Qu'est ce que le calcul quantique ?

Géraud Sénizergues

cours donné à l'ENSEIRB, Bordeaux.

12/03/2024

Dans ce cours

1 L'actualité
- Décisions politiques
- Exploits technologiques

2 Un peu d'histoire

3 La mécanique quantique
- Cadre mathématique et postulats
- Un modèle de calcul quantique
- Impact sur la calculabilité/complexité

4 Cryptographie quantique

5 Les algorithmes quantiques

6 Les algorithmes répartis quantiques

7 Les réalisations physiques

Après ce cours

Pratique :

https://mediapod.u-bordeaux.fr/video/41854-hello-quantum-world-comment-jai-execute-mon-premier-programme-quantique

Théorie :

Un peu plus (cours de 3 heures) :

https://dept-info.labri.fr/~ges/TALKS/talk_marseille_lis23.pdf

Encore plus (cours de 32 heures et references) :

https://dept-info.labri.fr/~ges/ENSEIGNEMENT/CALCULQ/cours_td_calculq.html

L'actualité

Rapport de I. Kerrenidis et alii

Plans de recherche

France : Emmanuel Macron le 21/01/21, $1,8 \cdot 10^9$ Euros, sur 5 ans
Region aquitaine : Alain Rousset le 10/02/21, 10.10^6 Euros pour 2020/23
Suisse : Entreprise Quantum-ID
Royaume-uni : en 2016 300.10^6 euros, sur 5 ans.
Etats-unis : 75.10^6 dollards publics. Entreprises IBM, Google, Quantinuum (EU-UK).
Canada : entreprise D-wave.
Chine : 8.10^9 Euros (dixit Futura Tech)

Entreprises francaises

PASQAL-lancÃľe en Mars 2019- Saclay-proclame rÃľaliser 1000 qbits en 2024
QUANDELA- lancÃľe en 2017- Massy- issue du C2N (public)- recherches de Pascale Senellart-Mardon
ALICE-and-BOB- Paris- stages bac+4 -recrute un ingenieur genie logciel
ATOS- Bordeaux - Logiciel quantique

Recherche académique à Bordeaux

Groupe de Travail Quantique-2016-2023
Equipe de recherche Informatique Quantique-2023-...

Equipe de Google

Deux équipes affirment avoir atteint la "suprématie quantique" :

Frank Arute et al.
Quantum supremacy using a programmable superconducting processor.
Nature, 574 :505-510, 2019.

Equipe universitaire chinoise (Heihfei, Shangai, Beijing)

Quantum computational advantage using photons
Han-Sen Zhong, Hui Wang, ...Jian-Wei Pan
Science 18 Dec 2020 :
Vol. 370, Issue 6523, pp. 1460-1463

Un peu d'histoire

Calcul/Information classique et physique classique

- Brillouin 1956 : Science and information theory
- Landauer, Bennet, Toffoli [$\sim$ 1960] : calcul réversible
- Gandy 1980 : déduit la thèse de Church-Turing des lois de la physique classique.

Calcul/Information quantique et physique quantique

- Feynmann 1982 : faire calculer les lois de la mécanique quantique ...par des systèmes quantiques
- Deutsch 1985 : machine de Deutsch i.e. machine de Turing , mais quantique
démontre l'existence d'une machine universelle quantique.
- Arrighi-Dowek 2012 : déduisent la thèse de Church-Turing des lois de la physique quantique.

Physique "informationelle"

J.A. Wheeler [directeur de thèse de Feynmann] : "Everything is information" changement de paradigme, voir [Gruska, 2007, poly de calcul quantique].
P. Höhn : déduit la formulation de la mécanique quantique (espaces de Hilbert, opérateurs linéaires hermitiens (resp. unitaires), amplitude de probabilité) d'axiomes "informationels" i.e. sur l'acquisition et la communication d'informations.

