps total pris par (1-2-3) est donc

$$O(d^3 \cdot N) = O((d+1)^{\lfloor d/2 \rfloor + 3}).$$

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $T_{1,2,3}(r, K, m, \sigma) \leq k \cdot (d)^{\frac{d+6}{2}} = B(d)$.
(On note désormais $B(d)$ ce majorant).
Temps moyen pris par les lignes 5-6 :
-lorsque $X(\sigma, i-1) \in E_{\sigma(i)}$, $M_5(r, K, m) = d$ (cas 1)
-lorsque $X(\sigma, i-1) \notin E_{\sigma(i)}$, $M_6(r, K, m) = M(r-1, K \cap \partial E[i], i-1)$ (cas 2).
Le cas 2 se produit lorsque le point $X(\sigma, i)$, qui réalise le minimum de f sur $\cap_{j=1}^{i}(E_{\sigma(j)} \cap K)$, appartient à $H_{\sigma(i)} \cap K$. Evaluons la probabilité de cet événement.

$$\begin{aligned} &\{\sigma \in \Omega \mid X(\sigma, i) \in H_{\sigma(i)} \cap K\} = \\ &\cup_{P \in \mathcal{P}_{i-d-1}([d+2,n])} \{\sigma \in \Omega \mid \sigma([d+2, i]) = P \text{ et } X(\sigma, i) \in H_{\sigma(i)} \cap K\} \end{aligned} \tag{5.1}$$

et cette union est disjointe. Le point $X(\sigma, i)$ ne dépend que de la partie $P = \sigma([d+2, i])$. Cette partie P étant donnée, il y a au plus r hyperplans de K, $\partial E_{i_1}, \ldots, \partial E_{i_r}$ qui possèdent ce point. Pour P donnée, on a donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{Card}\{\sigma \in \Omega \mid X(\sigma, i) \in H_{\sigma(i)} \cap K\} &= \mathrm{Card}\{\sigma \in \Omega \mid \sigma(i) \in \{i_1, \ldots, i_r\}\} \\ &\leq r \times (i-d-2)! \times (n-i)! \end{aligned} \tag{5.2}$$

Le nombre de parties P intervenant dans la formule (5.1) est $\binom{n-d-1}{i-d-1} = \frac{(n-d-1)!}{(i-d-1)!(n-i)!}$. En combinant (5.1) et (5.2), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathrm{Card}\{\sigma \in \Omega \mid X(\sigma, i) \in H_{\sigma(i)} \cap K\} &\leq \frac{(n-d-1)!}{(i-d-1)!(n-i)!} \times r \times (i-d-2)! \times (n-i)! \\ &= \frac{r}{i-d-1} \times (n-d-1)! \end{aligned}$$

d'où

$$p(\{X(\sigma, i) \in H_{\sigma(i)} \cap K\}) \leq \frac{r}{i-d-1}. \tag{5.3}$$

Montrons par récurrence sur r que : pour tout sous-espace affine K de dimension $r \in [-1, d]$, pour tout $m \in [d+1, n]$

$$M(r, K, m) \leq 2B(d) \cdot (r+1)! \cdot (m-d). \tag{5.4}$$

On vérifie que
$$M(-1,K,m) \leq B(d)$$
$$\begin{aligned} M(0,K,m) &\leq B(d)+(m-d-1)B(d) \\ &\leq 2B(d)\cdot(1)!\cdot(m-d). \end{aligned}$$

Induction Supposons $r \in [1,d]$.

$$\begin{aligned} M(r,K,m) &\leq B(d)+(m-d-1)d+\sum_{i=d+2}^{m}\frac{r}{i-d-1}\cdot M(r-1,K\cap H_{\sigma(i)},i-1) \\ &\leq B(d)+(m-d-1)d+\sum_{i=d+2}^{m}\frac{r}{i-d-1}\cdot(r!(i-1-d)\cdot 2B(d)) \\ &\leq B(d)+(m-d-1)d+(m-d-1)\cdot r\cdot r!\cdot 2B(d) \\ &\leq B(d)\cdot[1+2(m-d-1)r\cdot r!+(m-d-1)] \\ &\leq B(d)\cdot[2(m-d-1)\cdot r!(r+1)+1] \\ &\leq B(d)\cdot[2(m-d-1)\cdot r!(r+1)+2r!(r+1)] \\ &\leq 2B(d)\cdot(r+1)!\cdot(m-d) \end{aligned}$$

On conclut que
$$M(d,\mathbb{E}^d,n) \leq (n-d)\cdot 2B(d)\cdot(d+1)!.$$

Cette complexité est *linéaire* en fonction de n (mais plus qu'exponentielle par rapport à d).

5.3 Autres algorithmes

2-Utiliser Fourier-Motzkin
On construit un ensemble de points dont $\mathcal{P}$ est l'enveloppe convexe, on calcule f sur chacun de ces points, et l'on sélectionne la plus petite valeur (resp. le point où elle est atteinte).
3-Algo du simplexe
Algorithme classique. Méthode qui, dans le pire des cas reste exponentielle. Très efficace pratiquement, néanmoins. Codes traitant $n \sim 10000, d \sim \infty$ selon [Sak84].
Reference : [Sak84, chap.7,8,9]

4-Algorithmes polynomiaux
Il existe des algorithmes *polynomiaux* en fonction de n, de d et aussi du nombre de *bits* utilisés dans les coefficients des données.
Références : [Kar84, Kha80].

5.4 Un algorithme linéaire en dimension 2

Algorithme de Meggido-Dyer. Nous suivons l' expo'e de [PS85, p. 292-297].

Chapitre 6

Calcul de l'enveloppe convexe

6.1 Dimension $d \geq 1$

Représentation d'un polytope

Soit $\mathcal{P}$ un polytope de dimension d.
Le *graphe d'incidence* d'un polytope $\mathcal{P}$ est le graphe $G = (V, E)$ où Vest l'ensemble des faces de $\mathcal{P}$ et

$$E = \{(F, F') \in \mathcal{F}(\mathcal{P})^2 \mid F \subseteq F' \text{ et } \dim F + 1 = \dim F'\}.$$

Pour tout entier $j \leq d$, le *j-squelette* de $\mathcal{P}$ est le sous-graphe de G induit par le sous-ensemble de sommets :

$$V_j = \{F \in \mathcal{F}(\mathcal{P}) \mid \dim F \leq j\}.$$

Le *graphe d'adjacence* de $\mathcal{P}$ est le graphe $G = (V, E)$ où V est l'ensemble des *facettes* de $\mathcal{P}$ et

$$E = \{(F, F') \in V \mid F \neq F' \text{ et } \dim F \cap F' = d - 2\}.$$

Le problème du calcul de l'enveloppe convexe est le suivant :

Instance :une suite de points $(A_1, \dots, A_i, \dots, A_n)$.
Calculer : le graphe d'incidence de $\mathcal{C} = \mathrm{conv}(\{A_1, \dots, A_i, \dots, A_n\})$.
On suppose que les points $A_1, \dots, A_i, \dots, A_n$ sont en position générale.

Minoration

Théorème 6.1.1 *Le tri de n nombres réels est réductible, en temps linéaire, au calcul de l'enveloppe convexe de n points de $\mathbb{E}^d$.*

Preuve : Soient $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{N}$ à trier. Considérons $P_i = (x_i, x_i^2) \in \mathbb{R}^2$. Le graphe d'incidence de l'enveloppe convexe des P_i $(1 \leq i \leq n)$ fournit le graphe d'adjacence, en temps linéaire. Par un parcours en profondeur du graphe d'adjacence, on obtient un "tri cyclique" de $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. On détermine, en temps linéaire, le minimum des $\{x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ On en déduit, en temps linéaire, le tri des $x_1, x_2, \dots, x_n$. □

Théorème 6.1.2 *La complexité du calcul de l'enveloppe convexe de n points de $\mathbb{E}^d$ est $\Omega(n \log(n) + n^{\lfloor d/2 \rfloor})$ (pour $d \geq 2$).*

Preuve : Si $d = 2$: résulte du théorème 6.1.1.
Si $d \geq 3$: résulte du fait que la taille du graphe d'incidence de l'enveloppe convexe est, en général, $\Omega(n^{\lfloor d/2 \rfloor})$ (un polytope *cyclique* à n sommets, de dimension d, a $\Omega(n^{\lfloor d/2 \rfloor})$ facettes, voir le problème de Janvier 2001). □

Schéma d 'itération

L'algorithme que nous présentons ici est *incrémental* : il consiste, étant donnée une suite de points $(A_1, \dots, A_i, \dots, A_n)$ à construire successivement les polytopes $\mathrm{conv}(\{A_1, \dots, A_i\})$. Le problème de base devient donc :

Instance : $\mathcal{C} = \mathrm{conv}(\{Q_1, \ldots, Q_m\})$ et $P \in \mathbb{E}^d$
Calculer : $\mathcal{C}' = \mathrm{conv}(\{Q_1, \ldots, Q_m, P\}) = \mathrm{conv}(\mathcal{C} \cup \{P\}\})$.
On suppose que $\mathcal{C}$ et P sont en "position générale" c'est à dire que $\mathcal{S}(\mathcal{C}) \cup \{P\}$ est un ensemble de points en position générale.

