

Routage compact optimal dans les (k, r) -constellations

Youssou Dieng* — Cyril Gavoille**

LaBRI, Université de Bordeaux
351, cours de la Libération
F-33405 Talence cedex
{Dieng, gavoille}@labri.fr

RÉSUMÉ. Fraigniaud et al., (2001) et indépendamment Thorup et al., (2001) ont montré que tout arbre à n nœuds possède un schéma de routage de plus courts chemins utilisant des adresses, des en-têtes et des tables de routage de $O(\log n)$ bits. Il est ouvert de savoir si ce résultat optimal peut être étendu, ne serait-ce qu'aux réseaux de largeur arborescente deux dont la meilleure borne connue, due à (Peleg, 2000) est $O(\log^2 n)$ bits. Dans cet article, nous étendons ce résultat optimal aux réseaux appelés (k, r) -constellations, c'est-à-dire aux réseaux ne contenant pas $K_{2,r}$ comme mineur et dont les composantes bi-connexes peuvent être rendues planaire-extérieures par la suppression de k sommets. Par exemple, les $(2, 4)$ -constellations contiennent les arbres, les graphes planaire-extérieurs et plus généralement les graphes sans mineur $K_{2,4}$.

ABSTRACT. Fraigniaud et al., (2001) and independently Thorup et al., (2001) show that n -node trees support routing schemes with message headers, node addresses, and routing tables of $O(\log n)$ bits. It still open to know if this optimal result can be extended to the tree-width two graphs. The best known routing scheme require $O(\log^2 n)$ bits (cf. (Peleg, 2000)). In this article, we extend this optimal result to (k, r) -constellations, i.e., $K_{2,r}$ -minor free networks whose bi-connected components are outerplanar by deleting k vertices. For example, $(2, 4)$ -constellations contain trees, outerplanars and more generally all $K_{2,r}$ -minor free networks.

MOTS-CLÉS : routage compact, graphe sans mineur, graphe planaire, graphe planaire-extérieur.

KEYWORDS: compact routing, free-minor graph, planar graph, outerplanar graph.

DOI:10.3166/TSI.30.485-513 © 2011 Lavoisier, Paris

1. Introduction

La communication point-à-point dans les réseaux d'ordinateurs se fait grâce à une fonction de routage. Cette fonction de routage peut être simple pour des réseaux de taille réduite. Cependant, dans les réseaux de grande taille il devient important de réduire la quantité d'informations que chaque nœud doit mettre à disposition de la fonction de routage pour permettre la communication. Alors, il devient capital d'acheminer les messages par des chemins aussi courts que possible.

Les composants d'un *schéma de routage* sont les tables de routage, les adresses, les en-têtes et un algorithme de routage. La *fonction de routage* prend en paramètre l'en-tête de message arrivant et, en fonction de la table de routage du sommet courant, elle détermine le numéro de port par lequel le message doit être retransmis. L'en-tête de message est généré par le sommet émetteur et reste souvent fixe tout au long du trajet. Il est généré à partir de sa table de routage et de l'adresse de destination. Dans beaucoup de schémas, l'en-tête se résume à l'adresse de destination.

L'enjeu est d'optimiser non seulement la longueur des routes mais aussi l'espace requis par les tables de routage, la taille des en-têtes et des adresses de même que la latence de chaque routeur. La latence, appelée aussi temps de routage, est le temps de décision de la fonction de routage.

De nombreux travaux ont été consacrés à la conception de schémas de routage comportant un compromis taille des tables/longueur des routes. Dans le cas d'une topologie quelconque à n nœuds, les tables sont de taille $n^{\Theta(1/s)}$ où s est le *facteur d'étirement*, le ratio maximum sur toutes les paires de nœuds (x, y) entre la longueur de la route et la distance entre x et y . (Voir par exemple (Abraham *et al.*, 2006; Abraham *et al.*, 2008; Cowen, 2001; Peleg *et al.*, 1989; Thorup *et al.*, 2001) et (Dom, 2007; Krioukov *et al.*, 2007; Gavoille, 2001) pour une introduction au routage compact dans l'Internet). Dans toutes ces solutions, le passage à l'échelle s'avère coûteux lorsque s est très proche de 1, c'est-à-dire lorsque les routes sont presque des plus courts chemins, la taille des tables étant alors polynomiale en la taille du réseau.