La mécanique quantique

Espace des états

Un système physique $\mathcal{S}$ est décrit par un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.
Chaque état du système est décrit par un vecteur unitaire :

$$|\psi\rangle \in \mathcal{H}, \quad \langle\psi|\psi\rangle = 1.$$

Système $\mathcal{S}$ formé de deux particules A_1, A_2 :
$\mathcal{H}_1$ (resp. $\mathcal{H}_2$) est l'espace de A_1 (resp. A_2).
L'espace du système entier est

$$\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2.$$

Système $\mathcal{S}$ formé de n sous-systèmes $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_n$:

$$\mathcal{H} := \bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{H}_j.$$

Evolution

Espace des états : sphère unité d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.
Équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle (t) = \mathrm{H}(t) |\psi\rangle (t)$$

où $\mathrm{H}(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\mathrm{H}(t) = \mathrm{H}^*(t)$.
Si $\mathrm{H}(t)$ est constant, il existe une application dérivable $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathrm{U}(\mathcal{H})$ telle que, $\forall t \in \mathbb{R}, U(t,t) = \mathrm{I}$ et, pour tous $(t_0, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $|\psi_0\rangle \in \mathcal{H}$

$$|\psi\rangle (t) = U(t_0, t) |\psi_0\rangle$$

est l'unique solution de l'équation sur $\mathbb{R}$ t.q. $|\psi\rangle (t_0) = |\psi_0\rangle$.
NB : il suffit de poser $U(t_0, t) = \exp(-i \frac{t-t_0}{\hbar} \mathrm{H})$.

Evolution

Exemple 1 :
Etat initial : $|\psi_0\rangle := |0\rangle$
Porte de Hadamard (opérateur unitaire)

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Etat final :

$$|\psi_1\rangle = H \cdot |\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

Evolution

Exemple 2 :
Etat initial : $|\psi_0\rangle := |10\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle$
Porte cNOT (opérateur unitaire) cNOT : $|x, y\rangle \mapsto |x, x \oplus y\rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ dans la base $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$.

Etat final :

$$|\psi_1\rangle = \text{cNOT} \cdot |\psi_0\rangle = |11\rangle$$

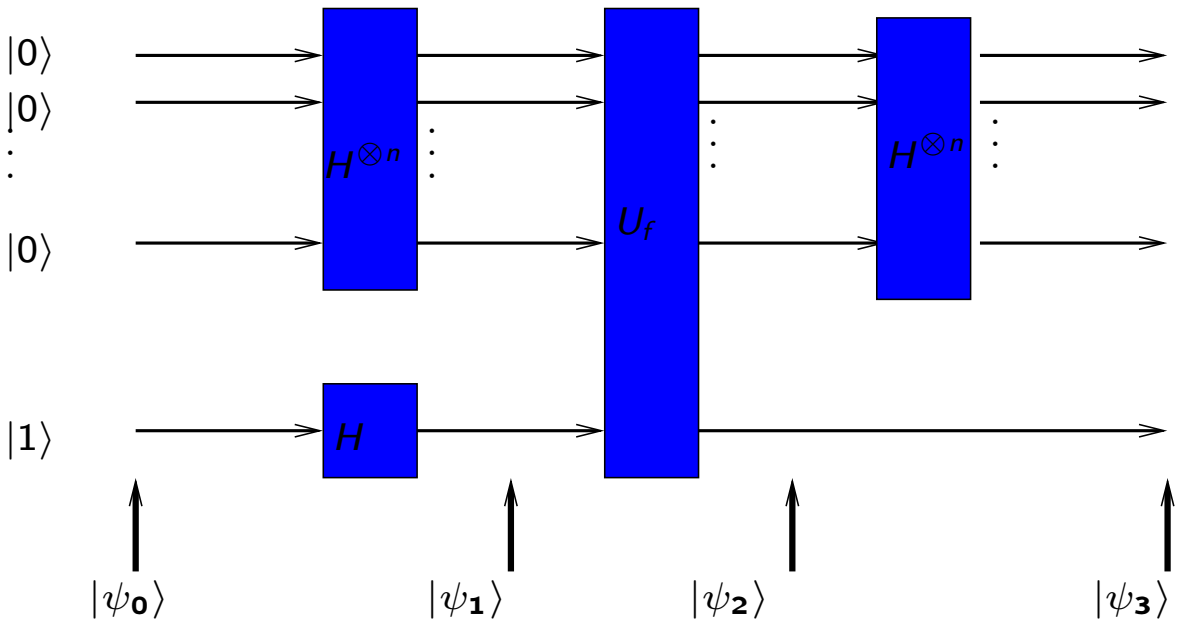
Evolution

Exemple 3 :