Classification des faces Soit F une facette de $\mathcal{C}$, H_F l' hyperplan support de $\mathcal{C}$ suivant F et $\overline{H_F^+}$ le demi-espace contenant $\mathcal{C}$.

$$F \text{ est } \textit{rouge} \text{ par rapport à } P \Leftrightarrow P \in H_F^-$$

(i.e. ssi F est visible depuis P)

$$F \text{ est } \textit{bleue} \text{ par rapport à } P \Leftrightarrow P \in H_F^+$$

(i.e. ssi F est invisible depuis P)
Soit F une face de $\mathcal{C}$ (de dimension quelconque).
F est *rouge* par rapport à P ssi, pour *toute* facette K contenant F, K est rouge.
F est *bleue* par rapport à P ssi, pour *toute* facette K contenant F, K est bleue.
F est *violette* par rapport à P ssi, il existe des facettes K, K' contenant F, telles que K est rouge, K' est bleue.

Couleurs des faces

Lemme 6.1.3 *Soit F une face d'un polytope $\mathcal{P}$. L'ensemble des facettes contenant F est une partie connexe du graphe d'adjacence de $\mathcal{P}$.*

Preuve : Considérons $\mathcal{P}^{\#}$. Le 1-squelette de F^* est un graphe connexe. `A justifer serieusement`. Par dualité, l'ensemble des facettes de $\mathcal{P}$ contenant F est une partie connexe du graphe d'adjacence de $\mathcal{P}$. □

Lemme 6.1.4 *Soit G une face violette de $\mathcal{C}$ par rapport à $P \notin \mathcal{C}$. Alors G est incluse dans une face violette G' de dimension $d-2$.*

Preuve : Considérons le graphe $\mathcal{G} = (V, E)$ où $V = \{$ facettes contenant $G\}$ et $E = \{(F, F') \in V \times V \mid \exists F''$ face de dimension $d-2, F'' \subseteq F$ et $F'' \subseteq F'\}$. (c'est le sous-graphe du graphe d'adjacence de $\mathcal{C}$ induit par V). Par le lemme 6.1.3, $\mathcal{G}$ est connexe. Comme G est violette, l'une des facettes $F_1 \in V$ est rouge et l'une des facettes $F_2 \in V$ est bleue. Donc il existe un arc $(F_1', F_2') \in E$ allant d'une facette rouge à une facette bleue. Donc $G' = F_1' \cap F_2'$ est une face violette de dimension $d-2$ contenant G. □

`Hyperplans bleus, rouges, violets`

Soit H un hyperplan support de $\mathcal{C}$. Supposons que $\mathcal{C} \subseteq \overline{H^+}$. Nous dirons que H est :

rouge (resp. *bleu*, *violet*) par rapport à P ssi $P \in H^-$ (resp. $P \in H^+$, $P \in H$).

Lemme 6.1.5 *1-Soit H un hyperplan support rouge (resp. bleu) tel que* $\dim(\mathcal{C} \cap H) = k \leq d-2$. *Alors il existe H', hyperplan support rouge (resp. bleu) tel que $\mathcal{C} \cap H \subset \mathcal{C} \cap H'$.*

2-Soit H un hyperplan support violet tel que $\dim(\mathcal{C} \cap H) = k \leq d-2$. *Alors il existe H', hyperplan support rouge (resp. bleu) tel que $\mathcal{C} \cap H \subset \mathcal{C} \cap H'$.*

Preuve : 1-Supposons H rouge, $\dim \mathcal{C} \cap H = k \leq d-2$. Soit K un sous-espace affine tel que $\langle\ \mathcal{C} \cap H\ \rangle \subseteq K \subseteq H$ et $\dim K = d-2$.

Soit Π un plan passant par P, orthogonal à K. Soit $p_\Pi : \mathbb{E}^d \to \Pi$ la projection sur Π parallèlement à K.

(L'idée directrice est, pour "améliorer le contact" entre $\mathcal{C}$ et H de commencer par améliorer le contact entre $p(\mathcal{C})$ et $p(H)$, puis de "remonter" à $\mathcal{C}$ par p_Π^{-1}).

`Ici figure p(C)`

Remarquons que : $p(\mathcal{C})$ est un polytope ; $p(H)$ est une droite support de $p(\mathcal{C})$, rouge par rapport à P ; $p(K)$ est un point.

$p(H)$ est une droite support de $p(\mathcal{C})$, rouge par rapport à P. Il existe une droite Δ, rouge par rapport à P, support d'une facette de $p(\mathcal{C})$, passant par $p(K)$. Posons

$$H' = p^{-1}(\Delta).$$

H' est un hyperplan support de $\mathcal{C}$ et il est rouge. On a :

$$\mathcal{C} \cap H \subseteq \mathcal{C} \cap K \subseteq \mathcal{C} \cap p^{-1}(\Delta)$$

Soient $P_1, P_2 \in \mathcal{C}$ tels que $p(P_1), p(P_2)$ sont les extrémités du côté $p(\mathcal{C}) \cap \Delta$: $p(P_1) = p(K)$ mais $P_2 \notin K$. On a donc :

$$P_2 \notin K \Rightarrow P_2 \notin \langle\ \mathcal{C} \cap H\ \rangle \Rightarrow \langle\ \mathcal{C} \cap H\ \rangle \subset \langle\ (\mathcal{C} \cap H) \cup \{P_2\}\ \rangle \subseteq \langle\ \mathcal{C} \cap H'\ \rangle.$$

Finalement, H' est un hyperplan support de $\mathcal{C}$, qui est rouge et tel que $\mathcal{C} \cap H \subset \mathcal{C} \cap H'$.
Si l'on part d'un hyperplan H qui est *bleu*, alors on construit de la même manière un hyperplan H' qui est bleu.
2- Si l'on part d'un hyperplan H qui est *violet*, alors on peut construire à la fois un H' qui est rouge et un H'' qui est bleu.
□

Lemme 6.1.6 *1-Soit H un hyperplan support rouge (resp. bleu) par rapport à P. Alors il existe H', hyperplan support rouge (resp. bleu) tel que $\mathcal{C} \cap H \subseteq \mathcal{C} \cap H'$ et $\dim \mathcal{C} \cap H' = d-1$.*
2-Soit H un hyperplan support violet par rapport à P. Alors il existe H', hyperplan support rouge (resp. bleu) tel que $\mathcal{C} \cap H \subset \mathcal{C} \cap H'$ et $\dim \mathcal{C} \cap H' = d-1$.

Preuve : 1-Soit H un hyperplan support rouge par rapport à P. En utilisant le lemme 6.1.5, point 1, on prouve par récurrence sur $\dim \mathcal{C} \cap H$ le point 1 du lemme 6.1.6.
2-Même raisonnement.
3-Soit H un hyperplan support violet par rapport à P. En appliquant le lemme 6.1.5,point 2, une fois, puis le lemme 6.1.5, point 1, $d-2-\dim \mathcal{C} \cap H$ fois, on obtient un H' de la couleur désirée (qu'elle soit rouge ou bleue). □

Nouvelles faces vs anciennes faces

Lemme 6.1.7 *Soit $\mathcal{C}$ un polytope et P un point en position générale. Les faces de $\text{conv}(\mathcal{C} \cup \{P\})$ sont*
-les faces bleues de $\mathcal{C}$
-les faces violettes de $\mathcal{C}$
-les polytopes $\text{conv}(G \cup \{P\})$ où G est une face violette de $\mathcal{C}$.

