

Information Quantique

Examen- 19 Mai 2014

Durée : 2H

Documents autorisés : tous documents autorisés.

Indications : les trois exercices sont indépendants.

Notation : le barème est indicatif; la note finale est $\min(20, \text{note-ex1} + \text{note-ex2} + \text{note-ex3})$.

Exercice 1 (/15 pts)

Intrication, corrélation.

Soient $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1$ deux copies de l'espace de Hilbert de dimension 2. On fixe une base $(|0\rangle, |1\rangle)$ de \mathcal{B}_0 , $(|0'\rangle, |1'\rangle)$ de \mathcal{B}_1 . On utilise l'abréviation $|ij\rangle$ pour le vecteur $|i\rangle \otimes |j'\rangle$ de $\mathcal{B}_0 \otimes \mathcal{B}_1$.

On rappelle qu'un vecteur (ou "état") $|\Phi\rangle$ de $\mathcal{B}_0 \otimes \mathcal{B}_1$ est dit *factorisable* s'il existe des vecteurs $|u\rangle \in \mathcal{B}_0, |v\rangle \in \mathcal{B}_1$ tels que

$$|\Phi\rangle = |u\rangle \otimes |v\rangle.$$

Un vecteur est dit *intriqué* ssi il n'est pas factorisable.

1- Parmi les vecteurs suivants, lesquels sont factorisables (resp. intriqués) ?

$$|\Phi_1\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \quad |\Phi_2\rangle := \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle),$$

$$|\Phi_3\rangle := \frac{1}{\sqrt{3}}(|00\rangle + |01\rangle + |11\rangle), \quad |\Phi_4\rangle := \frac{1}{\sqrt{5}}(|00\rangle + 2|11\rangle).$$

2- Montrer que, un vecteur de coordonnées $(t_{i,j})_{(i,j) \in [1,2] \times [1,2]}$ dans la base canonique $(|ij\rangle)_{(i,j) \in [1,2] \times [1,2]}$ est factorisable ssi la matrice $\begin{pmatrix} t_{0,0} & t_{0,1} \\ t_{1,0} & t_{1,1} \end{pmatrix}$ est de rang 0 ou 1. Retrouver ainsi les résultats de la question 1.

3- Soient U_0, U_1 des transformation unitaires, de déterminant 1, de \mathcal{B}_0 (resp. \mathcal{B}_1) et $|\Phi\rangle$ un vecteur de $\mathcal{B}_0 \otimes \mathcal{B}_1$. Montrer que $(U_0 \otimes U_1)|\Phi\rangle$ est factorisable ssi $|\Phi\rangle$ est factorisable.

4- Montrer que, si $|\Phi\rangle$ et $|\Psi\rangle$ sont factorisables et de norme 1, alors il existe des transformation unitaires, de déterminant 1, U_0, U_1 telles que

$$(U_0 \otimes U_1)|\Phi\rangle = |\Psi\rangle.$$

5- On rappelle que les matrices des transformations unitaires de déterminant 1, de dimension 2 sont les matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

où α, β sont des nombres complexes tels que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Existe-il des transformation unitaires, de déterminant 1, U_0, U_1 telles que

$$(U_0 \otimes U_1) |\Phi_1\rangle = |\Phi_4\rangle?$$

Dans les questions qui suivent on suppose que les espaces $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1$ représentent des particules physiques.

6- Soient \mathcal{X} (resp. \mathcal{Y}) des observables de la particule 0 (resp. 1) et $|\Phi\rangle \in \mathcal{B}_0 \otimes \mathcal{B}_1$ un état du système formé de ces deux particules.

Les variables aléatoires \mathcal{X} (resp. \mathcal{Y}) ont des lois définies par des opérateurs hermitiens X (sur \mathcal{B}_0) et Y (sur \mathcal{B}_1).

On s'intéresse à la loi conjointe de $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. On rappelle que, dans l'état $|\Phi\rangle$:

$$\Pr(\{\mathcal{X} = \lambda \text{ et } \mathcal{Y} = \mu\}) = \|\text{pr}_{\lambda, \mu} |\Phi\rangle\|^2$$

où $\text{pr}_{\lambda, \mu}$ est la projection orthogonale sur le sous-espace propre de $X \otimes Y$ associé à la valeur $\lambda \cdot \mu$ (le sous-espace nul si $\lambda \cdot \mu$ n'est pas valeur propre).