Etat initial :

$$|\psi_0\rangle = |00...0\rangle\,|1\rangle \in \mathcal{B}^{\otimes(n+1)}$$

Circuit C :



Etat final :

$$|\psi_3\rangle = C \cdot |\psi_0\rangle\,.$$

Mesure

Observable $\mathcal{M}$: protocole de mesure d'une grandeur sur le système.
Opérateur hermitien associé

$$M \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$$

tel que

$$M^* = M.$$

Soit $\mathcal{H}_\lambda = \mathrm{Ker}(M - \lambda \mathrm{I})$, pr_λ la projection orthogonale sur le sous-espace propre $\mathcal{H}_\lambda$.

Mesure

Résultat d'une mesure :

$\mu : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire. Si le système est dans l'état $|\psi\rangle$

$$\Pr\{\mu = \lambda\} = \|\mathrm{pr}_\lambda |\psi\rangle\|^2$$

État après la mesure :

$$\frac{1}{\|\mathrm{pr}_\lambda |\psi\rangle\|} \cdot \mathrm{pr}_\lambda |\psi\rangle$$

la fonction d'onde "s'effondre".

Mesure et évolution de sous-systèmes

Système $\mathcal{S}$ formé de deux sous-systèmes $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$, dont les espaces sont $\mathcal{H}_1$ (resp. $\mathcal{H}_2$).
Evolution : si U_1, U_2 sont des évolutions possibles de $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$, alors $U_1 \otimes U_2$ est une évolutions possible de $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$.
NB : $U_1 \otimes U_2 = (U_1 \otimes \mathrm{I}_2) \cdot (\mathrm{I}_1 \otimes U_2)$
Mesure : la mesure de l'observable $\mathcal{M}_1$ sur $\mathcal{S}_1$ est representée par l'endomorphisme

$$M_1 \otimes \mathrm{I}_2$$

sur $\mathcal{S}$.
la mesure de l'observable $\mathcal{M}_2$ sur $\mathcal{S}_2$ est representée par l'endomorphisme

$$\mathrm{I}_1 \otimes M_2$$

sur $\mathcal{S}$.

Circuits quantiques

un qbit : espace $\mathcal{B} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(|0\rangle, |1\rangle) \simeq \mathbb{C}^2$.
n qbits : espace $\mathcal{B}^{\otimes n}$.
transition d'évolution : une application unitaire de la forme

$$\mathrm{I}_{2^p} \otimes P \otimes \mathrm{I}_{2^{n-p-r}}$$

pour un ensemble fini de portes $P \in \mathrm{U}(\mathcal{B}^{\otimes r})$ avec $r \leq 3$.
mesure : une famille de projecteurs orthogonaux $(\mathrm{pr}_j)_{j\in J}$ tels que

$$\sum_{j\in J} \mathrm{pr}_j = \mathrm{I}_{2^n}, \quad \mathrm{pr}_j \circ \mathrm{pr}_k = \mathrm{pr}_k \circ \mathrm{pr}_j$$

(i.e. $\mathcal{H} = \bigoplus_{j=1}^{\ell} \mathrm{Im}\ \mathrm{pr}_j$ et $k \neq j \Rightarrow \mathrm{Im}\ \mathrm{pr}_j \subseteq (\mathrm{Im}\ \mathrm{pr}_k)^{\perp}$).
résultat : $\Pr(\mu = j) = \|\mathrm{pr}_j |\psi\rangle\|^2$
transition : $|\psi\rangle \mapsto \frac{1}{\|\mathrm{pr}_j|\psi\rangle\|} \mathrm{pr}_j |\psi\rangle$

Algorithme

Calcul de $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$
Étape 1 : calcul classique produit un circuit C_n sur n qbits
Étape 2 : on initialise l'ordinateur quantique dans l'état $|b_1, b_2, \ldots, b_n\rangle$
Étape 3 : Le circuit C_n fait évoluer l'état de $|b_1, b_2, \ldots, b_n\rangle$ à $|\psi\rangle$.
Étape 4 : On mesure $|\psi\rangle$ -> $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$
on décode -> $(b'_1, b'_2, \ldots, b'_n) \in \mathbb{B}^n$

$$\Pr(\{(b'_1, b'_2, \ldots, b'_n) = f(b_1, b_2, \ldots, b_n)\}) \geq \frac{2}{3}.$$