En passant par l'étude structurelle fine de la topologie sous-jacente du réseau, il est possible d'obtenir dans certains cas des schémas de plus courts chemins avec des tables de taille *poly-logarithmique* en la taille du réseau. C'est le cas des topologies arborescentes où il a été montré que des tables de $O(\log n)$ bits sont possibles (Fraigniaud *et al.*, 2001; Thorup *et al.*, 2001). Notons que ce résultat est à la base des schémas plus généraux de (Thorup *et al.*, 2001) et de (Abraham *et al.*, 2006; Abraham *et al.*, 2008). Il est également connu que les réseaux de largeur arborescente au plus t (une généralisation des arbres) possèdent un routage de plus courts chemins avec des tables, adresses et en-têtes de $O(t \log^2 n)$ bits (Peleg, 2000). Pour $t = 1$ (c'est-à-dire le cas des arbres), cette borne n'est pas optimale, et il est toujours ouvert de savoir si $\Theta(\log n)$ bits suffisent pour toute constante $t \geq 2$.

Dans cet article nous proposons d'étendre le résultat des arbres à des réseaux non valués beaucoup plus complexes : les (k, r) -constellations, définies, entre autre, à partir de structures interdites. Comme nous allons le voir les (k, r) -constellations, sans contenir tous les réseaux de largeur arborescente ≤ 2 , contiennent les réseaux planaire-extérieurs et même certains réseaux de largeur arborescente r .

Dans la suite de cet article, nous utilisons le terme *graphe* à la place de réseau. Les sommets du graphe représentent les machines du réseau et les arêtes du graphe représentent les liens de communication du réseau.

2. Présentation des résultats

2.1. Résultats

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser aux routages dans les graphes planaire-extérieurs. Rappelons qu'un graphe planaire-extérieur est un graphe que l'on peut dessiner sur le plan de telle sorte que tous les sommets bordent la face extérieure. Plus précisément, nous montrons le résultat suivant :

Théorème 1 *Tout graphe planaire-extérieur connexe non valué à n sommets admet un schéma de routage de plus courts chemins avec des adresses, des en-têtes et des tables de routage $O(\log n)$ bits. La latence est constante.*

Ce résultat est une généralisation du schéma de routage pour les arbres, présenté par (Fraigniaud *et al.*, 2001; Thorup *et al.*, 2001). De plus, ce résultat est une réponse à une question posée par (Fraigniaud *et al.*, 2002) consistant à savoir si ce schéma optimal des arbres pouvait être étendu à d'autres types de graphes tels que les graphes planaire-extérieurs.

Dans un deuxième temps, nous donnons une généralisation de ce résultat à une famille de graphes plus large : les (k, r) -constellations.

Rappelons qu'un graphe H est un mineur d'un graphe G si H est un sous-graphe d'un graphe obtenu en contractant des arêtes de G . Le graphe biparti complet $K_{2,r}$ est un graphe avec deux sommets de degré r appelés *pôles* et r sommets de degré deux reliés aux deux pôles. Pour tout graphe G contenant un mineur $K_{2,r}$, on note **A** et **B** les deux composantes connexes de G qui constituent les deux pôles du mineur. Ainsi, montrer que $K_{2,r}$ est un mineur d'un graphe G revient à montrer que G possède deux composantes connexes **A** et **B** avec r chemins disjoints de longueur au moins deux entre **A** et **B**.

Rappelons qu'un graphe est bi-connexe s'il faut supprimer au moins deux sommets pour augmenter le nombre de composantes connexes. Rappelons aussi que les planaire-extérieurs sont définis comme étant les graphes sans mineur $K_{2,3}$ et K_4 . Dans toute la suite, on supposera que les graphes sont connexes.

Définition 1 *Un graphe est une (k, r) -constellation s'il est sans mineur $K_{2,r}$ et si chacune de ses composantes bi-connexes peut être rendue planaire-extérieure par la suppression de k sommets.*

Par exemple, les graphes planaire-extérieurs sont les $(0, 3)$ -constellations, car ils sont sans mineur $K_{2,3}$. Le graphe de la figure 1 est une $(2, 6)$ -constellation car en supprimant les sommets noirs on obtient un graphe planaire-extérieur et, il n'est pas difficile de montrer que ce graphe ne contient pas $K_{2,6}$ comme mineur.

