

## INF108 Algorithmique des Graphes

Corrigé du Devoir Surveillé  
du Samedi 24 Mars 2007

---

**Exercice**

Le parcours en profondeur (rappelé ci-dessous) d'un graphe orienté permet de classier les arcs du graphe en quatre sous-ensembles (*de l'arbre, retour, avant, transversaux*). Modifier l'algorithme de parcours en profondeur de façon à comptabiliser dans quatre variables le nombre d'arcs de chaque sous-ensemble et afficher les valeurs obtenues.

**Réponse :**

PP(G)

```
1 pour chaque sommet u de X
2   faire visité[u] <- 'NON'
3     pi[u] <- nil
4 temps <- 0
   nb_arcs <- 0
   arcs_arbre <- avant <- retour <- transversaux <- 0
5 pour chaque sommet u de X
6   faire si visité[u] = 'NON'
7     alors Visiter_PP(u)
   Afficher(arcs_arbre, avant, retour, transversaux)
```

Visiter\_PP(u)

```
1 visité[u] <- 'EN COURS'
2 d[u] <- temps <- temps + 1
3 pour chaque v de Adj[u]
4   faire si visité[v] = 'NON'
5     alors pi[v] <- u
           nb_arcs <- nb_arcs + 1
           arcs_arbre <- arcs_arbre + 1
6     Visiter_PP(v)
   sinon si d[v] < d[u]
     alors si visité[v] = 'OUI'
       alors transversaux <- transversaux + 1
       sinon retour <- retour + 1
     sinon avant <- avant + 1
7 visité[u] <- 'OUI'
8 f[u] <- temps <- temps+1
```

## Problème

On appelle *tournoi* un graphe orienté ayant  $n$  sommets  $x_1, x_2, \dots, x_n$  et tel qu'entre deux sommets  $x_i, x_j$  il existe soit un seul arc d'origine  $x_i$  et d'extrémité  $x_j$  soit un seul arc d'origine  $x_j$  et d'extrémité  $x_i$ . Ainsi le nombre d'arcs d'un tournoi à  $n$  sommets est  $\frac{n(n-1)}{2}$ . Un tournoi ayant 5 sommets et 10 arêtes est donné sur la figure ci-dessous.

**Question 1.** On se donne un graphe (sans arcs parallèles <sup>1</sup>) défini par listes de successeurs. Donner un algorithme qui vérifie que ce graphe est un tournoi. En évaluer la complexité.

**Réponse :**

```
Initialiser à 0 une matrice M[n,n];
nb_arcs <- 0;
pour tout sommet u de G faire
  pour chaque v de Adj[u] faire
    si (u = v) alors
      retourner faux; // il y a des boucles
    sinon
      i <- min(u,v);
      j <- max(u,v);
      si (M[i,j] <> 0) alors
        retourner faux; // il y a l'arc opposé
      sinon
        M[i,j] <- 1;
        nb_arcs <- nb_arcs+1;
retourner (nb_arcs = n*(n-1)/2);
```

Complexité  $O(n^2)$

**Question 2.** Sur le graphe donné en exemple quel est l'arbre obtenu par le parcours en largeur depuis le sommet 1 ? Montrer que cet arbre peut être aussi obtenu par un parcours en profondeur depuis ce même sommet : pour cela vous donnerez, pour chaque sommet, l'ordre des successeurs qui permet d'obtenir cet arbre.

**Réponse :** Si le sommet 1 est l'origine du parcours en largeur, on obtient un arbre où le sommet 1 est la racine et les autres quatre sommets sont fils de 1 (avec l'ordre qu'ils ont dans la liste d'adjacence de 1).

On peut obtenir le même arbre par parcours en profondeur et parcours en largeur du graphe donné si l'ordre des sommets adjacents à 1 est : 4,2,5,3 (et n'importe quel ordre pour les successeurs des autres sommets).

*On appelle chemin hamiltonien un chemin qui passe une fois et une fois seulement par tous les sommets*

---

<sup>1</sup>Deux arcs sont parallèles s'ils ont même origine et même extrémité.

**Question 3.** Donner sur le tournoi dessiné plus haut un chemin hamiltonien.

**Réponse :** 1,3,5,2,4

**Question 4.** Montrer que tout tournoi ayant 3 sommets admet un chemin hamiltonien.

**Réponse :** Il n'y a que 2 tournois à 3 sommets, à isomorphisme près :

$$T_1 = ([1, 3], \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}), \quad T_2 = ([1, 3], \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}),$$

Tous deux admettent le chemin hamiltonien (1, 2, 3).

**Question 5.** Soit  $T$  un tournoi ayant  $n - 1$  sommets et un chemin hamiltonien

$x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}$ . On suppose que l'on ajoute un sommet  $x_n$  à ce graphe et que, pour chaque sommet  $x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}$ , on ajoute soit un arc  $(x_n, x_j)$ , soit un arc  $(x_j, x_n)$ ,  $1 \leq j < n$ , de façon à former un tournoi  $T'$  sans chemin hamiltonien.

Dans quels sens sont alors orientés les arcs entre  $x_1$  et  $x_n$  et entre  $x_{n-1}$  et  $x_n$ ? Est-il possible d'avoir un arc orienté de  $x_j$  vers  $x_n$  et un autre de  $x_n$  vers  $x_{j+1}$  pour  $1 \leq j < n - 1$ ?

En déduire que  $T'$  a nécessairement un chemin hamiltonien.