6.1 Montrer que, si $|\Phi\rangle$ est un état factorisable, alors les variables \mathcal{X} (resp. \mathcal{Y}) sont indépendantes.

6.2 En déduire que, si $|\Phi\rangle$ est un état factorisable, alors les variables \mathcal{X} (resp. \mathcal{Y}) ont une covariance nulle.

On rappelle que, pour toute v.a. complexe \mathcal{Z} , $\text{Var}(\mathcal{Z}) := \mathbb{E}(|\mathcal{Z} - m_{\mathcal{Z}}|^2)$ où $m_{\mathcal{Z}} = \mathbb{E}(\mathcal{Z})$ est la moyenne de \mathcal{Z} . La covariance de \mathcal{X}, \mathcal{Y} est définie par :

$$\text{Covar}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \mathbb{E}(\overline{(\mathcal{X} - m_{\mathcal{X}})} \cdot (\mathcal{Y} - m_{\mathcal{Y}}))$$

7- Soient X, Y les opérateurs hermitiens de matrices

$$M_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, M_Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique de \mathcal{B}_0 (resp. \mathcal{B}_1) et \mathcal{X}, \mathcal{Y} les variables aléatoires associées. On se place dans l'état $|\Phi_1\rangle$ (état de Bell)

7.1 Calculer $\mathbb{E}(\mathcal{X}), \mathbb{E}(\mathcal{Y}), \mathbb{E}(|\mathcal{X}|^2), \mathbb{E}(|\mathcal{Y}|^2)$.

La *corrélation* de $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ est définie comme le nombre :

$$\frac{\text{Covar}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}{\sqrt{\text{Var}(\mathcal{X})\text{Var}(\mathcal{Y})}}$$

7.2 Montrer que la corrélation de $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ vaut 1.

8- Reprendre la question 7, cette fois-ci avec les opérateurs X, Y associés aux matrices

$$M_X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, M_Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

et l'état $|\Phi_4\rangle$.

9- Donner une troisième preuve du fait que $|\Phi_1\rangle$ (resp. $|\Phi_4\rangle$) est intriqué.

Exercice 2(/10 pts)

Borne de Tsirelson.

Nous approfondissons le “jeu de Bell”, vu au chapitre 5 du cours.

Nous cherchons à connaître le gain *maximal* de l'équipe AB lorsqu'elle utilise la stratégie suivante : A et B partagent un vecteur formé de deux qbits : $|\psi\rangle \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$. A peut agir sur le premier qbit, B peut agir sur le second qbit et

- pour tout $r \in \{0, 1\}$, A mesure son qbit avec l'observable A_r , puis répond à R le résultat a de cette mesure

- pour tout $s \in \{0, 1\}$, B mesure son qbit avec l'observable B_s , puis répond à R le résultat b de cette mesure.

Les observables (i.e. opérateurs hermitiens) utilisées sont :

$$A_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} (= s_0); \quad A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (= s_{\pi/4});$$

$$B_0 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} (= s_{\pi/8}); \quad B_1 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} (= s_{-\pi/8}).$$

On a établi dans le cours que le gain moyen de AB, avec cette stratégie, est :

$$G_\psi = \frac{1}{4} \langle \psi | A_0 \otimes B_0 + A_0 \otimes B_1 + A_1 \otimes B_0 - A_1 \otimes B_1 | \psi \rangle. \quad (1)$$

On rappelle que la norme $\|M\|$ d'une application linéaire $M : E \rightarrow E$ d'un e.v. normé E , de dim. finie (sur le corps \mathbb{C}) dans lui-même, est définie par :

$$\|M\| := \sup\{\|Mu\| \mid u \in E, \|u\| = 1\}.$$

1- Vérifier que tout opérateur unitaire U d'un espace de Hilbert est de norme 1.

2- Que valent les normes des opérateurs A_k, B_k ($k \in \{0, 1\}$) ?

3- Vérifier que si M, N sont des application linéaires de E dans E , alors

$$\|M \cdot N\| \leq \|M\| \cdot \|N\|, \quad \|M + N\| \leq \|M\| + \|N\|.$$

4- Montrer que, pour tout $|\psi\rangle \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$:

$$4G_\psi \leq \| |\Phi_0\rangle + |\Phi_1\rangle \| + \| |\Phi_0\rangle - |\Phi_1\rangle \| \quad (2)$$

où, pour tout $k \in \{0, 1\}$, $|\Phi_k\rangle := (\mathbf{I} \otimes B_k) |\psi\rangle$.