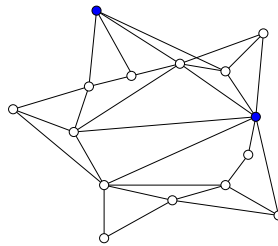


Figure 1. *Une $(2, 6)$ -constellation*

Le résultat principal de l'article est le suivant :

Théorème 2 *Toute (k, r) -constellation connexe non valuée à n sommets admet un schéma de routage de plus courts chemins avec des adresses et des en-têtes de $O((k + 1) \log n)$ bits, et des tables de routage de $O((kr + 1) \log n)$ bits. La latence est $O(\log k + \log r)$.*

Par ailleurs, (Dieng *et al.*, 2008) ont montré que tout graphe sans mineurs $K_{2,4}$ est une $(2, 4)$ -constellation. Par conséquent (on retrouve le théorème 1) :

Corollaire 3 *Les graphes planaire-extérieurs connexes non valués, et plus généralement les graphes sans mineur $K_{2,4}$ connexe non valués, admettent un schéma de routage de plus courts chemins avec des tables, des adresses et des en-têtes de $O(\log n)$ bits. La latence est constante.*

2.2. Plan général du schéma de routage dans les (k, r) -constellations

Les grandes lignes du schéma de routage pour les (k, r) -constellations non valuées peuvent être présentées en trois grandes étapes. Soit G une (k, r) -constellation et \mathcal{T} un arbre couvrant de G de plus courts chemins.

Étape 1 : On construit grâce à (Fraigniaud *et al.*, 2001; Thorup *et al.*, 2001) un schéma de routage pour \mathcal{T} . Ce schéma de routage suppose une numérotation des sommets de G suivant un parcours en profondeur (DFS) particulier sur \mathcal{T} . Ainsi, pour

chaque sommet x , l'ensemble des numéros des sommets du sous-arbre de racine x , noté \mathcal{T}_x , forme un intervalle d'entiers. Dans la suite, par abus de langage nous appellerons *segment* tout ensemble de sommets numérotés consécutivement modulo n . Chaque sommet stocke les bornes de l'intervalle qui déterminent le sous-arbre \mathcal{T}_x . Ainsi, pour toute destination y , le sommet x peut facilement tester si y est un descendant de x dans \mathcal{T} , c'est-à-dire si $y \in \mathcal{T}_x$ ou pas. Si c'est la cas x peut alors router vers y par de plus courts chemins dans G en utilisant le schéma de routage pour \mathcal{T} .

Étape 2 : Pour chaque composante bi-connexe de G , on construit un schéma de routage de plus courts chemins. Ce schéma de routage fait appel au schéma du théorème 1. On attribue à chaque sommet x une unique composante bi-connexe notée $\mathbf{Cc}(x)$. La manière dont les composantes bi-connexes sont attribuées aux sommets est explicitée dans la section 4. On construit ensuite le schéma de routage dans $\mathbf{Cc}(x)$ que l'on stocke dans la table de routage de x .

Pour mettre en place ce schéma, on exploite le fait que $\mathbf{Cc}(x)$ peut être rendue planaire-extérieur par la suppression d'au plus k sommets. On utilise aussi la propriété énoncée dans le lemme 9 qui fait que $\mathbf{Cc}(x)$ possède une numérotation de ses sommets telle que pour tout ensemble Ω d'arêtes incidentes à x , l'ensemble des destinations de $\mathbf{Cc}(x)$ dont le plus court chemin depuis x utilisent Ω peut être compacté en $O(|\Omega|)$ segments. De plus, en posant $X_{\mathbf{Cc}(x)}$ le plus petit ensemble de sommets tels que $H = \mathbf{Cc}(x) \setminus X_{\mathbf{Cc}(x)}$ est planaire-extérieur, on peut facilement remarquer que toute destination qui n'utilise¹ aucun sommet de $X_{\mathbf{Cc}(x)}$ est accessible à x par des chemins de H . Ainsi en mettant en place un schéma de routage de plus courts chemins pour H , et en compactant sous forme de segments l'ensemble des destinations qui utilisent les sommets de $X_{\mathbf{Cc}(x)}$, on peut facilement en déduire un schéma de routage pour $\mathbf{Cc}(x)$. Étant donné que H est planaire-extérieur, alors grâce au théorème 1 il admet un schéma de routage avec des tables de $O(\log n)$ bits.

Étape 3 : Enfin, on utilise la structure du graphe, en particulier le fait que $K_{2,r}$ est un mineur exclu, pour construire un schéma de routage de plus courts chemins permettant à chaque sommet x de router vers toute destination y qui n'est ni dans \mathcal{T}_x ni dans la même composante bi-connexe que x .

Le schéma de routage dans G est donc une combinaison astucieuse de ces trois schémas de routage.

1. Pour tout sommet $x \in G$ et une destination $y \in G$, on dit que y utilise un sommet $w \in G$ si le chemin produit par notre schéma de routage pour aller de x à y passe par w .

3. Routage dans les graphes planaire-extérieurs

Cette section est consacrée essentiellement à la démonstration du théorème 1.