**Réponse :** On suppose ici que  $n \geq 3$ .

5.1 Si  $(x_n, x_1) \in A_{T'}$  alors  $x_n, x_1, \dots, x_{n-1}$  est un chemin hamiltonien dans  $T'$ . Donc  $(x_n, x_1) \notin A_{T'}$  ce qui entraîne que  $(x_1, x_n) \in A_{T'}$ .

De même, si  $(x_{n-1}, x_n) \in A_{T'}$  alors  $x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$  est un chemin hamiltonien dans  $T'$ , donc  $(x_n, x_{n-1}) \in A_{T'}$ .

5.2 Si  $(x_j, x_n) \in A_{T'}$  et  $(x_n, x_{j+1}) \in A_{T'}$  alors  $x_1, \dots, x_j, x_n, x_{j+1}, \dots, x_{n-1}$  est un chemin hamiltonien dans  $T'$ . On en conclut que, lorsque les 4 premières lignes de la question 5 sont vraies, l'assertion " $(x_j, x_n) \in A_{T'}$  et  $(x_n, x_{j+1}) \in A_{T'}$ " est fautive.

5.3 Appelons "hypothèse H" les 4 premières lignes de la question 5 et montrons que cette hypothèse est absurde.

Supposons (H).

Par (5.1) :  $(x_1, x_n), (x_n, x_{n-1}) \in A_{T'}$ .

Soit

$$j = \max\{i \in [1, n - 2] \mid (x_i, x_n) \in A_{T'}\} \quad (1)$$

Comme  $1 \leq n - 2$  et  $(x_1, x_n) \in A_{T'}$ , l'ensemble qui apparaît dans le membre droit de (1) est non-vidé et par suite  $j$  est bien défini.

Par maximalité de  $j$ , soit  $j = n - 2$  et par (5.1)  $(x_n, x_{j+1}) \in A_{T'}$ , soit  $j < n - 2$  et  $(x_n, x_{j+1}) \in A_{T'}$ . Donc  $(x_j, x_n) \in A_{T'}$  et  $(x_n, x_{j+1}) \in A_{T'}$ , ce qui contredit (5.2). L'hypothèse (H) est absurde. Finalement : si  $T'$  vérifie les 3 premières lignes de la question 5, alors  $T'$  possède un chemin hamiltonien.

**Question 6.** Déduire des questions 4. et 5. que tout tournoi admet un chemin hamiltonien.

**Réponse :** Pour tout entier  $n \geq 1$  nous notons  $P(n)$  la propriété suivante :

tout tournoi à  $n$  sommets possède un chemin hamiltonien.

Nous prouvons par récurrence sur  $n$  que  $\forall n \geq 1, P(n)$ .

**Base**

Tout graphe à un ou deux sommets possède un chemin hamiltonien.

**Pas d'induction**

Soit  $n \geq 3$ . Supposons  $P(n-1)$  et démontrons  $P(n)$ .

Soit  $T'$  un tournoi à  $n$  sommets. Choisissons un sommet  $s$  de  $T'$ . Soit  $T$  le sous-graphe de  $T'$  engendré par  $S_{T'} - \{s\}$ . Le graphe  $T$  est un tournoi à  $n-1$  sommets, donc, d'après  $P(n-1)$ ,  $T$  possède un chemin hamiltonien. La question 5. nous permet de conclure que  $T'$  aussi a un chemin hamiltonien. Nous avons prouvé  $P(n)$ .

**Question 7.** Donner un algorithme qui, à partir d'un tournoi  $T$ , construit un chemin hamiltonien.

**Réponse1 :**

```
Soient x1 et x2 deux sommets quelconques;
L <- (arc(x1,x2)); // ou L <- (arc(x2,x1));
pour i de 3 à n faire
  si arc(xi, premier_sommet(premier_arc(L))) alors
    ajouter_Tete(L, arc(xi, premier_sommet(premier_arc(L))))
  sinon si arc(dernier_sommet(dernier_arc(L))) alors
    ajouter_Queue(L, arc(dernier_sommet(dernier_arc(L))))
  sinon {parcourir L jusqu'à (trouver dans L un arc(x,y) et arc(x,xi) et arc(xi,y)
    supprimer(L,arc(x,y))
    inserer(L,arc(x,xi))
    inserer(L, arc(xi,y))
  }
retourner L
```

**Réponse2 :**

```
cheminHamiltonien (int n){
  si n = 2 {
    si arc(x1 -> x2) alors renvoyer x1,x2
    sinon renvoyer x2, x1
  }
  Sinon {
    u = cheminHamiltonien(n-1);
    Si arc(xn -> u1) alors renvoyer (xn , u);
    Sinon Si arc(u_{n-1} -> xn) alors
      renvoyer (u, xn)
    Sinon
      soit le premier i tel que ui -> xn et xn -> u_{i+1}
      renvoyer (u1, u2, ...ui, xn, u_{i+1}, ... un);
  }
}
```

**Réponse3 :**

```
pour i de 1 à n faire /*ajouter sommet numéro i*/
  j:=i-1;
  tant que j>0 et existe arc de sommet i à sommet C[j] faire
    C[j+1]:=C[j];
    j:=j-1;
  fintantque;
  C[j+1]=i;
finpour;
```

**Réponse4 :** On vérifie que, pour tout graphe  $G$ , la fonction  $f$  calculée par le parcours en profondeur a la propriété suivante :

$$\forall u, v \in S_G, (u, v) \in A_G \Rightarrow f[u] > f[v].$$

Il en résulte que, lorsque  $G$  est un tournoi, l'algorithme suivant calcule bien un chemin hamiltonien.

Chemin-hamiltonien ( $G$ ):

```
faire PP(G)
trier (S , Ch ) /* par ordre décroissant de f[u]. */
afficher (Ch)
```