Preuve : **Cas 1** : $P \in \mathcal{C}$
Cas 2 : $P \notin \mathcal{C}$

2.1 : Soit F une face de $\mathcal{C}$, bleue par rapport à P.
2.2 : Soit G une face violette de $\mathcal{C}$, $\dim G = d - 2$.
2.3 : Soit G une face violette de $\mathcal{C}$, $\dim G \leq d - 3$.
2.4 : Soit F une face de $\text{conv}(\mathcal{C} \cup \{P\})$.
□

Lemme 6.1.8 *Soit $\mathcal{C}$ un polytope et P un point en position générale.*
1- Si F, G sont des faces incidentes de $\mathcal{C}$, qui sont bleues ou violettes par rapport à P, alors F, G sont des faces incidentes de $\text{conv}(\mathcal{C} \cup \{P\})$.
2- Si G est une face violette de $\mathcal{C}$, G et $\text{conv}(G \cup \{P\})$ *sont des faces incidentes de* $\text{conv}(\mathcal{C} \cup \{P\})$.
3- Si F, G sont des faces incidentes de $\mathcal{C}$, qui sont violettes par rapport à P, alors $\text{conv}(F \cup \{P\})$, $\text{conv}(G \cup \{P\})$ *sont des faces incidentes de* $\text{conv}(\mathcal{C} \cup \{P\})$.
Toute paire (F_1, F_2) de faces incidentes de $\text{conv}(\mathcal{C} \cup \{P\})$ *est de l'une des formes (1),(2) ou (3).*

Lemme 6.1.9 *Soit $\mathcal{C}$ un polytope et P un point en position générale.*
L'ensemble des facettes de $\mathcal{C}$ rouges (resp. bleues) par rapport à P forme une partie connexe du graphe d'adjacence.

Preuve : Récurrence sur la dimension. □

Lemme 6.1.10 *Soit $\mathcal{C}$ un polytope et P un point en position générale.*
Si $\mathcal{C}$ a n sommets et ne contient pas P, l'ensemble des faces du polytope $\mathcal{C}$, violettes par rapport à P, muni de la relation d'incidence, est isomorphe à l'ensemble des faces d'un $(d-1)$-polytope dont le nombre de sommets est $\leq n$.

Preuve : □

L'algorithme

Soit $\mathcal{A} = \{A_+1, A_2, \ldots, A_n\}$ un ensemble de n points de $\mathbb{E}^d$, en position générale.
Plan de l'algorithme :

```
1   Tri des points de  𝒜 par ordre lexicographique croissant.
2    𝒞  :=  conv({A_1, A_2, . . . , A_n})
    (*  𝒞 est un simplexe *)

3   pour i:= d+2 jusqua n faire
4          𝒞  :=  conv( 𝒞  ∪  {A_i})
```

On appelle "étape courante" la ligne 4 de cet algorithme.
On note $\mathcal{C}_i = \operatorname{conv}(\{A_1, A_2, \ldots, A_i\})$. Plan de l'étape courante :
Phase 1 :
Identifier une facette de $\mathcal{C}_{i-1}$, rouge par arpport à A_i.
Phase 2 :
Construire
-une liste $\mathcal{R}_{d-1}$ des facettes rouges (par rapport à A_i)
-une liste $\mathcal{R}_{d-2}$ des $(d-2)$-faces rouges (par rapport à A_i)
-une liste $\mathcal{V}_{d-2}$ des $(d-2)$-faces violettes (par rapport à A_i)
Phase 3 :
Construire
-les listes $\mathcal{R}_k$ des k-faces rouges (par rapport à A_i), pour $0 \leq k \leq d-3$
-les listes $\mathcal{V}_k$ des k-faces violettes (par rapport à A_i), pour $0 \leq k \leq d-3$
Phase 4 :
Mettre à jour le graphe d'incidence $\mathcal{G}$.
Structure de donnée pour $\mathcal{G}$:

6.2 Dimension 2

Chapitre 7

Complexes

7.1 Définitions

Définition 7.1.1 *Un complexe simplicial est un ensemble $\mathcal{C}$ de simplexes de $\mathbb{E}^d$ vérifiant les deux propriétés :*

1. *toute face d'un simplexe de $\mathcal{C}$, est un simplexe de $\mathcal{C}$*
2. *si $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ sont deux simplexes appartenant à $\mathcal{C}$, alors $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ est une face de $\mathcal{S}_1$ et une face de $\mathcal{S}_2$.*

Définition 7.1.2 *Un complexe cellulaire est un ensemble $\mathcal{C}$ de polytopes (éventuellement non-bornés) de $\mathbb{E}^d$ vérifiant les deux propriétés :*

1. *toute face d'un polytope de $\mathcal{C}$, est un polytope de $\mathcal{C}$*
2. *si $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ sont deux polytopes appartenant à $\mathcal{C}$, alors $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est une face commune de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.*

Soit un complexe cellulaire de $\mathbb{E}^d$.
Il est dit de dimension k (k-complexe) si $k = \max\{\dim(\mathcal{P} \mid \mathcal{P} \in \mathcal{C}\}$.
Lorsque $k = d$,

$$\begin{cases} \text{les } d\text{-faces sont les cellules de } \mathcal{C} \\ \text{les } (d\text{-}1)\text{-faces sont les facettes de } \mathcal{C} \end{cases}$$

Deux faces F, G sont incidentes ssi $F \subseteq G$, $\dim(F) + 1 = \dim(G)$.
Le *domaine* du complexe , noté $\mid \mathcal{C} \mid$ est l'union de toutes ses faces :

$$\mid \mathcal{C} \mid = \cup_{F \in \mathcal{C}} F.$$

Définition 7.1.3 *Un polytope non-borné est une intersection* $\mathcal{Z} = \bigcap_{j=1}^{m} \overline{H_j^+}$ *de demi-espaces de* $\mathbb{E}^d$*, telle que cette famille contienne un sous-ensemble de* d *hyperplans* $\{H_{j_1}, H_{j_2}, \ldots H_{j_d}\}$ *en position générale (i.e. l'intersection de* k *d'entre eux est toujours de dimension* $d - k$*).*

Définition 7.1.4 *Un d-complexe est pur ssi, tout polytope de* $\mathcal{C}$ *est l'une des faces d'un d-polytope appartenant à* $\mathcal{C}$*.*

Définition 7.1.5 *Soit* $\mathcal{C}$ *un d-complexe simplicial pur connexe et* F *une k-face de* $\mathcal{C}$*.*
L'étoile de F *dans* $\mathcal{C}$ *est le sous-complexe de* $\mathcal{C}$ *formé par les d-simplexes de* $\mathcal{C}$ *qui contiennent* F *et les faces de ces simplexes.*
La coque de F *dans* $\mathcal{C}$ *est le sous-complexe de l'étoile de* F *formé des simplexes disjoints de* F*.*
Une face F *d'un complexe* $\mathcal{C}$ *est singulière si la coque de* F *dans* $\mathcal{C}$ *n'est ni une boule, ni une sphère topologique.*

Définition 7.1.6 *Une d-triangulation est un d-complexe simplicial, pur, connexe et sans sommet singulier.*

Théorème 7.1.7 *Si* $\mathcal{C}$ *est un d-complexe qui est une d-boule topologique, alors* $\sum_{k=0}^{d} (-1)^k n_k(\mathcal{C}) = 1$
Si $\mathcal{C}$ *est un d-complexe qui est une d-sphère topologique, alors* $\sum_{k=0}^{d} (-1)^k n_k(\mathcal{C}) = 1 + (-1)^d$

Esquisse de preuve :

1. La caractéristique d'Euler est un invariant topologique.
   (Voir théorie de l'homologie, voir site web)
2. Soit $\mathcal{C}$ un d-polytope.

   Par le théorème 4.1.1, $$\sum_{k=-1}^{d} (-1)^k n_k(\mathcal{C}) = 0 \quad (2.1)$$

   donc $$\sum_{k=0}^{d} (-1)^k n_k(\mathcal{C}) = 1 \quad (2.2)$$

   or dom($\mathcal{C}$) est une boule topologique.
   Donc par le point (1) ci-dessus, $e(\mathcal{C}) = 1$ pour toute boule topologique.
3. L'ensemble des faces propres d'un d-polytope $\mathcal{C}$ forme le bord de $\mathcal{C}$.
   Donc $$\bigcup_{\substack{F \in \mathcal{F}(\mathcal{C}) \\ 0 \leq \dim(F) \leq d-1}} F \approx S^{d-1}.$$
   Par la formule (2.2), on a donc :

   $$\begin{aligned} e(S^{d-1}) &= \sum_{k=0}^{d-1} (-1)^k n_k(\mathcal{C}) \\ &= 1 + (-1)^{d-1} \end{aligned}$$

   $$\text{Donc} \quad e(S^d) = 1 + (-1)^d$$

□

7.2 Triangulations en dimension 2

Définition 7.2.1 *Soit $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{E}^2$. On appelle* triangulation *$\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}$ toute* 2-*triangulation dont le domaine est $\mathcal{P}$.*

Problème 7.2.2 *Soient n points A_1, A_2, ..., A_n de $\mathbb{E}^2$.*
Calculer une 2*-triangulation $\mathcal{T}$ dont les sommets sont exactement A_1, A_2, ..., A_n et dont le domaine est* $\operatorname{conv}(\{A_1, A_2, \ldots, A_n\})$.