3.1. Construction du schéma de routage pour les graphes planaire-extérieurs

Considérons un graphe planaire-extérieur G à n sommets. On suppose un plongement de G sur le plan tel que tous les sommets soient sur le bord de la face extérieure. Les sommets de G sont alors numérotés suivant un parcours bordant la face extérieure par des entiers consécutifs de $[1, n]$.

Soit \mathcal{T} un arbre couvrant de G de plus courts chemins, enraciné en un sommet r_0 choisi arbitrairement. Par exemple sur la figure 2, l'arbre \mathcal{T} est représenté par les arêtes noirs et gris foncé. Pour tout sommet $x \in G$, on définit :

- \mathcal{T}_x le sous-arbre de \mathcal{T} enraciné en x et $H_x = G \setminus \mathcal{T}_x$.
- **Table- \mathcal{T}_x** une table de routage pour les sommets de \mathcal{T}_x , construite à partir de \mathcal{T} . Ainsi, pour toute destination $y \in \mathcal{T}_x$, **Table- $\mathcal{T}_x[y]$** donne le numéro de port de l'arête menant vers y .
- T^x un arbre enraciné en x de plus courts chemins couvrant G .
- **Table- H_x** une table de routage pour les sommets de H_x construite à partir de T^x en compactant sous forme de segments l'ensemble des destinations utilisant le même port. Ainsi, pour toute destination $y \in H_x$, **Table- $H_x[y]$** donne le numéro de port de l'arête menant vers y .

Sur la figure 2, le sous-arbre \mathcal{T}_x est représenté par les arêtes noirs et H_x est le sous-graphe de G engendré par les sommets du sous-arbre gris foncé. Dans toute la suite, on notera par $N(x)$ l'ensemble des voisins de x dans G .

3.1.1. L'algorithme de routage

L'algorithme de routage pour G présenté ci-dessous est élémentaire, l'originalité venant de son implémentation.

ROUTE de x vers y :

1. si $y \in \mathcal{T}_x$, alors retourner **Table- $\mathcal{T}_x[y]$**
2. sinon, retourner **Table- $H_x[y]$**

3.1.2. Explications de l'algorithme

Nous pouvons remarquer sans ambiguïté que pour tout couple (x, y) de sommets de G , on a soit $y \in \mathcal{T}_x$ soit $y \in H_x$.

Si $y \in \mathcal{T}_x$, alors le port permettant d'aller en y par de plus courts chemins dans G est dans la table **Table- \mathcal{T}_x** . Donc, en retournant **Table- $\mathcal{T}_x[y]$** , on retourne un port sur un plus court chemin entre x et y dans G .

Si $y \notin \mathcal{T}_x$, alors y est dans H_x et dans ce cas, le port permettant d'aller en y par de plus courts chemins dans G est dans la table **Table- H_x** . Donc en retournant **Table- $H_x[y]$** on retourne un port sur un plus court chemin entre x et y .

L'algorithme **ROUTE** est donc un algorithme de routage de plus courts chemins car les deux tables de routage utilisées sont par définition des tables de routage de plus courts chemins.

3.2. Implémentation

3.2.1. Les tables de routage

Pour chaque sommet $x \in G$, la table de routage de x est constituée des tables **Table- \mathcal{T}_x** et **Table- H_x** .

La table de routage **Table- \mathcal{T}_x** est construite à partir d'un schéma de routage compact dans \mathcal{T} . D'après (Fragliaud *et al.*, 2001) et (Thorup *et al.*, 2001), avec une permutation adéquate des numéros de ports et un adressage sur $O(\log n)$ bits des sommets de \mathcal{T} , la table **Table- \mathcal{T}_x** peut être implémentée par une structure de données de taille seulement $O(\log n)$ bits. La technique utilisée dans le schéma de (Fragliaud *et al.*, 2001) et (Thorup *et al.*, 2001) est de répartir l'information entre x et les sommets de \mathcal{T}_x . Notons que ce schéma compact de \mathcal{T} permet également de tester si y est un descendant de x ou pas.

La table de routage **Table- H_x** est construite en compactant sous forme de segments l'ensemble des destinations de H_x passant par le même port. En d'autres termes, pour chaque port de sortie p de x , il existe une entrée unique dans **Table- H_x** qui contient un ou plusieurs segments de destinations utilisant le port p .

Il existe un résultat de (Frederickson *et al.*, 1988) disant que si G est un graphe planaire-extérieur à n sommets numérotés consécutivement suivant un parcours bordant la face extérieure, alors, pour tout arbre couvrant A de racine x (en particulier d'arbre de plus courts chemins), et tout voisin v de x , l'ensemble de sommets du sous-arbre A_v peut être compacté en un seul segment.

