

DM prep Conigé

1 - $x_1 x_2 \dots x_k$ est sol de $I \Leftrightarrow$
 $u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_k} = v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_k} \Leftrightarrow \varphi(x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}) = \varphi(v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_k})$.

2 - $S(I) = \{w \in X^* \mid \varphi(w) = \varphi(w)\}$

* si $w_1, w_2 \in S(I)$, $\varphi(w_1 w_2) = \varphi(w_1) \cdot \varphi(w_2) = \varphi(w_1) \cdot \varphi(w_2) = \varphi(w_1 w_2)$
 donc $S(I)$ est clos par produit.

* Considérant $\varphi: \{x_1, x_2\}^* \rightarrow \{a^*\}$

$\varphi(x_1) = a, \varphi(x_2) = aa, \varphi(x_1) = aa, \varphi(x_2) = a$.

$x_1 x_2 \in S(I)$, mais $x_1, x_2 \in X^* \setminus S(I)$.
 * $\varphi(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon)$ donc $\varepsilon \in S(I)$, Il en résulte que $S(I)$ est un sous-monoid de $\langle X^*, \cdot, \varepsilon \rangle$.

3 - Comme $A(I) \subseteq S(I)$ et $S(I)$ est clos par produit,
 $(A(I))^* \subseteq S(I)$.

Montrons par récurrence sur $|w|$ que $w \in S(I) \Rightarrow w \in (A(I))^*$.

Base: $|w| = \varepsilon$ $\varepsilon \in (A(I))^*$

Induction: soit $w \in S(I)$, $|w| = n > 0$.

* si $w \notin (S(I) \setminus \{\varepsilon\}) \cdot (S(I) \setminus \{\varepsilon\})$, $w \in A(I)$

* sinon $w = w_1 \cdot w_2$ où $w_i \in S(I) \setminus \{\varepsilon\}$ ($i \in \{1, 2\}$)

donc $|w_1| \leq n-1, |w_2| \leq n-1$.

par hyp. de réc. $w_1, w_2 \in (A(I))^*$

donc $w \in (A(I))^*$.

4 - 4.1. $(b b b)(a b b)(b b b) = (b b)(b a b b b)(b b)$

donc $x_1 x_2 x_1 \in S(I) \setminus \{\varepsilon\}$.

DHC2

$$4.2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi: x_1 \mapsto ba, x_2 \mapsto abb, x_3 \mapsto bab \\ \psi: x_1 \mapsto bab, x_2 \mapsto bb, x_3 \mapsto abb \end{array} \right.$$

Soit w une solution atomique, de longueur minimale. (0)
 w doit commencer par une lettre x telle que: $\varphi(x) \leq \psi(x) \vee \psi(x) < \varphi(x)$

dac $w = x_1 \cdot w_1$
 et $ba \varphi(w_1) = bab \psi(w_1)$ i.e. $\varphi(w_1) = b \psi(w_1)$. (1)

dac $\left\{ \begin{array}{l} w_1 = x_1 w_2 \\ \text{ou } w_1 = x_3 w_2 \end{array} \right.$ pour un mot $w_2 \in X^*$.

mais $\left. \begin{array}{l} \varphi(x_1 w_2) = ba \varphi(w_2) \\ b \psi(x_1 w_2) = b bab \psi(w_2) \end{array} \right] \Rightarrow \varphi(x_1 w_2) \neq b \psi(x_1 w_2)$

dac: $w_1 = x_3 w_2$ et $bab \varphi(w_2) = babb \psi(w_2)$
 i.e. $\varphi(w_2) = b \psi(w_2)$. (2)

Dac $w' := x_1 w_2$ vérifie $\varphi(w') = \psi(w')$
 $w = x_1 x_3 w_2$

dac $|w'| < |w|$, ce qui contredit la minimalité (0).

Dac (φ, ψ) n'a pas de solution.