5- Montrer que le membre droit de l'inégalité (2) est majoré par :

$$\sqrt{2 + 2\mathcal{R}(\langle \Phi_0 | \Phi_1 \rangle)} + \sqrt{2 - 2\mathcal{R}(\langle \Phi_0 | \Phi_1 \rangle)}$$

6- Étudier la fonction $x \mapsto \sqrt{2 + 2x} + \sqrt{2 - 2x}$ pour $x \in [-1, +1]$. Quelle est sa valeur maximale ?

7-

7.1 Montrer que la valeur maximale de G_ψ , pour tous les vecteurs $|\psi\rangle \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$, vaut $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7.2 Quelle conclusion peut-on en tirer concernant le jeu de Bell ?

Exercice 3 (/15 pts)

Transformation de Fourier quantique.

Dans tout l'exercice on fixe un entier $n \geq 0$ et on note $N := 2^n$.

1- On considère le nombre complexe $\omega := e^{\frac{2i\pi}{N}}$. Vérifier que $\omega^N = 1$.

2- Soit m un nombre entier tel que $0 < m < N$.

2.1 Vérifier que $\omega^m \neq 1$ et que $(\omega^m)^N = 1$.

2.2 Montrer que $\sum_{j=0}^{N-1} (\omega^m)^j = 0$.

Indication : Utiliser la factorisation : $X^N - 1 = (X - 1)(\sum_{j=0}^{N-1} X^j)$.

2.3- Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert de dimension N et $(e_j)_{j \in [0, N-1]}$ une base orthonormée de \mathcal{H} .

Soit $\mathcal{F} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ l'application linéaire définie par :

$$\forall j \in [0, N - 1], \mathcal{F}(e_j) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} (\omega^{kj}) e_k. \quad (3)$$

(L'exposant de ω dans (3) est le produit, dans \mathbb{N} , des deux entiers k et j).

Montrer que \mathcal{F} est unitaire.

3- On rappelle que \mathcal{B} est l'espace de Hilbert de dimension 2, \mathbb{C}^2 , et que $(|0\rangle, |1\rangle)$ est sa base canonique, qui est orthonormée.

Vérifier que $\mathcal{B}^{\otimes n}$ est un espace de Hilbert de dimension N .

4- Soit j un entier de $[0, N - 1]$ tel que

$$j = j_1 2^{n-1} + j_2 2^{n-2} + \dots + j_\ell 2^{n-\ell} + \dots + j_n 2^0. \quad (4)$$

On définit alors le vecteur de $\mathcal{B}^{\otimes n}$:

$$|j\rangle := |j_1\rangle \otimes |j_2\rangle \dots \otimes |j_\ell\rangle \otimes \dots \otimes |j_n\rangle \quad (5)$$

parfois aussi dénoté par $|j_1 j_2 \dots j_\ell \dots j_n\rangle$.

N.B. le symbole $|j_\ell\rangle$, dans le membre droit de (5), dénote le vecteur de la base canonique de la ℓ -ième copie de \mathcal{B} ; le symbole $|j\rangle$, dans le membre gauche, dénote un vecteur de $\mathcal{B}^{\otimes n}$ (même si $j = 0$ ou $j = 1$!).

Montrer que $(|j\rangle)_{j \in [0, N-1]}$ est une base orthonormée de $\mathcal{B}^{\otimes n}$.

On applique maintenant les définitions et résultats des questions 1-2 à l'espace $\mathcal{H} = \mathcal{B}^{\otimes n}$ et à la base $(|j\rangle)_{j \in [0, N-1]}$. L'application \mathcal{F} est alors nommée "transformation de Fourier quantique" et on cherche à la calculer par un *circuit quantique*.

On définit les portes quantiques R_k , ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) à un qbit, par :

$$R_k := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2i\pi/2^k} \end{pmatrix}$$

5- vérifier que $R_0 = I$. Calculer explicitement R_1, R_2, R_3 .