Par conséquent, si on utilise la numérotation indiquée par (Frederickson *et al.*, 1988), chaque entrée de la table **Table- H_x** possède au plus un segment. Soit $\Omega(x) \subseteq N(x)$ l'ensemble tel que $\forall y \in H_x, \exists v \in \Omega(x)$ tel que v est sur un plus court chemin entre x et y dans G . Alors, la table **Table- H_x** possède $|\Omega(x)|$ entrées. Grâce au lemme 4, nous allons montrer que $|\Omega(x)| \leq 6$, et donc la table **Table- H_x** possède au plus 6 segments. Chaque segment peut être codé avec $2 \lceil \log n \rceil$ bits, donc au total la table **Table- H_x** peut être codée en $12 \lceil \log n \rceil$ bits. Sur la figure 2, les sommets de $\Omega(x)$ sont les sommets colorés en gris clair.

3.2.2. Les adresses et les en-têtes

L'adresse du sommet x est constituée de son numéro issu de la numérotation suivant le bord de la face extérieure du plongement de G plus un numéro issu d'une numérotation utilisée pour le routage dans \mathcal{T}_x de taille $\log n + o(\log n)$ bits (Thorup *et al.*, 2001). Donc l'adresse de chaque sommet est codée en $2 \log n + o(\log n)$ bits. Les en-têtes des messages sont constituées de l'adresse du sommet de destination, donc de même taille.

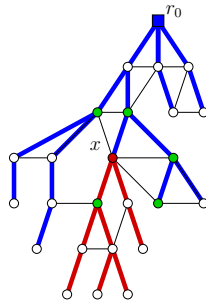


Figure 2. Un graphe planaire-extérieur avec un arbre couvrant \mathcal{T} enraciné en r_0 et un sommet x distingué avec son sous-arbre \mathcal{T}_x . Les arêtes noirs induisent \mathcal{T}_x et les arêtes noirs et gris foncé induisent \mathcal{T} . Les sommets en gris clair constituent l'ensemble $\Omega(x)$

3.2.3. Borne supérieure pour $|\Omega(x)|$

Cette section est consacrée à la preuve du lemme 4.

Lemme 4 Pour tout sommet $x \in G$, on a $|\Omega(x)| \leq 6$.

Soit $\Omega_1(x) \subseteq N(x) \cap \mathcal{T}_x$, un ensemble minimal tel que $\forall v \in \Omega_1(x), \exists y \in H_x$ tel que v est sur un plus court chemin dans G entre x et y et tout chemin dans G entre x et y qui évite les sommets de \mathcal{T}_x n'est pas un plus court chemin dans G .

Soit $\Omega_2(x) = N(x) \cap H_x$. Si x, v, \dots, y est un plus court chemin de x à y . Alors, ou bien $v \in \Omega_1(x)$, ou bien $v \in \Omega_2(x)$. Par conséquent, $|\Omega(x)| \leq |\Omega_1(x)| + |\Omega_2(x)|$. Sur la figure 2, on a $|\Omega_1(x)| = 1$ (il n'y a qu'un seul sommet gris clair appartenant à $N(x) \cap \mathcal{T}_x$). L'ensemble $\Omega_2(x)$ couvre le reste des sommets gris clair et on a $|\Omega_2(x)| = 4$. On a alors dans notre exemple $|\Omega(x)| \leq 5$.

Nous allons montrer que $|\Omega_1(x)| + |\Omega_2(x)| \leq 6$ grâce aux trois propositions qui vont suivre.

Proposition 5 Pour tout sommet $x \in G$, on a $|\Omega_1(x)| \leq 2$ et $|\Omega_2(x)| \leq 6$.

Démonstration. Montrons par l'absurde que $|\Omega_1(x)| \leq 2$. En effet, supposons que $|\Omega_1(x)| \geq 3$. Donc $\exists X \subseteq H_x$ et au moins 3 sommets $u, v, w \in N(x) \cap \mathcal{T}_x$ tel que tout chemin entre x et X dans G qui ne passe pas par les sommets u, v, w n'est pas un plus court chemin. Il existe alors 3 plus courts chemins p_1, p_2, p_3 dans G entre x et X tels que $u \in p_1, v \in p_2$ et $w \in p_3$. De plus, comme $u, v, w \notin H_x$, alors p_1, p_2, p_3 sont 3 chemins disjoints de longueur au moins 2. Par ailleurs, vu que G est connexe et que $X \not\subseteq \mathcal{T}_x$, alors il existe un ensemble P de chemins dans \mathcal{T} entre r_0 et chaque sommet de X et $\forall p \in P, x \notin p$. Donc, considérant le sous-graphe de G induit par les sommets de $\{r_0\} \cup P \cup X \cup \{x\} \cup p_1 \cup p_2 \cup p_3$ et, en contractant $\{r_0\} \cup P$, on obtient un mineur $K_{2,3}$; ce qui est absurde car G est sans mineur $K_{2,3}$. Donc, pour tout $x \in G$, on a $|\Omega_1(x)| \leq 2$.