4.3: On reprend les notations de IV.1:

$$S = \{(ab, ba)\} \quad X = \{D, F, L_a, L_b, L_\#, R_1\}$$

$$I_3 = \phi(S, aabbb, bbbbaa)$$

$$aabbb \rightarrow a \widehat{ba} b \rightarrow \widehat{ba} \widehat{ba} b \rightarrow b \widehat{ba} ba \rightarrow bbbbaa$$

DCM3

Dant on déduit la solution à I_3 :

en effaçant les occurrences de #, x:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon \\ a a b b b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a a b b b \\ a b a b b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a b a b b \\ b a b a b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b a b a b \\ b b a b a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b b a b a \\ b b b a a \end{pmatrix}$$

$B_1 \quad B_2 \quad B_3 \quad B_4$

et avec les # x



$$\begin{pmatrix} \# \# x \\ \# \# x a x a x b x b x b \# \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a x \\ x a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a x b x \\ x b x a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b x \\ x b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b x \\ x b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \# x \\ x \# \end{pmatrix}$$

$B'_1 \quad B'_2 \quad B'_3 \quad B'_4$

$$\begin{pmatrix} a x b x \\ x b x a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a x b x \\ x b x a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b x \\ x b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \# x \\ x \# \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b x \\ a x b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a x b x \\ x b x a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a x b x \\ x b x a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \# x \\ x \# \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b x \\ x b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b x \\ x b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a x b x \\ x b x a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a x \\ x a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \# x b x b x b x a x \# \\ x \# \# \end{pmatrix}$$

Donc:

$$w = D \cdot (L_a R_1 L_b L_b) \cdot L_{\#} (R_1 R_1 L_b) L_{\#} (L_b R_1 R_1) L_{\#} (L_b L_b R_1 L_a) \cdot F$$

est solution de I_3 .

1 - Si S conserve la longueur, pour tout $u \in A^*$,
 $\langle u \rangle_{\frac{x}{S}} = \{w \in A^* \mid u \xrightarrow[S]{x} w\}$ est fini et constructible.

On peut donc :
 - construire explicitement cet ensemble $\langle u \rangle_{\frac{x}{S}}$
 - tester si $v \in \langle u \rangle_{\frac{x}{S}}$.

2 - Supposons S croissant pour $\sqsubseteq$ et $(A^*, \sqsubseteq) \cong (\mathbb{N}, \leq)$

Soient $u, v \in A^*$.

$$\{w \in A^* \mid w \xrightarrow[S]{x} v\} \subseteq \{w \in A^* \mid w \sqsubseteq v\}$$

et $\{w \in A^* \mid w \sqsubseteq v\}$ est fini (car dans $\mathbb{N}$, chaque entier n'a qu'un nombre fini de mineurs).

On peut calculer explicitement $\{w \in A^* \mid w \xrightarrow[S]{x} v\} = \langle v \rangle_{\frac{x}{S}}$
 puis tester si $v \in \langle v \rangle_{\frac{x}{S}}$.

3 - Soient $l, r \in A^*$. On considère l'ordre hiérarchique sur A^* : $A = \{a_1, \dots, a_p\}$ $a_1 < a_2 < \dots < a_p$

et $v_1 \sqsubseteq v_2$ si $|v_1| < |v_2|$ ou $(|v_1| = |v_2| \text{ et } v_1 \leq_{lex} v_2)$.

$(A^*, \sqsubseteq) \cong (\mathbb{N}, \leq)$ et cet ordre est compatible avec le produit.

Cet ordre est total. Donc $l \sqsubseteq r$ ou $r \sqsubseteq l$.

• Si $l \sqsubseteq r$, par Q2, (ACC-ST) est décidable.

• Si $l \not\sqsubseteq r$, par Q2, (ACC-ST) est décidable pour

$(r \rightarrow l, v, u)$ qui est équivalent à $(l \rightarrow r, u, v)$.