Soit $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ et soit $\mathcal{T}$ une triangulation de conv$(\mathcal{A})$ ayant pour sommets $\{A_1, \ldots, A_n\}$.

Notons $\left\{ \begin{array}{rcl} n_e & = & \text{le nombre de sommets de conv}(\mathcal{A}) \\ m & = & \text{le nombre d'arêtes de } \mathcal{C} \\ f & = & \text{le nombre de faces (i.e. de triangles) de } \mathcal{C} \end{array} \right.$

$$\left\{ \begin{array}{ll} 3f + n_e = 2m & \text{(décompte des arêtes)} \\ f - m + n = 1 & \text{(Euler, pour } \mathbb{B}^2) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} 3f - 2m + n_e = 0 & \\ f - m + n = 1 & {\scriptstyle *(-2)} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f + n_e - 2n = -2 \\ f - m + n = 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} f = 2(n-1) - n_e & (1) \\ f - m + n = 1 & \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f = 2(n-1) - n_e \\ m + n_e - 3n = -3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} f = 2(n-1) - n_e & \\ m = 3(n-1) - n_e & (2) \end{array} \right.$$

Théorème 7.2.3 *Trianguler un ensemble de n points de $\mathbb{E}^2$ est un problème $\Omega(n \log(n))$.*

Preuve : On réduit, en temps $\theta(n)$, le calcul de conv$(\mathcal{A})$ au calcul d'une triangulation de $\mathcal{A}$.
Soit $\mathcal{T}$ une triangulation de $\mathcal{A}$. On parcourt l'ensemble des arêtes et on extrait celles qui appartiennent à une seule face.
L'ensemble de ces <u>arêtes extérieures</u> et de leurs incidences avec leurs extrémités fournit le graphe d'incidence de conv$(\mathcal{A})$. $\square$

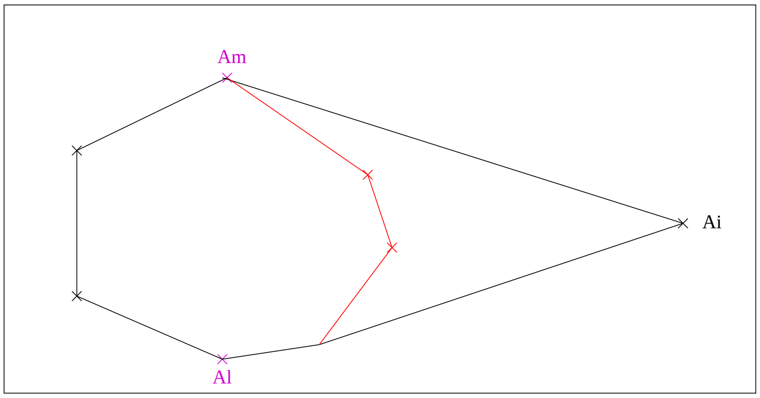
7.2.1 Algorithme Incrémental

- Tri lexicographique des points
- $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ (supposé en position générale)
  $A_1 \leq A_2 \leq \dots \leq A_n$
  $\mathcal{T}_i$: triangulation de $\{A_1, \dots, A_i\}$
  $\mathcal{C}_i$: conv($\{A_1, \dots, A_i\}$)

Structure de donnée :
– T : graphe d'incidence de la triangulation.
– L : liste circulaire doublement chaînée des arêtes de $\mathcal{C}_i$.
– p : pointeur sur une arête de $\mathcal{T}_i$, contenant A_i

Etape 1 :
– T : le triangle $\{A_1, A_2, A_3\}$ et ses arêtes et sommets.
– L : A_1, A_2, A_3
– $p^{\uparrow}$: A_3

Etape i :
* A partir de $p^{\uparrow}$, on parcourt l'ensemble des arêtes rouges de $\mathcal{C}_{i-1}$ par rapport à A_i.
* Pour chaque arête rouge F, conv$(F \cup \{A_i\})$ est ajouté à T.
* Dans L :
  – on supprime les arêtes rouges
  – on ajoute les arêtes A_iA_m, A_iA_l où A_m, A_l sont les deux sommets violets de $\mathcal{C}_{i-1}$.



Théorème 7.2.4 *L'algorithme incrémental calcule une triangulation de n points de $\mathbb{E}^2$ en temps $\theta(nlog(n))$.*

Preuve :

La complexité de l'étape i est θ(nombre de triangle ajoutés $+2$). En effet, comme $x(A_1) \leq \ldots \leq x(A_{i-1}) \leq x(A_i)$, le point A_{i-1} est nécessairement rouge par rapport à A_i.

Donc la complexité totale est θ(nombre de faces de $T + 2n$).

D'après le relation (1), $f = \theta(n)$.

Donc la complexité totale est $\theta(n\,log(n)) + \theta(n) = \theta(n\,log(n))$.

□

Corollaire 7.2.5 *L'algorithme incrémental calcule l' enveloppe convexe de n points de $\mathbb{E}^2$ en temps $\theta(nlog(n))$.*

7.2.2 Triangulation d'une région polygonale

On appelle *ligne polygonale* une suite de points $P = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ du plan. Elle est dite *fermée* si $A_n = A_1$. Elle est *fermée, simple* si pour $1 \leq i < j \leq n-1$, $A_i \neq A_j$ et pour tout $i \in [1, n]$,

$$X \in [A_i, A_{i+1}] \cap [A_j, A_{j+1}] \Rightarrow (i{+}1 = j \text{ et } X = A_j) \text{ ou } (j{+}1 = i \text{ et } X = A_i).$$

Dans cet énoncé les indices doivent être compris *modulo* n , le nombre de sommets de la ligne polygonale. On vérifiera que cette définition est cohérente avec celle fournie au §2.3. On note $C = \cup_{1\leq i\leq n}[A_i, A_{i+1}]$ l'' 'image " de P dans $\mathbb{E}^2$: on voit donc P comme une classe de paramétrages affines par morceaux de l'ensemble de points C.
On rappelle que, d' après le théorème de Jordan (th. 2.3.1), $\mathbb{E}^2 - C$ a deux composantes connexes, dont l'une (notée C^-) est non-bornée et l'autre (notée C^+) est bornée.

Théorème 7.2.6 *Soit $P = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ une ligne polygonale* fermée, simple *du plan, $C = \cup_{1\leq i\leq n}[A_i, A_{i+1}]$ et $\bar{C}^+$ l' adhérence de la région du plan intérieure à C (c'est la réunion de C^+ avec C). La région $\bar{C}^+$*

admet une triangulation dont l'ensemble des sommets est exactement $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$.

Preuve : Nous prouvons cette propriété par récurrence sur n.
Base : $n = 4$.
L' ensemble formé du triangle $\mathrm{conv}(\{A_1, A_2, A_3\})$ et de toutes ses faces est une triangulation.
Induction : $n \to n+1$.
Supposons que le théorème est vrai pour les lignes polygonales fermées simples à n points. Soit A_{i+1} un sommet de $\mathrm{conv}(\{A_1, \ldots, A_n\})$ et soit Δ une droite support de ce sommet.
Notons Δ^+ le demi-plan de frontière Δ contenant P.
Cas 1 : $\mathrm{conv}(\{A_i, A_{i+1}, A_{i+2}\}) \cap \mathcal{A} = \{A_i, A_{i+1}, A_{i+2}\}$.
Posons

$$P' = (A_1, A_2, \ldots, A_i, A_{i+2}, \ldots, A_n).$$

(Voir la figure 7.1).
L'hypothèse du cas entraine que $[A_i, A_{i+2}]$ ne recoupe $\cup_{j=1}^n [A_j, A_{j+1}]$ qu'en A_i et A_{i+2}. La ligne polygonale P' vérifie donc les hypothèses du théorème et elle a seulement n points. Par hypothèse de récurrence, $\bar{C'}^+$ est triangulable. Tous les sommets de P' (les A_j pour $j \neq i+1$) sont dans Δ^+. Donc la courbe C' est aussi incluse dans Δ^+ , d' où :

$$C' \cap \Delta = \emptyset.$$

La droite Δ est connexe et non-bornée, donc $\Delta \subseteq C'^-$, et , en particulier $A_{i+1} \in C'^-$. Par ailleurs l' hypothèse du cas entraine que les segments $[A_i, A_{i+1}]$, $[A_{i+1}, A_{i+2}]$ ne rencontrent C' qu'en A_i et A_{i+2}. Donc

$$\mathrm{conv}(\{A_i, A_{i+1}, A_{i+2}\}) \subseteq \overline{C'^-}.$$

En ajoutant à la triangulation de $\overline{C'^+}$, le triangle $\mathrm{conv}(\{A_i, A_{i+1}, A_{i+2}\})$ (et toutes ses faces), on obtient une triangulation de $\overline{C^+}$.
Cas 2 : Il existe un point $A_j \in \mathrm{conv}(\{A_i, A_{i+1}, A_{i+2}\}) \cap \mathcal{A} - \{A_i, A_{i+1}, A_{i+2}\}$.
On choisit A_j tel que $\mathrm{d}(A_{i+1}, A_j + \mathbb{R} \cdot \overrightarrow{A_i A_{i+2}})$ soit égal à

$$\min\{\mathrm{d}(A_{i+1}, X + \mathbb{R} \cdot \overrightarrow{A_i A_{i+2}}) \mid X \in \mathrm{conv}(\{A_i, A_{i+1}, A_{i+2}\}) \cap \mathcal{A} - \{A_i, A_{i+1}, A_{i+2}\}\}.$$