Pour montrer que $|\Omega_2(x)| \leq 6$, il suffit de montrer la propriété suivante :

Proposition 6 Soit $x \in G$ tel que $\text{dist}_G(r_0, x) = k$, alors :

- 1) pour tout sommet $v \in \Omega_2(x)$, $\text{dist}_G(r_0, v) \in [k - 1, k + 1]$, et
- 2) pour tout entier $i \in [k - 1, k + 1]$, il y a au plus deux sommets $v \in \Omega_2(x)$ tels que $\text{dist}_G(r_0, v) = i$.

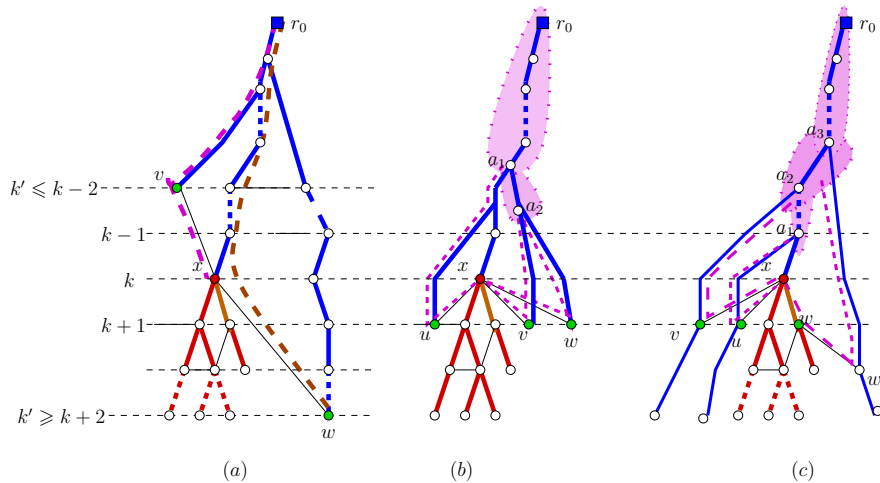


Figure 3. Illustrations pour les propositions 6 et 7. Un arbre \mathcal{T} enraciné en un sommet r_0 , couvrant G de plus courts chemins et des configurations impossibles dans le voisinage d'un sommet x supposé être à distance k par rapport à r_0 . Les tirets colorés représentent des chemins dans G . Les zones grisées représentent un ensemble d'arêtes et de sommets à contracter pour faire apparaître un mineur $K_{2,3}$

Démonstration. Nous allons faire une preuve par l'absurde du premier point en considérant deux sous cas : le cas où $v \in \Omega_2(x)$ et $\text{dist}_G(r_0, v) \leq k - 2$ et le cas où $v \in \Omega_2(x)$ et $\text{dist}_G(r_0, v) \geq k + 2$.

1) Supposons que $\exists v \in \Omega_2(x)$ tel que $\text{dist}_G(r_0, v) \leq k - 2$. Soit $p_{r_0, v}$ un plus court chemin dans G entre r_0 et v (sur l'exemple de la figure 3(a), c'est le chemin gris foncé entre r_0 et v). Vu que v est adjacent à x dans G , alors le chemin $p_{r_0, x} = p_{r_0, v} \cup (v, x)$ entre r_0 et x dans G (sur l'exemple de la figure 3(a), le chemin $p_{r_0, x}$ est représenté par des tirets à gauche de x) est de longueur au plus $k - 1$ car, on $|p_{r_0, x}| = |p_{r_0, v}| + |(v, x)| \leq k - 1$. Ce qui est absurde car, par hypothèse on a $\text{dist}_G(r_0, x) = k$. Donc, tout sommet $v \in \Omega_2(x)$ est tel que $\text{dist}_G(r_0, v) \geq k - 1$.

2) Supposons que $\exists w \in \Omega_2(x)$ tel que $\text{dist}_G(r_0, w) \geq k + 2$. Soit $p_{r_0, x}$ un plus court chemin dans G entre r_0 et x . Vu que x est adjacent à w dans G , alors le chemin $p_{r_0, w} = p_{r_0, x} \cup (x, w)$ entre r_0 et w est de longueur $k + 1$ (sur l'exemple de la figure 3(a), le chemin $p_{r_0, w}$ est représenté par des tirets à droite de x), ce qui est absurde vu que par hypothèse on a $\text{dist}_G(r_0, w) \geq k + 2$. Donc, il n'existe pas de sommet w adjacent à x dans G tel que $\text{dist}_G(r_0, w) \geq k + 2$. Par conséquent, tout sommet $v \in \Omega_2(x)$ est tel que $\text{dist}_G(r_0, v) \leq k + 1$.