4-

$$S_1: \widehat{aabb} \xrightarrow{1} \widehat{abab} \xrightarrow{2} \widehat{baab} \xrightarrow{2} bbaa \xrightarrow{1} bbba$$

$$S_2: \{ (bb, ba), (ab, aab), (aa, ba) \}, u_2 = aab, v_2 = ababa$$

$$u_2 = aab \rightarrow \widehat{aaab} \rightarrow \widehat{a^3ab} \rightarrow a \widehat{baab} \rightarrow a \widehat{baab} = v_2.$$

$$S_3: \text{On prouve, par récurrence sur } k, \text{ que } x0 \xrightarrow[S_3]{*} x1^k. \quad P(k).$$

Comme $\forall (l, r) \in S_3, (r, l) \in S_3$ (S_3 est symétrique)
 $\xrightarrow[S_3]{*}$ est une relation d'équivalence. De plus $\xrightarrow[S_3]{*}$ est, par définition,
 compatible avec le produit. Notons désormais $\equiv$ cette relation.

$$\underline{P(0)}: x \equiv x$$

$$\underline{P(1)}: x0 \xrightarrow[S_3]{} x1 \text{ donc } P(1).$$

$$\underline{k \geq 1, \quad \forall l \leq k \quad P(l) \Rightarrow P(k+1):}$$

$$x0^{k+1} = x0^k 0 \equiv x1^k 0$$

$$\equiv x1^{k-1} 10$$

$$\equiv x0^{k-1} 10$$

$$\xrightarrow[S_3]{} x0^{k-1} 11$$

$$\equiv x1^{k-1} 11$$

$$\equiv x1^{k+1}$$

(par $P(k)$ et compatibilité
à droite)

(par $P(k-1)$)

(R2)

($P(k-1)$)

DCM6

S_n: notons $\equiv$ la relation $\xrightarrow[S_n]{*}$ (qui est une congruence)

Fait: $ab \equiv ba$

$$ab \rightarrow \underbrace{ababa} \rightarrow ba$$

Par récurrence sur n : $ba^n \equiv a^n b$

Par récurrence sur n : $|u|=n \Rightarrow u \equiv a^p b^q$ où $p=|u|_a, q=|u|_b$

$n=0$: $u = \varepsilon \equiv a^0 b^0$

$n \rightarrow n+1$:

si $u \equiv a u'$:

$$u \equiv a a^{p'} b^{q'} \\ \equiv a^{p'+1} b^{q'}$$

où $p' = |u'|_a, q' = |u'|_b$

où $p = |u|_a, q = |u|_b$

si $u \equiv b u'$:

$$u \equiv b a^{p'} b^{q'} \\ \equiv a^{p'} b b^{q'} \\ \equiv a^{p'} b^{q'+1}$$

(par le Fait)

où $p = |u|_a, q = |u|_b$.

Donc $u_4 \equiv a^{1042} b^{2021}$ et $v_4 = (ab)^{2021} a^{2021} \equiv a^{1042} b^{1042} a^{2021} = a^{2021} b^{1042}$

Donc $u_4 \equiv v_4$.

$$\begin{aligned}
 DI(\mathcal{M}) &: u q v \# & | u, v \in \Sigma^*, q \in Q, u v \in D(\Sigma \setminus \{D\})^* \\
 CONF(\mathcal{M}) &: u q v \square^w & | u, v \in \Sigma^*, q \in Q, u v \in D(\Sigma \setminus \{D\})^* \\
 \mathcal{M} &= \langle \Sigma, Q, q_-, q_+, \delta \rangle, \Sigma = \{D, \square\} \cup \Gamma \\
 C &: u q v \# \mapsto u q v \square^w
 \end{aligned}$$

1. 1.1 $C(u q v \#) = C(u q v \square^w)$ donc C n'est pas injective.