On cherche maintenant à décomposer la courbe C en deux courbes C_1, C_2 qui ont en commun le segment $[A_{i+1}, A_j]$ et sont chacune incluse dans l'

extérieur de l' autre. Notons Δ_j la droite $A_j + \mathbb{R} \cdot \overrightarrow{A_i A_{i+2}}$, et Δ_j^- le demi-plan de frontière Δ_j contenant A_i, A_{i+2}.Voir la figure 7.2.
Montrons que pour $k \in [1, n]$,

$$\begin{aligned} [A_{i+1}A_j] \cap [A_k A_{k+1}] &= \emptyset \text{ ou bien} \\ \text{est réduite à} \quad & \text{une extrémité commune aux deux segments } [A_{i+1}A_j], [A_k A_{k+1}]) \end{aligned} \tag{7.1}$$

Si $A_k \notin \mathrm{conv}(\{A_i, A_{i+1}, A_{i+2}\})$:
alors $[A_{i+1}A_j] \cap [A_k A_{k+1}] = \emptyset$.
Si $A_k, A_{k+1} \in \mathrm{conv}(\{A_i, A_{i+1}, A_{i+2}\}) - \{A_i, A_{i+1}, A_{i+2}\}$:
alors $A_k, A_{k+1} \in \overline{\Delta_j^-}$. Donc $[A_{i+1}A_j] \cap [A_k A_{k+1}] \subseteq \{A_j\}$.
Si $A_k, A_{k+1} \in \mathrm{conv}(\{A_i, A_{i+1}, A_{i+2}\}), A_k \in \{A_i, A_{i+1}, A_{i+2}\}, A_{k+1} \notin \{A_i, A_{i+1}, A_{i+2}\}$:
alors $[A_{i+1}A_j] \cap [A_k A_{k+1}] \subseteq \{A_{i+1}\}$ ou $[A_{i+1}A_j] \cap [A_k A_{k+1}] \subseteq \{A_j\}$
Si $A_k, A_{k+1} \in \mathrm{conv}(\{A_i, A_{i+1}, A_{i+2}\}), A_{k+1} \in \{A_i, A_{i+1}, A_{i+2}\}, A_k \notin \{A_i, A_{i+1}, A_{i+2}\}$:
idem cas précédent.
Si $A_k, A_{k+1} \in \{A_i, A_{i+1}, A_{i+2}\}$:
alors $[A_{i+1}A_j] \cap [A_k A_{k+1}] \subseteq \{A_{i+1}\}$. De plus, l' éventuel unique point de cette intersection ne peut être que l'une des extrémités de $[A_k, A_{k+1}]$ puisque la ligne polygonale de départ, P, est simple.
Considérons alors les lignes polygonales

$$P_1 = (A_{i+1}, A_{i+2}, \ldots, A_j, A_{i+1}) \text{ et } P_2 = (A_{i+1}, A_j, A_{j+1}, \ldots, A_i, A_{i+1}, A_j),$$

ainsi que leurs images C_1, C_2. Le sous-ensemble C_1 est connexe (puisqu'il est connexe par arcs). La propriété (7.1) entraine que $C_1 \cap C_2 = [A_{i+1}, A_j]$. Donc,

$$C_2 \subseteq \overline{C_1^\varepsilon}$$

pour un signe $\epsilon \in \{+, -\}$.
Notons $\overrightarrow{\Delta}_i$ la demi-droite $A_i + \mathbb{R}^+ \overrightarrow{A_i A_{i+1}}$. Comme Δ est support de l'enveloppe convexe de $\mathcal{A}$, on est sûr que $C_1 \subseteq \overline{\Delta^+}$, donc

$$A_{i+1} + \mathbb{R}^+ \cdot \overrightarrow{A_i A_{i+1}} \subseteq \bar{C_1}^-$$

car elle ne coupe C_1 qu'en un point, qui est son origine, et la composante connexe de $\mathbb{E}^2 - C_1$ qui contient $A_{i+1} + \mathbb{R}^+ \overrightarrow{A_i A_{i+1}}$ est non-bornée, c'est donc ${C_1}^-$.
Comme $A_j \in \mathrm{conv}(\{A_i, A_{i+1}, A_{i+2}\})$, les segments $[A_j, A_{i+1}]$ et $[A_{i+1}, A_{i+2}]$ se trouvent dans un même demi-plan de frontière $\langle A_i, A_{i+1} \rangle$. Donc la demi-droite $\overrightarrow{\Delta}_i$ coupe C_1 en un seul point, A_{i+1}, mais ne *traverse pas* C_1 en ce point. Il suit que

$$A_i + \mathbb{R}^+ \cdot \overrightarrow{A_i A_{i+1}} \subseteq \bar{C_1}^-.$$

La partie $]A_j, A_{j+1}] \cup [A_{j+1}, A_{j+2}] \cup \ldots \cup [A_i, A_{i+1}[$ a une intersection vide avec C_1 , est connexe et contient A_i qui appartient à ${C_1}^-$. Donc

$$]A_j, A_{j+1}] \cup [A_{j+1}, A_{j+2}] \cup \ldots \cup [A_i, A_{i+1}[\subseteq {C_1}^-,$$

et finalement

$$C_2 \subseteq \bar{C_1}^-. \tag{7.2}$$

Par hypothèse de récurrence chaque "intérieur" $\bar{C}_1^+$ (resp. $\bar{C}_2^+$) admet une triangulation $\mathcal{T}_1$ (resp. $\mathcal{T}_2$). La condition (7.2) assure que $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ est une triangulation de $\bar{C}^+$. $\square$

7.2.3 Triangulations contraintes

Théorème 7.2.7 *Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de points du plan. Tout ensemble maximal de segments joignant les points de $\mathcal{A}$ sans s'intersecter sauf en une extrémité commune, constitue l'ensemble des arêtes d'une triangulation de $\mathcal{A}$, et réciproquement.*

Preuve : Soit $\mathcal{E}$ un ensemble maximal de segments joignant le points de $\mathcal{A}$ sans s'intersecter sauf en une extrémité commune. L'ensemble $\mathcal{E}$ contient les arêtes de conv$(\mathcal{A})$: une telle arête ne peut couper un segment de $\mathcal{E}$ qu'en l'une de ses extrémités, donc en un point de $\mathcal{A}$, donc en une extrémité commune ; donc, par maximalité, une telle arête $\in \mathcal{E}$.
Considérons la décomposition en composantes connexes :

$$\mathrm{conv}(\mathcal{A}) - \bigcup_{e \in \mathcal{E}} e = \bigcup_{i=1}^{p} D_i.$$

Chaque composante D_i a une frontière de la forme :

$$\partial D_i = S_i \cup \bigcup_{j=1}^{s_i} S_{i,j} \cup \bigcup_{j=1}^{t_i} T_{i,j}$$

et se décompose en

$$D_i = S_i^- - \bigcup_{j=1}^{s_i} \overline{S_{i,j}^-} - \bigcup_{j=1}^{t_i} T_{i,j},$$