Impact sur la calculabilité/complexité

Calculabilité : aucun impact ([Bennett 70],[Deutsch 85]).
Complexité : peut être réduite
pourquoi ? :
1- superposition–> grand nombre d'états :
sur n bits : 2^n états possibles $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ $(b_i \in \{0,1\})$
sur n qbits : 2^{2^n} états discrets possibles :

$$\frac{1}{2^{n/2}} \sum_{(b_1 b_2 \cdots b_n) \in \{0,1\}^n} \alpha(b_1 b_2 \cdots b_n) \, |b_1\rangle \otimes |b_2\rangle \cdots |b_n\rangle$$

(où $\alpha : \mathbb{B}^n \to \{1, -1\}$).

Impact sur la calculabilité/complexité

2- superposition –> parallélisme :
sur n bits : n operations en parallèle possibles (XOR en parallèle par exemple)
sur n qbits : 2^n operations en parallèle possibles : Si $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ et $U_f : \left|\vec{b} \otimes c\right\rangle \mapsto \left|\vec{b} \otimes (c \oplus f(\vec{b}))\right\rangle$

$$\begin{aligned} U_f H^{\otimes(n+1)} \left|0^n\right\rangle \left|1\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}} U_f \left(\sum_{\vec{z}\in\mathbb{B}^n} \left|\vec{z}\right\rangle\right) \otimes \left(\left|0\right\rangle - \left|1\right\rangle\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}} \sum_{\vec{z}\in\mathbb{B}^n} (-1)^{f(\vec{z})} \left|\vec{z}\right\rangle \otimes \left(\left|0\right\rangle - \left|1\right\rangle\right) \end{aligned}$$

Impact sur la calculabilité/complexité

Définition :
Un état $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ est dit intriqué s'il n'est pas de la forme $|u_1\rangle \otimes |u_2\rangle$ pour des vecteurs $u_1 \in \mathcal{H}_1, u_2 \in \mathcal{H}_2$.
3- intrication –> corrélations étroites entre les résultats de mesures de qbits différents.
en physique : "paradoxe" [Einstein-Podolsky-Rosen 1935].
en calcul quantique :
- jeux quantiques où une équipe de 2 joueurs quantiques avec des mémoires intriquées ont une stratégie meilleure que toute équipe de joueurs classiques
- les algorithmes : une mesure de k q-bits "projette" l'état global des n qbits, ce qui "sélectionne" l'état des (n-k) autres q-bits.