1.2 Soit $u q v \square^w \in CONF(\mathcal{M})$.

$$u q v \square^w = C(u q v \#) \text{ donc } C \text{ est surjective.}$$

2. Soit $S_{\mathcal{M}}$ constitué des règles suivantes:

$$\begin{aligned}
 q x &\rightarrow y q' & \text{pour } (q, x, q', y, R) \in \delta \\
 z q x &\rightarrow q' z y & \text{pour } (q, x, q', y, L) \in \delta, z \in \Sigma \\
 \# &\rightarrow \square \#
 \end{aligned}$$

$$2.1 \quad \left\{ d_1 \xrightarrow{S_{\mathcal{M}}} d_2 \right.$$

$$* \quad d_1 = \alpha q x \beta \#, d_2 = \alpha y q' \beta \# \text{ avec } \alpha x \beta \in D(\Sigma \setminus \{D\})^*$$

$$C(d_1) = \alpha q x \beta \square^w, C(d_2) = \alpha y q' \beta \square^w \text{ et } C(d_1) \xrightarrow{\mathcal{M}} C(d_2)$$

$$* \quad d_1 = \alpha z q x \beta \#, d_2 = \alpha z y q' \beta \#$$

idem

$$* \quad d_1 = u q v \#, d_2 = u q v \square^w$$

$$\text{alors } C(d_1) = C(d_2) \text{ donc } C(d_1) \xrightarrow{* \mathcal{M}} C(d_2)$$

DCM8

$$2.2 \quad \left\{ \begin{array}{l} C(d_1) = c_1 \text{ et } c_1 \vdash_{\mathcal{B}} c_2 \end{array} \right.$$

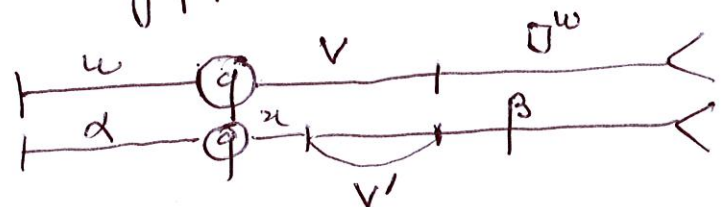
$$\begin{array}{ccc} d_1 & \longrightarrow & d_2? \\ C \downarrow & & \downarrow \\ c_1 & \vdash_{\mathcal{B}} & c_2 \end{array}$$

$$\underline{d_1 = u q v \#} \quad \text{avec} \quad u, v \in \Sigma \setminus \{\triangleright\}^*, q \in Q$$

$$C(d_1) = \underline{u q v \sqsupset^w} = c_1$$

cas 1: $c_1 = \alpha q \pi \beta$ / $c_2 = \alpha y q' \beta$

$$C(d_1) = u q v \sqsupset^w = \alpha q \pi \beta$$



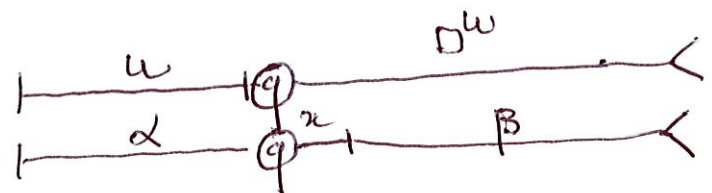
cas 1.1: $1 \leq |v|$

$$u = \alpha, v = x v', \beta = v' \sqsupset^w = \beta$$

Potons $d_2 := u y q' v' \#$

$$d_1 = u q v \# = u q x v' \# \xrightarrow{\text{Sub}} u y q' v' \# = d_2$$

$$C(d_2) = u y q' v' \sqsupset^w = u y q' \beta = \alpha y q' \beta = c_2$$



cas 1.2: $|v| = 0$

$$u = \alpha, v = \epsilon, \pi = x, \sqsupset^w = \pi \beta$$

Potons $d_2 := u y q' \#$

$$d_1 = u q v \# = u q \# \xrightarrow{\text{Sub}} u q \pi \# = u q x \# \xrightarrow{\text{Sub}} u y q' \# = d_2$$