où S_i et les $S_{i,j}$ sont des courbes polygonales simples et les $T_{i,j}$ sont des arbres. Les $S_i, S_{i,j}, T_{i,j}$ sont les composantes 2-connexes du graphe formé par l'ensemble des segments inclus dans $\overline{D_i}$ (voir figure 7.3). Montrons que $\overline{D_i}$ est un triangle et que $s_i = t_i = 0$.
Considérons la ligne polygonale fermée $P = (B_1, B_2, \ldots, B_n)$ (non-simple en général) obtenue en insérant dans la ligne polygonale S_i, en chaque point B, le "contour extérieur" de l'union des composantes 2-connexes reliées au point B.(On note $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_n, B_{n+1}, \ldots, B_{n+m}\}$ l'ensemble de points $\overline{D_i} \cap \mathcal{A}$. Soit B_{i+1} un sommet de conv$(\{B_1, \ldots, B_n\})$.
Cas 1 : conv$(\{B_i, B_{i+1}, B_{i+2}\}) \cap \mathcal{B} = \{B_i, B_{i+1}, B_{i+2}\}$.
Si S_i est un triangle, nous sommes dans le cas où $s_i = t_i = 0$.
Si S_i n'est pas un triangle, le segment $[B_i, B_{i+2}]$ n'appartient pas à $\mathcal{E}$, sinon $\overset{\circ}{\text{conv}}(\{B_i, B_{i+1}, B_{i+2}\})$ serait un ouvert-fermé de D_i, distinct de D_i. Mais $[B_i, B_{i+2}]$ ne rencontre aucun autre segment de $\mathcal{E}$ (ailleurs qu'en ses extrémités). Ceci est impossible puisque $\mathcal{E}$ est maximal.
Cas 2 : Il existe un point $B_j \in$ conv$(\{B_i, B_{i+1}, B_{i+2}\}) \cap \mathcal{B} - \{B_i, B_{i+1}, B_{i+2}\}$.
On choisit B_j tel que $\mathrm{d}(B_{i+1}, B_j + \mathbb{R} \cdot \overrightarrow{B_i B_{i+2}})$ soit égal à

$$\min\{\mathrm{d}(B_{i+1}, X + \mathbb{R} \cdot \overrightarrow{B_i B_{i+2}}) \mid X \in \text{conv}(\{B_i, B_{i+1}, B_{i+2}\}) \cap \mathcal{B} - \{B_i, B_{i+1}, B_{i+2}\}).$$

De nouveau, le segment $[B_i, B_{i+2}]$ n'appartient pas à $\mathcal{E}$ et ne rencontre aucun autre segment de $\mathcal{E}$ (ailleurs qu'en ses extrémités). Ce cas est impossible puisque $\mathcal{E}$ est maximal.
Réciproque : Soit $\mathcal{T}$ une triangulation de $\mathcal{A}$, soit $\mathcal{E} = \mathcal{F}_1(\mathcal{T})$ l'ensemble des arêtes de $\mathcal{T}$. Alors $\mathcal{E}$ est un ensemble de segments qui ne s'intersectent qu'en leurs extrémités (d'après la définition de la notion de complexe).
Montrons maintenant que cet ensemble $\mathcal{E}$ est *maximal* pour l' inclusion.
Soient $A, B \in \mathcal{A}$. Il existe des faces $F, G \in \mathcal{F}_2(\mathcal{T})$ telles que $A \in F, B \in G$.
Cas 1 : $A, B \in F$ ou $A, B \in G$.
Alors $[A, B] \in \mathcal{F}_1(\mathcal{T})$.
Cas 2 : $A \in F - G$ et $B \in G - F$.
Le segment $[A, B]$ traverse donc la frontière de F en un point X tel que

$$A \neq X, \quad [A, X] \subseteq F \text{ et } X \in \partial F \cap \partial F'$$

où $F' \in \mathcal{F}_2(\mathcal{T})$.
Comme $X \in F, X \neq B$. Finalement X est un point de $[A, B] - \{A, B\}$ qui appartient à une 1-face de F', donc à un élément de $\mathcal{E}$. Donc $[A, B]$ ne peut être ajouté à $\mathcal{E}$ sans rompre la propriété de non-intersection. Finalement : $\mathcal{E}$ est maximal. $\square$

Corollaire 7.2.8 *Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de n points du plan , en position générale (avec $n \geq 3$) et $\mathcal{T}_0$ un 2-complexe simplicial à sommets dans $\mathcal{A}$.*
Il existe un algorithme "glouton", calculant une triangulation $\mathcal{T}$ de $\mathcal{A}$ telle que $\mathcal{T}_0 \subseteq \mathcal{T}$. Sa complexité en temps est $\theta(n^3)$.

Preuve : $\mathcal{E}$:= arêtes de T_0 ;
Pour chaque paire (A_i, A_j) de points de $\mathcal{A}$,
0 - Si $(A_i, A_j) \in \mathcal{E}$, A_iA_j est marquée 1.
1 - On teste si A_iA_j intersecte l'une des arêtes de $\mathcal{E}$
2 - si oui, A_iA_j est marqué 0
si non, A_iA_j est marqué 1 et elle est ajoutée à $\mathcal{E}$
$\frac{n(n+1)}{2}$ paires à traiter et au plus $3(n-1)$ arêtes dans $\mathcal{E} \rightarrow \theta(n^3)$. □

7.3 Triangulations en dimension $d \geq 3$

Traité dans le problème de Janvier 2002 (annales).

7.4 Complexe de Voronoï en dimension 2

Soit $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{E}^2$ un ensemble fini de n points distincts ($n \geq 3$) :
$\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Pour chaque entier $i \in [1, n]$, on pose

$$\mathrm{V}(A_i) = \{p \in \mathbb{E}^2 \mid \forall j \in [1, n], \mathrm{d}(p, A_i) \leq \mathrm{d}(p, A_j)\},$$

où d dénote la distance euclidienne.
Le *complexe de Voronoï* de $\mathcal{A}$ est alors l'ensemble de polygones :

$$\mathcal{V}(\mathcal{A}) = \{\mathrm{V}(A_i) \mid 1 \leq i \leq n\},$$

auxquels on adjoint toutes leurs faces.
Notons $D(A_i, A_j)$ la médiatrice de A_i, A_j et $H(A_i, A_j)$ le demi-plan de frontière $D(A_i, A_j)$ et contenant A_i (pour $i, j \in [1, n], i \neq j$).

Fait 7.4.1 $\mathrm{V}(A_i) = \bigcap_{j \neq i} H(A_i, A_j)$.

Toute arête est donc de la forme :

$$D(A_i, A_j) \cap \bigcap_{(k,l) \neq (i,j)} H(A_k, A_l).$$

Une arête est donc un segment fermé ou une demi-droite fermée ou une droite (impossible si $n \geq 3$), portée par une mdiatrice $D(A_i, A_j)$.

On suppose désormais que $\mathcal{A}$ est en position :
-*affine-générale* : il n'existe aucun 3-uplet de points distincts de $\mathcal{A}$, (A, B, C), qui soient alignés
et aussi
- L_2-*générale* : il n'existe aucun 4-uplet de points distincts de $\mathcal{A}$, (A, B, C, D), qui soient cocycliques.

Fait 7.4.2 *Par tout sommet de $\mathcal{V}(\mathcal{A})$ passent exactement trois arêtes de $\mathcal{V}(\mathcal{A})$.*

Fait 7.4.3 *$\mathcal{V}(\mathcal{A})$ est un complexe cellulaires de dimension 2.*

Notons n_i le nombre de faces de dimension i de $\mathcal{V}(\mathcal{A})$.

Fait 7.4.4

$$n_1 \leq 3(n_2 - 1); \;\; n_0 \leq 2(n_2 - 1).$$

(On utilise la relation d' Euler et le fait 7.4.2).

Fait 7.4.5 *Soit v un sommet de $\mathcal{V}(\mathcal{A})$, soit $C(v)$ le cercle centré en v passant par les trois points de $\mathcal{A}$ et soit $D(v)$ le disque bordé par $C(v)$. L'intérieur de $D(v)$ ne contient aucun point de $\mathcal{A}$.*

Fait 7.4.6 *Si A_j est un plus proche voisin de A_i dans $\mathcal{A}$, alors la médiatrice de (A_i, A_j) supporte une arête du polygone* $\mathrm{V}(A_i)$.

Indication : On considère l'intersection u du segment $[A_i, A_j]$ avec la frontière de $\mathrm{V}(A_i)$. Si u n'est pas le milieu v de $[A_i, A_j]$, on aboutit à une contradiction. (Voir la figure 7.4).

Lemme 7.4.7 *Soit $X \in \mathrm{conv}(\mathcal{A})$ (l'enveloppe convexe de $\mathcal{A}$). Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) X n'est pas un sommet de $\mathrm{conv}(\mathcal{A})$;
(ii) il existe trois points distincts $A, B, C \in \mathcal{A}$ tels que,
$X \in \mathrm{conv}(\{A, B, C\}) - \{A, B, C\}$;
(iii) il existe $k \geq 3$ points distincts $B_1, B_2, \ldots, B_k \in \mathcal{A}$ tels que,
$X \in \mathrm{conv}(\{B_1, B_2, \ldots, B_k\}) - \{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$;

Lemme 7.4.8 *Si A_i n'est pas un sommet de $\mathrm{conv}(\mathcal{A})$, alors $\mathrm{V}(A_i)$ est bornée.*

Indication : Si A_i n'est pas un sommet, par la condition (ii) de la qu.5, A_i est un élément d'un $\mathrm{conv}(\{q_1, q_2, q_3\}) - \{q_1, q_2, q_3\}$. Soient $C_{1,2}, C_{1,3}, C_{2,2}$ les cercles passant respectivement par (A_i, q_1, q_2), (A_i, q_1, q_3),(A_i, q_2, q_3).Notons $A_{1,2}$ l'arc du cercle $C_{1,2}$ d'extrémités q_1, q_2, ne contenant pas A_i. Tout point u de $C_{1,2}$ est plus proche de q_1 ou q_2 que de A_i. On en déduit que $\mathrm{V}(A_i)$ est incluse dans l'union des disques bordés par $C_{1,2}, C_{1,3}, C_{2,3}$. (Voir la figure 7.5).

