

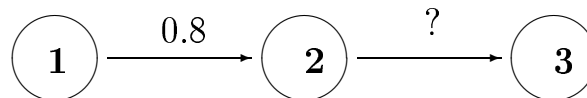
Algorithmique des Graphes – TD 9

---

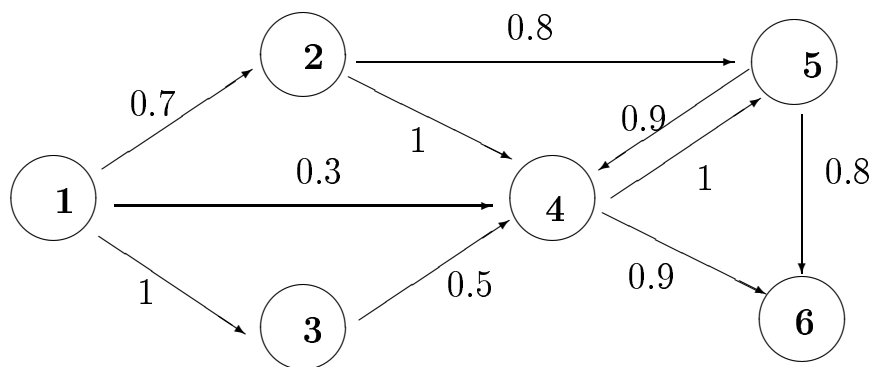
**Exercice 1**

On considère un graphe orienté modélisant un réseau avec une source. Le sommet “source” émet des messages vers les autres sommets. Sur chaque arc il y a une probabilité (comprise entre 0 et 1) de transmission sans erreur d’un message. La probabilité de ne pas avoir d’erreur de transmission le long d’un chemin dépend des probabilités des arcs qui le composent.

1. Quelle doit être la probabilité sur chaque arc d’un chemin si l’on veut être sûr qu’un message soit transmis ?
2. Quelle doit être la probabilité de l’arc (2,3) du graphe ci-dessous si l’on souhaite que le chemin de 1 à 3 ait probabilité 0.4 ?  
Et si l’on souhaite que le chemin de 1 à 3 ait probabilité nulle ?



3. Comment on obtient la probabilité que la transmission le long d’un chemin soit sans erreur à partir des probabilités des arcs qui le composent ?
4. Modifier l’algorithme de Dijkstra de façon à calculer les chemins les plus sûrs entre la source et chacun des autres sommets et l’appliquer au graphe suivant de source 1 :



## Exercice 2

Soit  $G$  un graphe orienté et valué ayant un seul arc de poids négatif. On note  $s_1$  l'origine et  $s_2$  l'extrémité de cet arc.

1. En utilisant l'algorithme de Dijkstra, trouver une façon de détecter l'existence d'un circuit dont la somme des valeurs des arcs est négative.
2. En supposant qu'un tel circuit de poids négatif n'existe pas, on veut chercher les plus courts chemins entre un sommet distingué  $s_0$  et tous les autres sommets de  $G$ . Pour chaque sommet on veut savoir si le plus court chemin depuis  $s_0$  doit emprunter l'arc de poids négatif. Pour cela :

- 1 Appliquer l'algorithme de Dijkstra au graphe  $G_1$  obtenu en supprimant de  $G$  l'arc de poids négatif et calculer la distance  $d$  entre  $s_0$  et tous les sommets de  $G_1$ .
- 2 Soit  $G_2$  le graphe ayant comme sommets ceux qui dans  $G_1$  sont accessibles depuis  $s_2$  et tous les arcs les reliant excepté l'arc  $(s_1, s_2)$  de poids négatif.  
Calculer, en appliquant l'algorithme de Dijkstra, la distance  $d'$  entre  $s_2$  et tous les sommets de  $G_2$ .

Comment utiliser les distances ainsi calculées pour savoir si le plus court chemin de  $s_0$  à un sommet  $s$  quelconque est l'un de ceux qui contiennent l'arc de poids négatif?

## Solutions pour le chargé de TD :

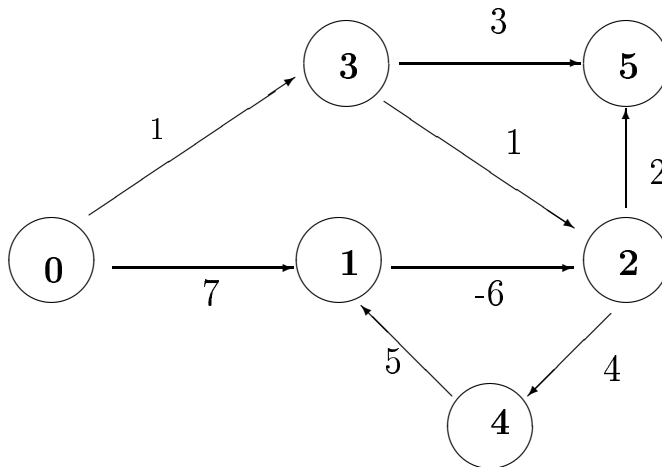
Exercice 1 :

- 1) 1
- 2) 0.5 et 0
- 3) par produit des proba des arcs
- 4) on fait le produit au lieu que la somme et on prend le maximum au lieu que le minimum

Exercice 2 :

- 1) on exécute l'algo de Dijkstra depuis  $s_2$  et on calcule  $d'$  :  
si  $d'(s_1) + w(s_1, s_2) < 0$  alors il y a un circuit négatif
- 2) On calcule le minimum entre  $d(s)$  et  $d(s_1) + w(s_1, s_2) + d'(s)$ .

Exemple ;



On teste s'il y a un circuit de poids négatif : non car  $d'(1) = 9$  et donc  $d'(1) + w(1, 2) = 9 - 6 > 0$

On calcule  $d$  dans le graphe sans arc négatif et  $d'$  dans le graphe des sommets accessibles depuis 2 (sans arc négatif) :

$d(0)=0$	$d'(0)=\infty$
$d(1)=7$	$d'(1)=9$
$d(2)=2$	$d'(2)=0$
$d(3)=1$	$d'(3)=\infty$
$d(4)=6$	$d'(4)=4$
$d(5)=4$	$d'(5)=2$

Calcul du minimum : on a  $d(1) + w(1, 2) = 7 - 6 = 1$   
Sommet 0 :  $\min(0, 1 + \infty) = \min(0, \infty)$   
Sommet 1 :  $\min(7, 1 + 9) = \min(7, 10)$

Sommet 2 :  $\min(2, 1+0) = \min(2,1)$   
Sommet 3 :  $\min(1, 1+\infty) = \min(1, \infty)$   
Sommet 4 :  $\min(6, 1+4) = \min(6,5)$   
Sommet 5 :  $\min(4, 1+2) = \min(4,3)$

Il faut emprunter l'arc négatif pour obtenir le plus court chemin entre le sommet 0 et les sommets 2, 4, 5.

: