Université Bordeaux 1
Mastère d'Informatique 1, 2008/2009

Modèles de Calcul : CC 1

Enumérations- Machines de Turing

Exercice 1.1 [8 points]
On considère l' application $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par

$$f(n, m) := 2^n 3^m.$$

1- L' application f est calculable : étant donnés n, m on multiplie 2 par lui-même n fois de suite et l' on multiplie le résultat par 3, m fois de suite.
2- L' application f est injective : si $f(n, m) = f(n', m')$, comme tout nombre entier a une décomposition *unique* en produit de nombres premiers, alors $(n, m) = (n', m')$.
L' application f n'est pas surjective car 5 n' a pas d' antécédent pour f.
3- On calcule : $f(0, 0) = 1, f(1, 0) = 2, f(0, 1) = 3, f(1, 1) = 6, f(2, 0) = 4$
4- On considère l' application $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par

$$g(n, m) := \mathrm{Card}(\{(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid f(p, q) < f(n, m)\}).$$

On calcule : $g(0, 0) = 0, g(1, 0) = 1, g(0, 1) = 2, g(1, 1) = 4, g(2, 0) = 3$
5.1- L' application g est calculable : pour que $f(p, q) < f(n, m)$ il faut que $p < n + m$ et $q < n + m$. On peut calculer les valeurs de $f(p, q)$ pour tous les (p, q) tels que $p < n + m$ et $q < n + m$ puis en déduire $g(n, m)$ en remarquant que

$$g(n, m) := \mathrm{Card}(\{(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid p < n + m, q < n + m, f(p, q) < f(n, m)\}).$$

5.2- Montrons que g est injective : supposons que $(n, m) \neq (n', m')$. Comme f est injective $f(n, m) < f(n', m')$ (cas 1) ou $f(n', m') < f(n, m)$ (cas 2).
Dans le cas 1, $\{(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid f(p, q) < f(n, m)\} \cup \{(n, m)\} \subset \{(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid f(p, q) < f(n', m')\}$. Donc $g(n, m) < g(n', m')$.
Dans le cas 2, en échangeant les rôles de (n, m) et (n', m'), $g(n', m') < g(n, m)$.
5.3- Montrons que g est surjective. On motre, par récurrence sur r que $\forall r \in \mathbb{N}, r \in \mathrm{Im}(g)$.
Base : $0 = g(0, 0)$
Pas d' induction : suppsons que $r = g(n, m)$. Comme f est injective et $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est infini, $\mathrm{Im}(f)$ est infinie. L' ensemble $\{s \in \mathbb{N} \mid f(n, m) < s \text{ and } s \in \mathrm{Im}(f)\}$ est donc non-vide. Donc il possède un plus petit élément :

$$s_{r+1} := \min(\{s \in \mathbb{N} \mid f(n, m) < s \text{ and } s \in \mathrm{Im}(f)\})$$

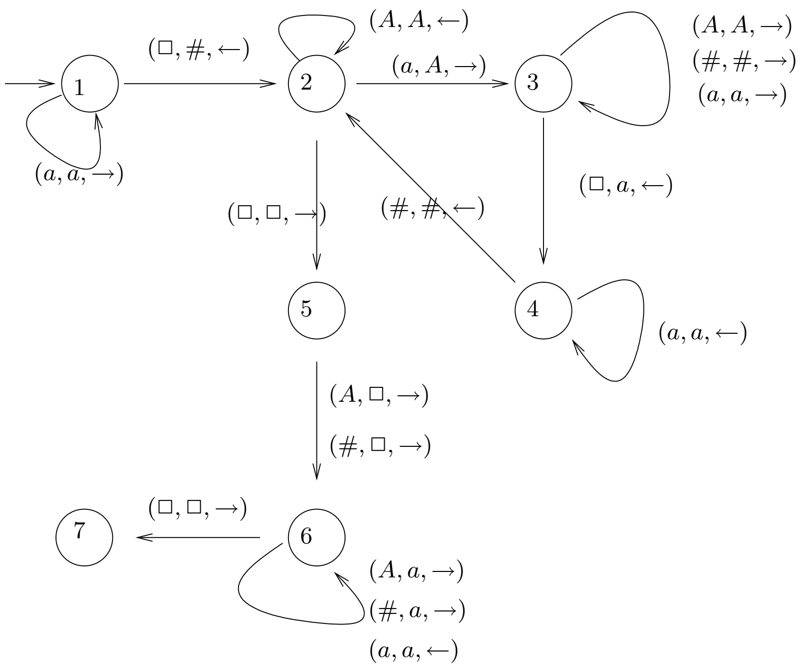
Par définition, s_{r+1} est de la forme $f(n', m')$ et par minimalité ,

$$\{(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid f(p, q) < f(n', m')\}) = \{(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid f(p, q) < f(n, m)\}) \cup \{(n, m)\}$$

donc $r + 1 = g(n', m')$.

Exercice 1.2 [12 points]

1-



$$1aa \vdash_M a1a \vdash_M aa1\square \vdash_M a2a\#$$

$$1aa \vdash_M^* a2a\# \vdash_M aA3\# \vdash_M aA\#3\square \vdash_M aA4\#a \vdash_M a2A\#a \vdash_M 2aA\#a \vdash_M A3A\#a$$

$$\vdash_M AA3\#a \vdash_M AA\#3a \vdash_M AA\#a3\square \vdash_M AA\#4aa \vdash_M AA4\#aa \vdash_M A2A\#aa \vdash_M 2AA\#aa$$

Le calcul de longueur maximale de M partant de $2aa$ est

$$2aa \vdash_M A3a \vdash_M Aa3\square \vdash_M A4aa \vdash_M 4Aaa$$

La Description Instantannée $5aa$ est donc inaccessible à partir de $2aa$.

2- Pour tout $n \geq 0$, $1a^n \vdash_M^* 2\square A^n\#a^n \vdash_M 5A^n\#a^n \vdash_M^* 5a^n$

3- On obtient une Machine de Turing qui calcule l'application $h : a^n \mapsto a^{2n}$ en modifiant M comme indiqué sur la figure.