On définit la porte "contrôlée", à deux qubits, cR_k , par :

$$\begin{aligned} cR_k |x_1 x_2\rangle &= |x_1\rangle \otimes |x_2\rangle \quad (\text{si } x_2 = 0) \\ &= R_k |x_1\rangle \otimes |x_2\rangle \quad (\text{si } x_2 = 1) \end{aligned}$$

6- Montrer que :

$$\mathcal{F}|j\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \prod_{\ell=1}^n (|0\rangle + e^{2i\pi \frac{j}{2^\ell}} |1\rangle)$$

Dans la ℓ -ième parenthèse, $|0\rangle, |1\rangle$ désignent les deux états du ℓ -ième qubit. Avec les notations de (4), pour tout $p \in [1, n]$, on note

$$0.j_1 j_2 \dots j_p = j_1/2 + j_2/2^2 + \dots + j_p/2^p.$$

7- Montrer que :

$$e^{2i\pi \frac{j}{2^\ell}} = e^{2i\pi 0.j_{n-\ell+1} j_{n-\ell+2} \dots j_n}$$

par exemple :

$$\begin{aligned} e^{2i\pi \frac{j}{2^\ell}} &= e^{2i\pi 0.j_n} && \text{pour } \ell = 1 \\ &= e^{2i\pi 0.j_{n-1} j_n} && \text{pour } \ell = 2 \\ &= e^{2i\pi 0.j_1 j_2 \dots j_n} && \text{pour } \ell = n \end{aligned}$$

8- En déduire que :

$$\mathcal{F} |j\rangle = \frac{1}{2^{n/2}} (|0\rangle + e^{2i\pi 0 \cdot j_n} |1\rangle) \otimes (|0\rangle + e^{2i\pi 0 \cdot j_{n-1} j_n} |1\rangle) \otimes \dots \otimes (|0\rangle + e^{2i\pi 0 \cdot j_1 j_2 \dots j_n} |1\rangle) \quad (6)$$

On propose le circuit de la figure 1.

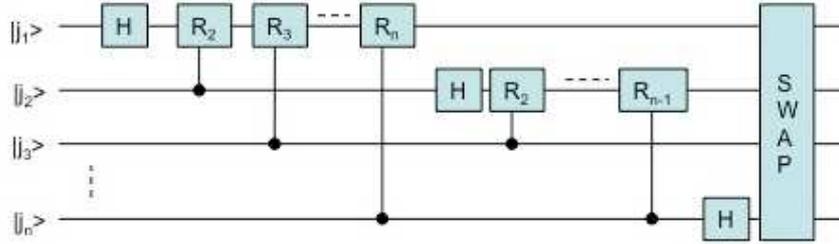


FIGURE 1 – Circuit pour la TFQ.

9- Montrer que l'action de la porte de Hadamard sur le premier qubit peut s'écrire

$$|j_1\rangle \xrightarrow{H} \frac{1}{\sqrt{2}} [|0\rangle + e^{2i\pi 0 \cdot j_1} |1\rangle] .$$

10- Montrer que l'action de la porte cR_2 (c'est le qubit $|j_2\rangle$ qui contrôle) sur le résultat a pour effet

$$|j_1 j_2\rangle \xrightarrow{H \otimes I} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + e^{2i\pi 0 \cdot j_1} |1\rangle) \otimes |j_2\rangle \xrightarrow{cR_2} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + e^{2i\pi 0 \cdot j_1 j_2} |1\rangle) \otimes |j_2\rangle$$

11- En déduire que l'application successive des portes $cR_3 \dots cR_n$ conduit à

$$|j_1 j_2 j_3 \dots j_n\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + e^{2i\pi 0 \cdot j_1 j_2 \dots j_n} |1\rangle) \otimes |j_2 j_3 \dots j_n\rangle$$

qui est le dernier terme du membre droit de (6).

12- Que donne la succession de portes agissant sur le deuxième qubit $|j_2\rangle$?

13- Le circuit comporte ainsi une succession de portes agissant sur le troisième qubit, le quatrième, etc, et la dernière succession de portes agit sur le n-ième qubit par H seulement (voir figure 1). Une fois que tous les qubits ont été traités l'état obtenu coïncide-t-il avec le membre droit de l'équation (6) ? Quelle opération faut-il réaliser pour obtenir $\mathcal{F} |j\rangle$? (i.e. comment doit-on interpréter le circuit SWAP à n qubits de la figure 1 ?).