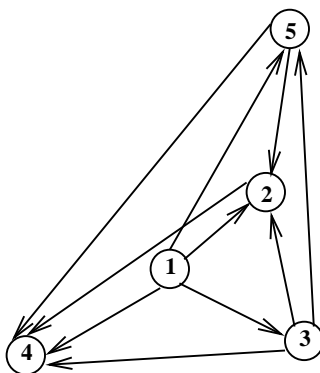


Problème

On appelle *tournoi* un graphe orienté ayant n sommets x_1, x_2, \dots, x_n et tel qu'entre deux sommets x_i, x_j il existe soit un seul arc d'origine x_i et d'extrémité x_j soit un seul arc d'origine x_j et d'extrémité x_i . Ainsi le nombre d'arcs d'un tournoi à n sommets est $\frac{n(n-1)}{2}$. Un tournoi ayant 5 sommets et 10 arêtes est donné sur la figure ci-dessous.



Question 1. On se donne un graphe (sans arcs parallèles ¹) défini par listes de successeurs, donner un algorithme qui vérifie que ce graphe est un tournoi.

Question 2. Sur le graphe donné en exemple quel est l'arbre obtenu par le parcours en largeur depuis le sommet 1 ? Montrer que cet arbre peut être aussi obtenu par un parcours en profondeur depuis ce même sommet : pour cela vous donnerez, pour chaque sommet, l'ordre des successeurs qui permet d'obtenir cet arbre.

On appelle chemin hamiltonien un chemin qui passe une fois et une fois seulement par tous les sommets

Question 3. Donner sur le tournoi dessiné plus haut un chemin hamiltonien.

Question 4. Montrer que tout tournoi ayant 3 sommets admet un chemin hamiltonien.

Question 5. Soit T un tournoi ayant $n - 1$ sommets et un chemin hamiltonien $x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}$. On suppose que l'on ajoute un sommet x_n à ce graphe et que, pour chaque sommet $x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}$, on ajoute soit un arc (x_n, x_j) , soit un arc (x_j, x_n) , $1 \leq j < n$, de façon à former un tournoi T' sans chemin hamiltonien.

Dans quels sens sont alors orientés les arcs entre x_1 et x_n et entre x_{n-1} et x_n ? Est-il possible d'avoir un arc orienté de x_j vers x_n et un autre de x_n vers x_{j+1} pour $1 \leq j < n - 1$?

En déduire que T' a nécessairement un chemin hamiltonien.

Question 6. Déduire des questions 4. et 5. que tout tournoi admet un chemin hamiltonien.

Question 7. Donner un algorithme qui à partir d'un tournoi T construit un chemin hamiltonien.

¹Deux arcs sont parallèles s'ils ont même origine et même extrémité.