Donc, tout sommet $v \in \Omega_2(x)$, est tel que $k - 1 \leq \text{dist}_G(r_0, v) \leq k + 1$. Par conséquent, le premier cas de la proposition 6 est vérifié.

Nous allons faire une preuve par l'absurde du deuxième point. Supposons u, v, w trois sommets de $\Omega_2(x)$, tels que $\text{dist}_G(r_0, u) = \text{dist}_G(r_0, v) = \text{dist}_G(r_0, w) = i \in [k - 1, k + 1]$. Soit \mathcal{T} un arbre couvrant G de plus courts chemins. Sur la figure 3(b), on a la configuration pour le cas $i = k + 1$. Donc, il existe trois chemins $p_{r_0, u}, p_{r_0, v}, p_{r_0, w}$ dans \mathcal{T} tels que $p_{r_0, u}$ est le chemin de \mathcal{T} entre r_0 et u , $p_{r_0, v}$ est le chemin de \mathcal{T} entre r_0 et v et $p_{r_0, w}$ est le chemin de \mathcal{T} entre r_0 et w . Soit \mathfrak{R} le sous-graphe de G induit par $p_{r_0, u} \cup (u, x) \cup p_{r_0, v} \cup (v, x) \cup p_{r_0, w} \cup (w, x)$. Soit a_1 le plus proche ancêtre commun de u et v dans \mathcal{T} et a_2 le plus proche ancêtre commun de u et w dans \mathcal{T} . Soit \mathfrak{R} le graphe obtenu en contractant le chemin dans \mathfrak{R} entre r_0 et a_1 et le chemin dans \mathfrak{R} entre a_1 et a_2 . Soit r_c le nouveau sommet de \mathfrak{R} résultant de cette contraction. Sur la figure 3(b), le sommet r_c résulte de la contraction des arêtes gris foncé sur la zone grise. Vu que dans G , les sommets u, v, w sont tous à la même distance par rapport à r_0 , alors il existe 3 chemins $p_{r_c, u}, p_{r_c, v}, p_{r_c, w}$ dans \mathfrak{R} tels que $p_{r_c, u}$ est le chemin dans \mathfrak{R} entre r_c et u , $p_{r_c, v}$ est le chemin de \mathfrak{R} entre r_c et v et $p_{r_c, w}$ le chemin de \mathfrak{R} entre r_c et w . Sur la figure 3(b), ces trois chemins sont les chemins gris foncés reliant la zone grise à chacun des sommets u, v et w . Par ailleurs, du fait que les sommets u, v, w ne soient pas ancêtres l'un de l'autre, on a $|p_{r_c, u}| \geq 1, |p_{r_c, v}| \geq 1, |p_{r_c, w}| \geq 1$. Par conséquent, en considérant les chemins $P_1 = p_{r_c, u} \cup (u, x), P_2 = p_{r_c, v} \cup (v, x)$ et $P_3 = p_{r_c, w} \cup (w, x)$ on obtient trois chemins disjoints de longueur ≥ 2 entre r_c et x . Le sous-graphe de \mathfrak{R} induit par ces trois chemins est un $K_{2,3}$. Or les seules opérations appliquées à \mathfrak{R} pour obtenir ce sous-graphe sont des contractions d'arêtes. Donc $K_{2,3}$ est un mineur de G car \mathfrak{R} est un sous-graphe de G par construction. Ce qui est absurde car par hypothèse G est sans mineur $K_{2,3}$. Donc, pour tout entier $i \in [k - 1, k + 1]$ il y a au plus deux sommets de $\Omega_2(x)$ qui sont à distance i par rapport à r_0 dans G .

D'où, pour tout $i \in [k - 1, k + 1]$, il y a au plus deux sommets $v \in \Omega_2(x)$ tels que $\text{dist}_G(r_0, v) = i$. Ce qui termine la preuve de la proposition 6. \square

Grâce à la proposition 6, nous avons montré que $|\Omega_2(x)| \leq 6$. Donc, nous avons démontré le lemme 5. \square

Pour montrer que $|\Omega_1(x)| + |\Omega_2(x)| \leq 6$, nous allons montrer le proposition suivante :

Proposition 7 *Pour tout sommet $x \in G$ tel que $\text{dist}_G(r_0, x) = k$ on a :*

1 si x a 2 voisins $v, v' \in \Omega_2(x)$ tels que $\text{dist}_G(r_0, v) = \text{dist}_G(r_0, v') = k + 1$, alors on a $\Omega_1(x) = \emptyset$.