Lemme 7.4.9 *Si $\mathrm{V}(A_i)$ est bornée, alors A_i n'est pas un sommet de $\mathrm{conv}(\mathcal{A})$.*

Indication : On considère les points $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$, $k \geq 3$, dont les cellules $\mathrm{V}(A_{i_j})$ ont une intersection non-vide avec $\mathrm{V}(A_i)$.

7.5 Complexe de Delaunay en dimension $d \geq 1$

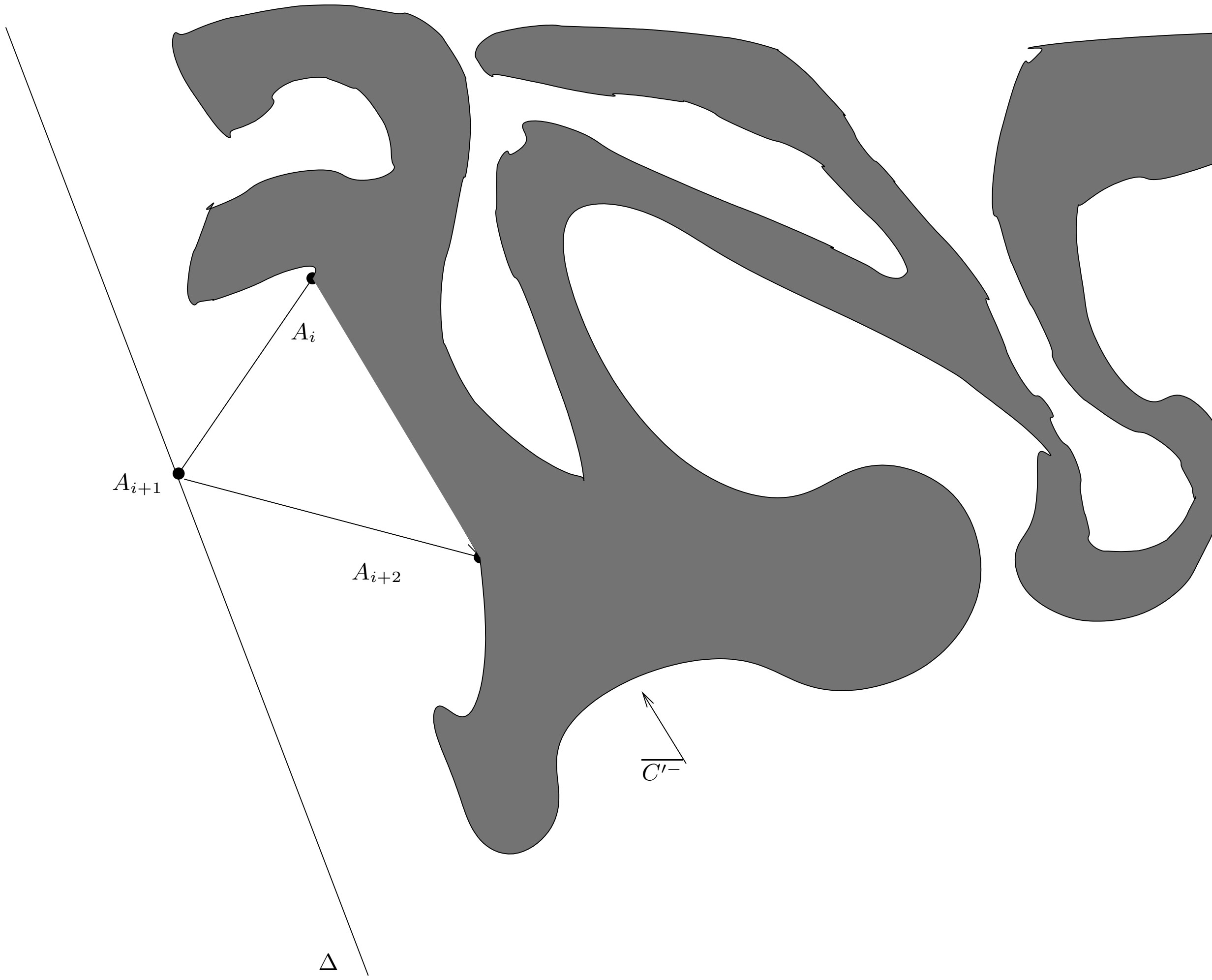


FIG. 7.1 – Triangulation de C : cas 1.

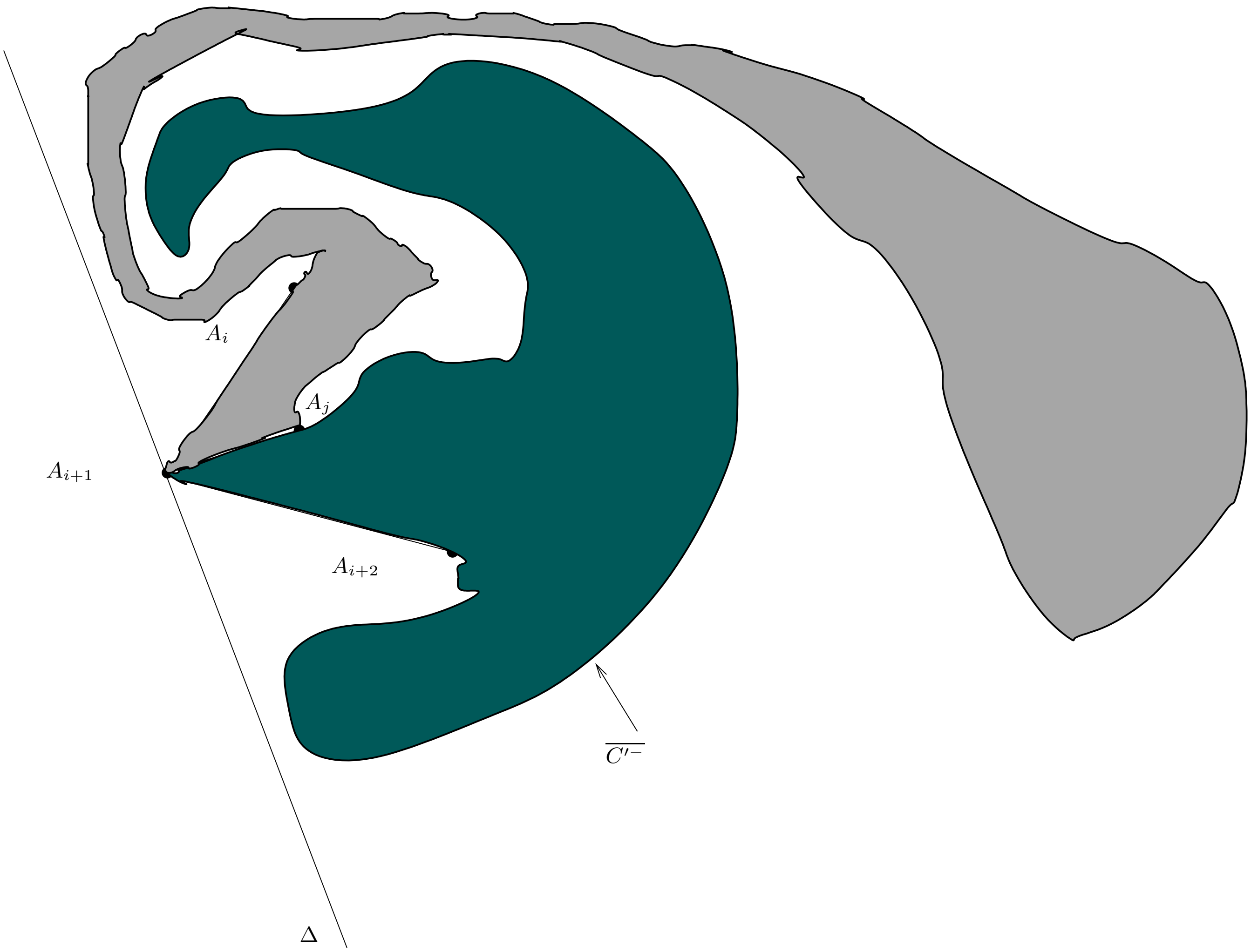


FIG. 7.2 – Triangulation de C : cas 2.

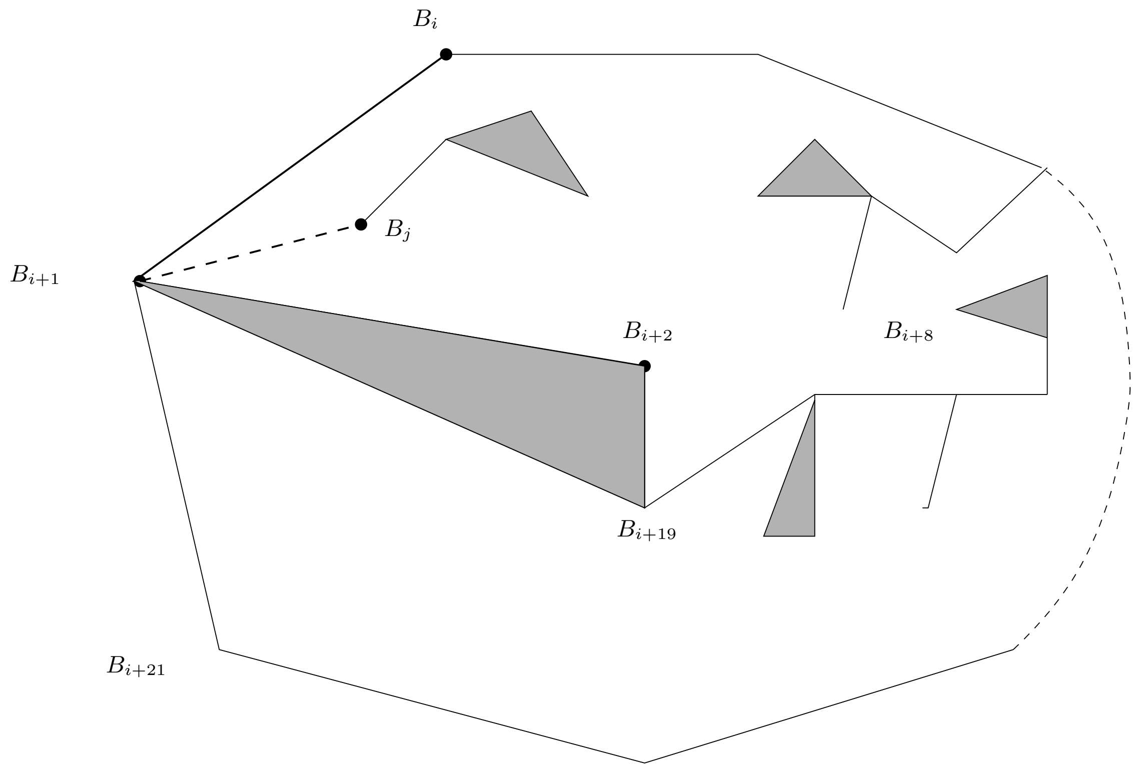


FIG. 7.3 – Composante D_i.

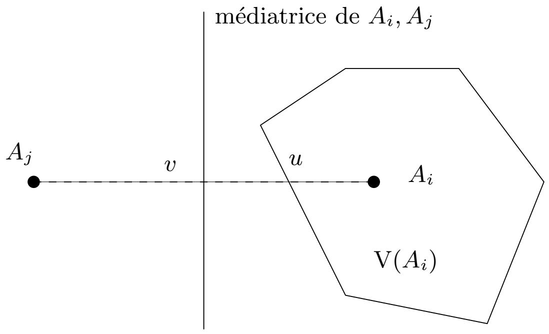


FIG. 7.4 – lemme 7.4.6

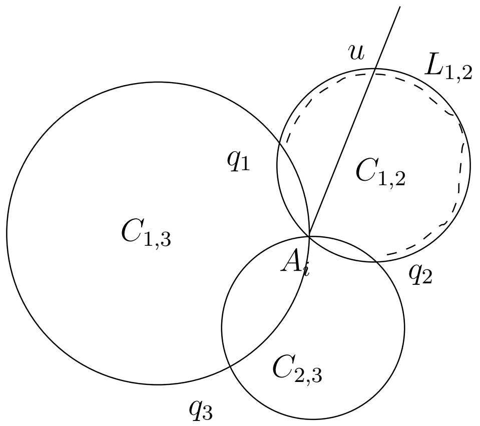


FIG. 7.5 – cellules bornées

Chapitre 8

Géométrie non-euclidiennes en dimension 2

8.1 La sphère et le plan

Nous définissions la projection séréographique $\mathrm{ps} : \mathrm{S}(2) \to \hat{\mathbb{C}}$.
Définition géométrique.
Formules analytiques pour ps et ps^{-1}.

Théorème 8.1.1 *La projection stéréographique* $\mathrm{ps} : \mathrm{S}(2) \to \hat{\mathbb{C}}$ *est un difféomorphisme de classe* C^∞*, qui est conforme i.e. qui conserve les angles.*

Distance sphérique exprimée dans $\hat{\mathbb{C}}$ (première forme).

8.2 Géométrie inversive

Homographies et anti-homographies.
On note $\mathrm{H}^+(\hat{\mathbb{C}})$ le groupe des homographies, $\mathrm{H}^-(\hat{\mathbb{C}})$ l'ensemble des anti-homographies et $\mathrm{H}(\hat{\mathbb{C}})$ le groupe des homographies ou anti-homographies.

Les inversions.
Conservation des angles
Conservation des droites-cercles.
Conservation du bi-rapport.

Théorème 8.2.1 *Tout homographie (resp. anti-homographie)*

1. *conserve les angles orientés (resp. les angles)*
2. *conserve globalement l'ensmble des droites-cercles*
3. *conserve le bi-rapport (resp. transforme le bi-rapport en son conjugué).*

Action transitive des homographies sur les triplets.
Action simplement transitive des applications conformes sur les triplets.

Les isomorphismes conformes sont exactement les homographies.

Théorème 8.2.2 *Soit* $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ *. les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. f *est un difféomorphisme de classe* C^∞ *qui conserve les angles orientés*
2. f *est un difféomorphisme de classe* C^1 *qui conserve les angles orientés*
3. f *est une homographie*

Algorithmes dans le modèle RAM$(+, -, \cdot, /, \sqrt{})$ versus constructions avec la règle et le compas.

8.3 Géométrie sphérique

Rotations sphériques.Expressions dans $\hat{\mathbb{C}}$.
Groupe des isométries sphériques, vu comme sous-groupe des homographies
.
Distance (seconde forme).
Distance infinitésimale.
Géodésique passant par deux points.
Médiatrice de deux points.
Triangles sphériques :

- l'aire à partir des 3 angles
- un nouveau cas d' egalité des triangles (AAA)
- tout application conservant les géodésiques et les angles est une isométrie.

8.4 Géométrie hyperbolique

Soit $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.
On définit sur $\mathbb{D}^2$ une distance à partir de la forme :

$$ds = \frac{2|dz|}{1 - |z|^2}.$$

Groupe des des homographies qui conservent $\mathbb{D}^2$.
Groupe des isométries de $\mathbb{D}^2$.
Distance (seconde forme).
Géodésique passant par deux points.
Médiatrice de deux points.
Triangles hyperboliques :
- l'aire à partir des 3 angles
- un nouveau cas d' egalité des triangles (AAA)
- tout application conservant les géodésiques et les angles est une isométrie.

Bibliographie

[Ber90] Marcel Berger. *Géométrie (t1 et t2).* Nathan, 1990.

[BY95] Jean-Daniel Boissonat and Mariette Yvinec. *Géométrie algorithmique.* Ediscience International, 1995.

[GO97] Jacob E. Goodman and Joseph O'Rourke. *Handbook of Discrete and Computational Geometry.* CRC Press, 1997.

[Kar84] N. Karmarkar. A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica, 4*, pages 373–395, 1984.

[Kha80] L.G. Khachian. Polynomial-time algorithm in linear programming. *U.S.S.R Comput. Math. and Math. Phys. 20*, pages 53–72, 1980.

[Lak84] Imre Lakatos. *Preuves et Réfutations.* Hermann, 1984.

[PS85] Franco P. Preparata and Michael Ian Shamos. *Computational Geometry, an introduction.* Springer, Texts and Monographs in Computer Science, 1985.

[Sak84] Michel Sakarovitch. *Optimisation combinatoire.* Hermann, enseignement des sciences, 1984.

[Zie98] Günter M. Ziegler. *Lectures on polytopes.* Springer, graduate Texts in Mathematics, 1998.