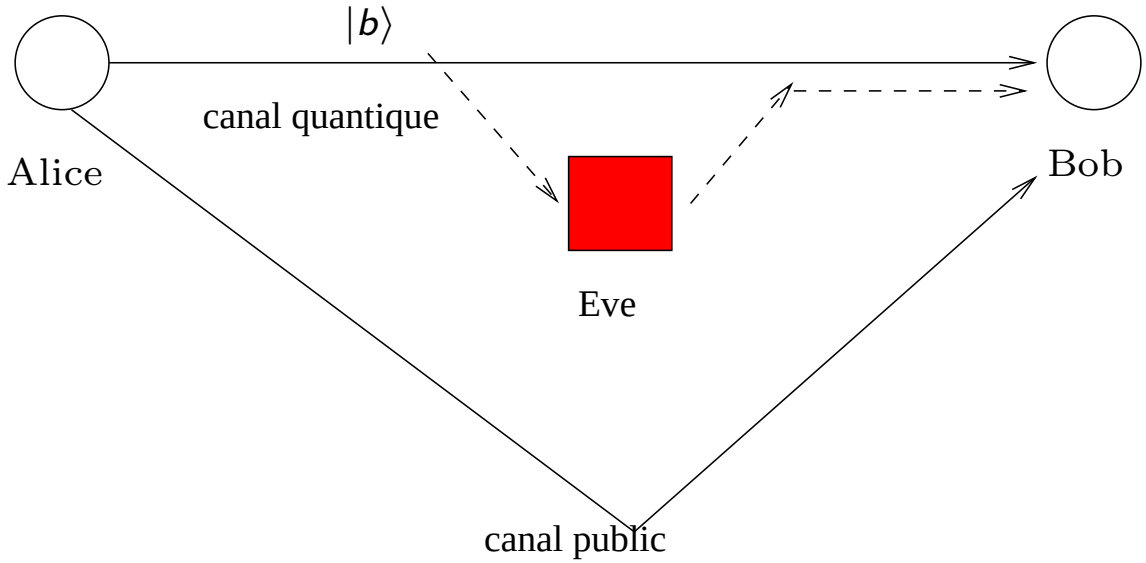
Cryptographie quantique

Protocole de Bennett-Brassard 1984

But : Alice et Bob disposent d'un canal authentifié.
A et B peuvent échanger des $0, 1$ sur ce canal et aussi sur un canal public.
l'espion E peut écouter le canal.
A et B doivent se mettre d'accord sur une clé $c \in \{0,1\}^n$

Difficultés :
1- A et B doivent connaître la clé.
2- sans qu'un adversaire E ne puisse connaître cette clé.
Pour A,B,E : connaître demande de mesurer le qbit, ce qui le modifie.

Protocole de Bennett-Brassard 1984



Protocole de [Bennett-Brassard 1984] : sécurité fondée sur les lois de la physique quantique

Protocoles classiques (sécurité fondée sur une hypothèse de théorie de la complexité).

Exemple : RSA < "le problème de la factorisation d'un nombre entier est difficile".

Les algorithmes quantiques

Algorithme de Grover

DONNÉE : $f : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
RÉSULTAT : Un vecteur $\vec{x} \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ tel que $f(\vec{x}) = 1$.

Donnée : la "boîte noire" $U_f : \mathcal{B}^{\otimes n} \otimes \mathcal{B}$:

$$U_f \left|x\right\rangle \left|y\right\rangle := \left|x\right\rangle \left|y \oplus f(x)\right\rangle .$$

temps : $O(\sqrt{N})$ où $N = 2^n$.
On peut trouver dans une base de donnée de taille N une réponse à la requête $f(\vec{x}) = 1$? en temps $O(\sqrt{N})$.
Algos classiques (probabilistes) : $\Omega(N)$.

Algorithme de Simon

DONNÉE : $f : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
fortement périodique i.e. $\exists D \subseteq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ s.t.

$$\forall x, y \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n, \quad f(x) = f(y) \Leftrightarrow (x - y \in D)$$

RÉSULTAT : Une base de D.

Donnée : la "boîte noire" U_f :

$$U_f \left|x\right\rangle \left|y\right\rangle := \left|x\right\rangle \left|y \oplus f(x)\right\rangle .$$

Temps : $O(n^3)$.
Algos classiques (probabilistes) : $\Omega(2^{n/2})$.

