Université Bordeaux 1
Mastère d'Informatique 1, 2008/2009

Modèles de Calcul : corrigé du CC 3

Énumérations-Complexités P,NP

Exercice 3.1 [5 points]
On suppose que f est une fonction calculable totale $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et

$$L = \{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}. \tag{1}$$

1- On considère le problème :
Donnée : $n \in \mathbb{N}$ **Question** : $n \in L$?
Il est résolu par l'algorithme suivant :

```
res:= 0; k := 0;
tantque (k <= n) faire
    si f(k) = n alors res := 1
retourner (res);
```

Dans cet algorithme, l'appel de f sur chaque argument k se termine car f est supposée totale.
2- Soit L donnée par la formule (1) où f est calculable totale.
Définissons une fonction $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par

$$a(0) := 0; \;\; a(n+1) := \min\{\mathrm{x} > \mathrm{a(n)} \mid \mathrm{f(x)} > \mathrm{f(a(n))}\}$$

puis une fonction $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par

$$g(n) := f(a(n)).$$

Comme f est calculable, a et g sont calculables. D'autre part, $g(n+1) = f(a(n+1))$ et par définition de a, $f(a(n+1) > f(a(n)) = g(n)$, donc $g(n+1) > g(n)$. La fonction g est totale, calculable, strictement croissante. Donc, par la question 1, le langage $L' = \{g(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est décidable. Par ailleurs $\mathrm{Im(g)} \subseteq \mathrm{Im(f)}$ donc $L' \subseteq L$. Enfin, comme $g(n) \geq n$, L' est non-borné, donc infini.

Exercice 3.2 [10 points]
1- Pour tout $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathrm{UN}(n,m)$ est défini. La fonction UN est donc totale.
2- Il y a deux cas possibles :
cas 1 : $\forall x \in \mathbb{N}$ ($f_{m_0}(x)$ est indéfini ou $f_{m_0}(x) = 0$).
Dans ce cas $\mathrm{UN}(m_0,*)$ est la fonction constante nulle.
cas 2 : $\exists x \in \mathbb{N}$ ($f_{m_0}(x) \geq 1$).
Soit $x_0 := \min\{\mathrm{x} \in \mathbb{N} \mid \mathrm{f_{m_0}(x)} \geq 1\}$. Alors $\mathrm{UN}(m_0,*)$ est la fonction nulle sur l' intervalle $[0, x_0 - 1]$ et égale à 1 sur l'intervalle $[x_0, +\infty]$.
Dans les deux cas, la fonction $n \mapsto \mathrm{UN}(m_0, n)$ est totale calculable.
3- Remarquons que $\mathrm{UN}(m,0) = 1 \Leftrightarrow (f_m(0) \geq 1)$. La propriété "$f_m(0) \geq 1$ "est non-triviale. Par le théorème de Rice, la fonction $m \mapsto \mathrm{UN}(m,0)$ est donc non-calculable. Mais si la fonction UN était calculable sa restriction $m \mapsto \mathrm{UN}(m,0)$ serait calculable, ce qui n' est pas vrai. Donc UN n' est pas calculable.

Exercice 3.3 [5 points]
Considérons le problème auxiliaire :
Donnée : $M' \subseteq M$
Question : M' vérifie-t-il les conditions $(1) \wedge (2) \wedge (3) \wedge (4)$?
Chacune des propriétés (i) $(1 \leq i \leq 4)$ peut être testée en temps $\mathrm{O}(n^4)$. Donc ce problème peut être résolu en temps P par un algorithme déterministe.
Le problème initial (désignons-le par PM3) peut être résolu par l' algorithme non-déterministe suivant :
1- Choisir une partie $M' \subseteq M$ (cette phase est non-déterministe)
2- Si M' vérifie $((1) \wedge (2) \wedge (3) \wedge (4))$ alors retourner 1 sinon retourner 0. Comme M' est de taille $\mathrm{O}(n^3)$, la phase 1 prend un temps $\mathrm{O}(n^3)$ et on a vu ci-dessus que la phase 2 est dans P. Donc l'algorithme proposé a une complexité en temps polynômiale. Le problème PM3 est donc dans la classe NP.