Université Bordeaux 1
Mastère d'Informatique 1, 2008/2009

Modèles de Calcul : CC 3

Énumérations-Complexités P,NP

Exercice 3.1 [5 points]
On rappelle qu'un ensemble d'entiers $L \subseteq \mathbb{N}$ est récursivement énumérable ssi, il existe une fonction calculable totale $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que

$$L = \{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}. \tag{1}$$

1- Montrer que, si la fonction f utilisée en (1) est strictement croissante, alors L est décidable.
2- Montrer que tout ensemble récursivement énumérable et infini possède un sous-ensemble décidable et infini.

Exercice 3.2 [10 points]
On considère une numérotation effective des fonctions partielles calculables de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$: $f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots$.
On définit une fonction UN : $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par

$$\begin{aligned} \mathrm{UN}(m,n) &= 1 \text{ si } \exists x \in [0,n], f_m(x) \text{ est défini et } f_m(x) \geq 1 \\ \mathrm{UN}(m,n) &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

1- La fonction UN est-elle totale ?
2- Soit $m_0 \in \mathbb{N}$ un entier donné. La fonction $n \mapsto \mathrm{UN}(m_0, n)$ est-elle calculable ?
3- La fonction UN est-elle calculable ?

Exercice 3.3 [5 points]
Les individus martiens se répartissent en trois sexes A,B,C. Pour une population martienne P formée de $3 \cdot n$ individus $P = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ où

$$\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}, \mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}, \mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$$

on dispose d'un ensemble

$$M \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B} \times \mathcal{C}$$

de mariages à trois possibles. On se pose le problème de l'existence d'une façon de marier *tous* les martiens en n' utilisant *que* des triplets de M. Plus formellement la question est : existe-t-il une partie $M' \subseteq M$ telle que
1- M' a exactement n éléments
2- $\forall i \in [1,n], \exists B \in \mathcal{B}, \exists C \in \mathcal{C} \mid (A_i, B, C) \in M'$
3- $\forall i \in [1,n], \exists A \in \mathcal{A}, \exists C \in \mathcal{C} \mid (A, B_i, C) \in M'$
4- $\forall i \in [1,n], \exists A \in \mathcal{A}, \exists B \in \mathcal{B} \mid (A, B, C_i) \in M'$?
Ce problème est-il dans la classe NP ? argumenter votre réponse.