$$C(d_1) = u y q' \sqsupset^w = \alpha y q' \beta = c_2$$

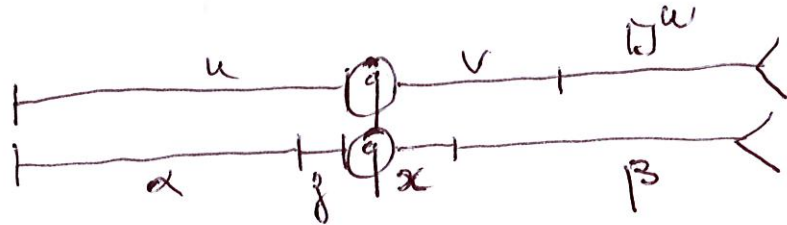
DCH9

cas 2: $c_1 = \alpha \int q^x \beta$, $c_2 = \alpha q' \int y \beta$

$C(d_1) = u q v \square^w = \alpha \int q^x \beta$

cas 2.1: $|1| \leq |V|$

$u = \alpha \int, v = x v', v' \square^w = \beta$

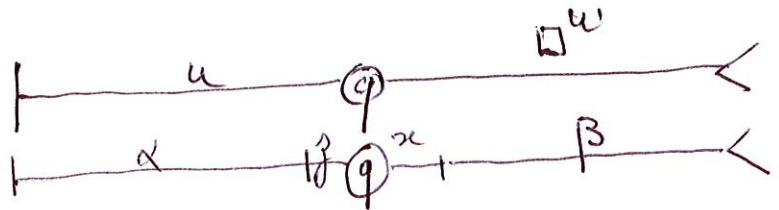


Posus $d_2 = \alpha q' \int y v' \#$

accordé comme en 1.1

cas 2.2: $|V| = \varepsilon$

$u = \alpha \int, v = \varepsilon, \square^x, \square^w = \beta$



Posus $d_2 := \alpha q' \int y \#$

$d_1 = u q v \# = \alpha \int q \# \xrightarrow{Sub} \alpha \int q \square \# \xrightarrow{Sub} \alpha q' \int y \# = d_2$

$C(d_2) = \alpha q' \int y \square^w = \alpha q' \int y \beta = c_2$

Par récurrence sur $n \geq 0$ on en déduit:

$$d_1 \xrightarrow[n]{S_{\mathcal{A}}} d_2 \Rightarrow C(d_1) \xrightarrow[\mathcal{A}]{*} C(d_2)$$

$$(C(d_1) = c_1 \text{ et } c_1 \xrightarrow[\mathcal{A}]{*} c_2) \Rightarrow \exists d_2 \in DI(\mathcal{A}), d_1 \xrightarrow[n]{S_{\mathcal{A}}} d_2 \text{ et } C(d_2) = c_2$$

3- $\mathcal{A}$ accepte u si:

$$q \cdot Du \square^w \xrightarrow[\mathcal{A}]{*} \alpha q \beta$$

$$\text{ou } \alpha \beta \in \Sigma^*, q \in Q_+$$

$$3.1: \text{Supposons } q \cdot Du \square^w \xrightarrow[\mathcal{A}]{*} \alpha q \beta$$

$$\text{ou } \alpha \beta \in \Sigma^*, q \in Q_+ \\ \beta \in \Sigma^* \square^w,$$

$$\text{Posons } d_1 = q \cdot Du \#$$

$$\text{alors, par } Q_2, \exists d_2 \in CI(\mathcal{A}) :$$

$$\begin{array}{ccc} q \cdot Du \# & \xrightarrow[\mathcal{A}]{*} & d_2 \\ \downarrow C & & \downarrow C \\ q \cdot Du \square^w & \xrightarrow[\mathcal{A}]{*} & \alpha q \beta \end{array}$$