Algorithme de Simon

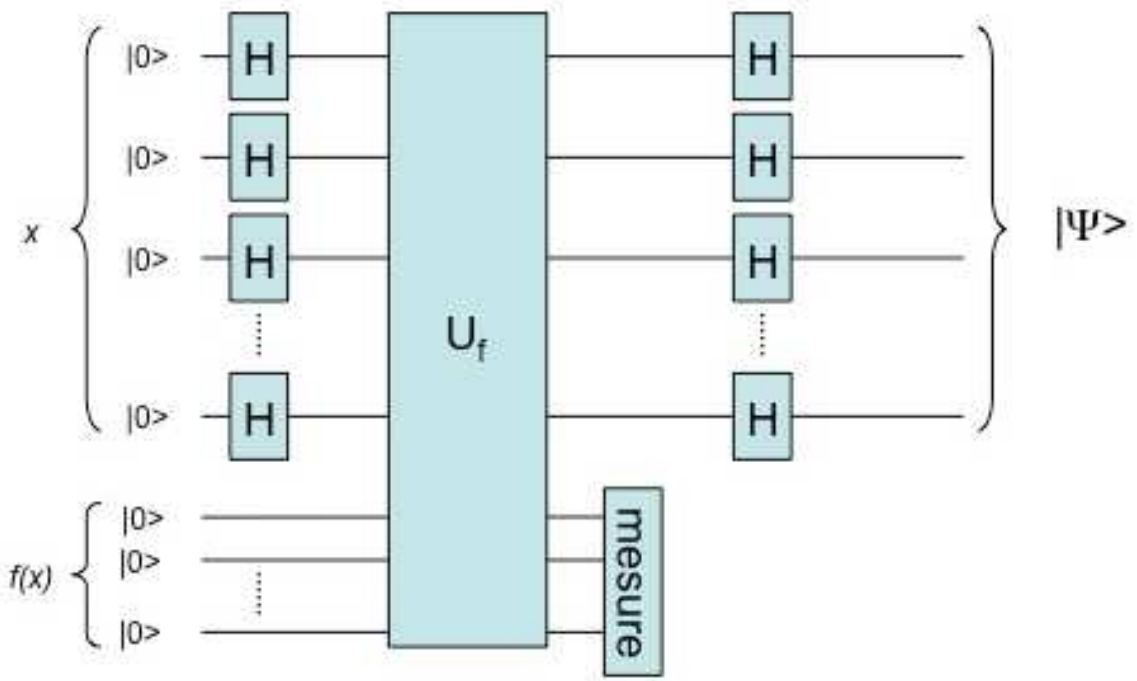


Figure – Le circuit.

Algorithme de Shor

DONNÉE : $n \in \mathbb{N}$ qui est composé.
RÉSULTAT : Une décomposition $n = p \times q$ avec $p \geq 2, q \geq 2$.

Temps : $O(log(n)^2)$.
Algos classiques (probabilistes) connus : $O(2^{\sqrt{log(n)}})$.

Autres algorithmes : `https : //quantumalgorithmzoo.org`
(435 articles).

Les algorithmes répartis

Le problème

Alice et Bob calculent ensemble.Chacun a une part des données :
DONNÉES : D_A (vue par A), D_B (vue par B)
CALCULER : $f(D_A, D_B)$
COMPLEXITÉ de communication : le nombre de (q)bits échangés par A,B au cours du calcul.

Complexité de communication

Un exemple : ici A peut envoyer des qbits à B mais pas en sens opposé.
DONNÉES de A :$x \in \mathbb{B}^{[0,2N-1]}$
DONNÉES de B :un couplage $C \subseteq [0, N_1] \times [N, 2N-1]$
CALCULER : un couple $((i,j), x_i \oplus x_j)$ tel que $(i,j) \in C$.
COMPLEXITÉ de communication quantique : $O(log(n))$
complexité classique (probabiliste) $\Omega(n)$.

Les réalisations physiques

Réalisation de qbits

Exposé de Pascale Senellart, DR CNRS, médaille d'argent du CNRS :
`https://webcast.in2p3.fr/video/les-debuts-de-lordinateur-quantique`

Cryptographie quantique (ID Quantique)

ID Quantique :entreprise privée suisse. Produit et vend
- des générateurs aléatoires fondés sur la mesure d'un système quantique
- des boitiers qui imlémentent le protocole cryptographique de [Bennett-Brassard 1984]
(utilisé pour les élections dans le canton de Genève en Octobre 2007)

Calcul adiabatique (D-wave)

D-wave : entreprise privée canadienne.
Machines de 2000 qbits.
Implémente le "modèle adiabatique".
Machine non-universelle. Résout des problèmes de minimisation de formes quadratiques.
Visite à Bordeaux en Février 2016.

Circuits (IBM)

IBM :entreprise privée (US).
The "IBM Q Experience" launched in 2016, now consists of 15 publicly available quantum computers ranging from five to 53 qubits in size".
Semble développer des systèmes hybrides calculateurs classiques-circuits quantiques.

Circuits (Google)

Quantum supremacy, introduced by [Preskill, 2012] :
"The day when well controlled quantum systems can perform tasks surpassing what can be done in the classical world".
What is needed to achieve it :
1- A mathematical specification of a computational problem with a well defined solution
2- A high-fidelity programmable computational device able to perform the task
3- A scaling runtime difference between the quantum and classical computational processes that can be made large enough as a function of problem size so that it becomes impractical for a supercomputer to solve the task using any known classical algorithm

Circuits (Google)

1- 1.1 Problem :
INPUT :quantum circuit U on 53 qbits,
OUTPUT : sample 30.10^6 vectors in $\mathbb{B}^{53}$ with the probability law :

$$\Pr(x) = \frac{1}{53} \cdot |\langle x| U |0^{53}\rangle|^2.$$

1.2 Test that the answer is a solution : statistical tests
1.3 Publish the values of U and the corresponding set of vectors (everybody can test)
2- Programmable device : Sycomor, 53 qbits, can implement "any" circuit on 53 qbits.
"programmable" : done on 10 different U of length 20 (U produced by a random process, with law the Haar-measure on $U(2^{53})$).
Implements the quantum-circuit-model

Circuits (Google)

3- Scaling runtime difference :
theory : non feasible on a classical computer (for a large number n of qbits)
experiment : 100 s on Sycomor, 3 days on IBM supercomputer.