$$C(d_2) = \alpha q \beta \Rightarrow d_2 = \alpha q \beta' \# \text{ ou } q \in Q_+, \alpha \beta' \in \Sigma^*$$

$$\text{d'où } q \cdot Du \# \xrightarrow[\mathcal{A}]{*} v \# \text{ ou } v \in \Sigma^* Q_+ \Sigma^*$$

$$3.2: \text{Supposons } q \cdot Du \# \xrightarrow[\mathcal{A}]{*} v \# \text{ ou } v \in \Sigma^* Q_+ \Sigma^*$$

$$\text{alors } C(q \cdot Du \#) \xrightarrow[\mathcal{A}]{*} C(v \#) = \alpha q \beta \square^w \text{ avec } q \in Q_+$$

$$\text{d'où } u \in L(\mathcal{A})$$

DCM11

4- On ajoute un symbole $\bar{\#}$.

$$T_{\mathcal{A}} = S_{\mathcal{A}} \cup \{(\sigma\bar{\#}, \bar{\#}), (\bar{\#}\sigma, \bar{\#}) \mid \sigma \in \Sigma\} \\ \cup \{(q, \bar{\#}) \mid q \in Q_+\}$$

4.1: si $q \vdash u \xrightarrow{S_{\mathcal{A}}} \alpha q \beta$ avec $q \in Q_+$

alors $q \vdash u \xrightarrow{S_{\mathcal{A}}}^* \alpha q \beta \xrightarrow{T_{\mathcal{A}}} \bar{\#}$

4.2: si $q \vdash u \xrightarrow{T_{\mathcal{A}}} \bar{\#}$ alors $q \vdash u \xrightarrow{S_{\mathcal{A}}}^* \alpha q \beta$ avec $q \in Q_+$

et $\alpha q \beta \xrightarrow{T_{\mathcal{A}}} \alpha \bar{\#} \beta$ donc $q \vdash u \xrightarrow{S_{\mathcal{A}}}^* v$ avec $v \in \Sigma^* Q_+ \Sigma^*$

5- Une instance de ACC-MT est de la forme:

Instance: $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, q, Q_+, \delta \rangle, u \in T^*$.

Question: $u \in L(\mathcal{A})$

Réponse: $\Phi(\mathcal{A}, u) = (T_{\mathcal{A}}, \bar{\#})$

Comme $u \in L(\mathcal{A}) \Leftrightarrow q \vdash u \xrightarrow{T_{\mathcal{A}}}^* \bar{\#}$

Φ est une réduction (calculable) de (ACC-MT) à (ACC-ST).

6- Soit $S \subseteq A^* \times A^*$ système fini semi-Thueien
et $u, v \in A^*$.

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\} \quad (p \geq 3)$

$\gamma: A^* \longrightarrow \{a, b\}^*$
 $a_i \longmapsto a b^i a b^{p-i} a a$

DCM12

Les $(\varphi(a_i))_{i \in [1, t]}$ sont "sans chevauchement" i.e. :

$$\left[\begin{array}{l} \forall \alpha, \beta \in \{a, b\}^*, i, j \in [1, t], \\ \varphi(a_i)\beta = \alpha\varphi(a_j) \text{ et } |\alpha| < |\varphi(a_i)| \Rightarrow \alpha = \beta = \varepsilon, i = j \end{array} \right.$$

On en déduit que : si $\varphi(u) \xrightarrow[\varphi(s)]{\varphi(v)} \varphi(v)$ alors $u \xrightarrow[s]{s} v$

Donc $u \xrightarrow[s]{*} v \Leftrightarrow \varphi(u) \xrightarrow[\varphi(s)]{*} \varphi(v)$.

$(s, u, v) \mapsto (\varphi(s), \varphi(u), \varphi(v))$ est une réduction du PB ACC-ST au PB (ACC-ST) sur un alphabet de deux lettres.