Echantillonage de photons (equipe chinoise)

HARVARD UNIVERSITY
17 Oxford Street
Cambridge, MA 02138

Tuesday, February 23, 2021, at 9:30 (Boston)
14:30 (UK/Eire) 15:30 (C.Europe) 22:30 (China)
!NOTE EARLIER TIME!

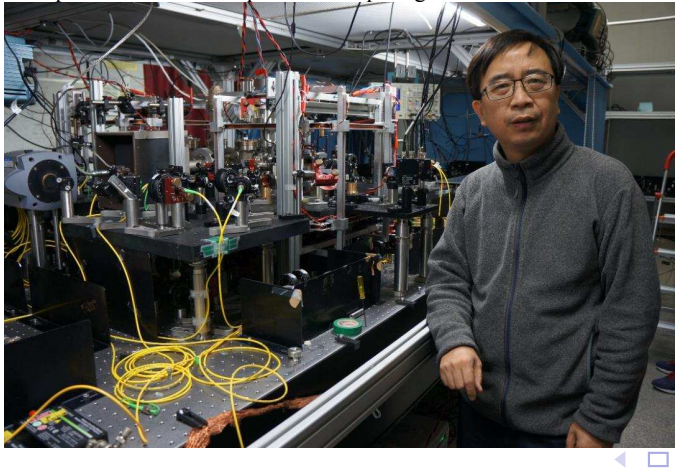
Mathematical Picture Language Seminar

Zoom at: https://harvard.zoom.us/j/779283357?pwd=MitXVm1pYUlJVzZqT3lwV2pCT1ZUQT09

From multi-photon entanglement to quantum computational advantage

Jian-Wei Pan, University of Science and Technology of China

Abstract: By developing high-performance quantum light sources, the multi-photon interference has been scaled up to implement Boson sampling with up to 76 photons out of a 100-mode interferometer, which yields a Hilbert state space dimension of 10^{30} and a rate that is 10^{14} faster than using the state-of-the-art simulation strategy on supercomputers. Such a demonstration of quantum computational advantage is a much-anticipated milestone for quantum computing.



Echantillonage de photons (equipe chinoise)

1- 1.1 Problème :
ENTRÉE : une matrice $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ dont les vecteurs colonnes sont unitaires et orthogonaux deux à deux, où $m = 100$, $n = 76$ qbits,
SORTIE :échantillon de vecteurs d'entiers $s = (s_1, s_2, \ldots, s_m)$ tels que $\sum_{i=1}^{m} s_i = n$ suivant la loi de probabilité :

$$\Pr(s_1, s_2, ..., s_m) = \frac{|Perm(A_s)|^2}{s_1! s_2! ... s_m!}$$

où A_s est la matrice formée de s_1 fois la ligne 1 de A,..., s_i fois la ligne i de A, ..., s_m fois la ligne m de A.
1.2 Tester que l'échantillon calculé est une solution : tests statistiques
1.3 Publier les échantillons.

Echantillonage de photons (équipe chinoise)

2- Système Programmable : circuit optique avec n entrées et m sorties : n photons (= qbits) son envoyés sur m états de sortie, indépendamment pour les n photons ; A est la matrice de transition du système ; le résultat est obtenu par une mesure. k_i= nbre de photons terminant dans le i-ème état.
Nombre d'échantillon ? taille des échantillons ?
Implémente le modèle de calcul "bosonique-noninteractif" défini par [Aaronson et Arkhipov, 2010].
3- Temps d'exécution :
théorie : intractable pour un ordinateur classique (pour n, m grands)[Aaronson, Arkhipov,2013].
Argument-clé : calculer le permanent d'une matrice $n \times n$ est #P-complet.
Experimentation : pas de tentative d'expérience classique (pour le moment).