2 si x a 2 voisins $v, v' \in \Omega_1(x)$, alors $\nexists w \in \Omega_2(x)$ tel que $\text{dist}_G(r_0, w) = k + 1$.

Démonstration. Démontrons le point 1 de la proposition 7 par l'absurde. Soit \mathcal{T} un arbre couvrant G de plus courts chemins, enraciné en un sommet arbitraire r_0 . Soit x un sommet de G tel que $\text{dist}_G(r_0, x) = k$ et que $\exists u, v \in \Omega_2(x)$ tels que $\text{dist}_G(r_0, u) = k + 1$ et $\text{dist}_G(r_0, v) = k + 1$.

Supposons qu'il existe un sommet w tel que $w \in \Omega_1(x)$. Posons w_1 un sommet de H_x tel que $\text{dist}_{H_x \cup x}(x, w_1) > \text{dist}_G(x, w_1)$ et w_1 utilise w . Posons p_{r_0, w_1} le chemin dans \mathcal{T} entre r_0 et w_1 , $p_{r_0, u}$ le chemin dans \mathcal{T} entre r_0 et u et, $p_{r_0, v}$ le chemin dans \mathcal{T} entre r_0 et v . Vu que $x \neq r_0$, on a $k \geq 1$. Donc $|p_{r_0, v}| \geq 2$ et $|p_{r_0, w}| \geq 2$. Posons p_{x, w_1} un plus court chemin dans G entre x et w_1 passant par w .

Supposons que le chemin p_{r_0, w_1} ne passe ni par u ni par v . Soit a_1 le plus proche ancêtre commun de w et u , a_2 le plus proche ancêtre commun de u et v , et a_3 le plus proche ancêtre commun de v et w_1 . Soit \mathfrak{R} le sous-graphe de G engendré par les chemins dans \mathcal{T} entre r_0 et les sommets u, v, w, w_1 . Soit \mathfrak{R} le graphe résultant de la contraction des chemins entre r_0 et a_1 , r_0 et a_2 et r_0 et a_3 et posons r_c le sommet résultant de cette contraction. Sur la figure 3(c), cette zone correspond à la zone grise. Par définition, aucun des sommets u, v, w_1 n'est descendant de x . Alors chacun des chemins $p_{r_c, u}$ dans \mathfrak{R} entre r_c et u , $p_{r_c, v}$ dans \mathfrak{R} entre r_c et v , $p_{r_c, w}$ dans \mathfrak{R} entre r_c et w_1 est de longueur au moins 1. Par ailleurs, par définition aucun des sommets u, v, w n'est ancêtre de l'autre dans \mathcal{T} . Donc ces trois chemins $p_{r_c, u}, p_{r_c, v}, p_{r_c, w}$ sont disjoints. Par conséquent, les chemins $p_{r_c, u} \cup (u, x)$, $p_{r_c, v} \cup (v, x)$, et $p_{r_c, w} \cup p_{w, x}$ constituent 3 chemins disjoints de longueur ≥ 2 entre r_c et x . Donc G admet $K_{2,3}$ comme mineur ; ce qui est absurde par hypothèse. Ces trois chemins sont représentés par des tirets sur la figure 3(c). Par conséquent, p_{r_0, w_1} passe soit par u soit par v .

On peut donc supposer sans perdre de généralité que p_{r_0, w_1} passe par u . Donc, on a $|p_{r_0, w_1}| = |p_{r_0, u}| + |p_{u, w_1}|$ avec p_{u, w_1} un plus court chemin entre u et w_1 . Or $|p_{r_0, u}| = k + 1$. Donc $|p_{r_0, w_1}| = k + 1 + |p_{u, w_1}|$. De plus, par définition de $\Omega_1(x)$ et $\Omega_2(x)$ tout plus court chemin p dans H_x entre x et w_1 est tel que $p > p_{x, w_1}$. Donc, $|p_{u, w_1}| + 1 > p_{x, w_1}$. D'où, $|p_{u, w_1}| + 1 + k > p_{x, w_1} + k$. Or $|p_{r_0, w_1}| = k + 1 + |p_{u, w_1}|$. Donc on a $|p_{r_0, w_1}| > p_{x, w_1} + k$; ce qui est absurde car p_{r_0, w_1} est un plus court chemin dans G entre r_0 et w_1 . Par conséquent, il n'existe pas de sommet w tel que $w \in \Omega_1(x)$.

Montrons par l'absurde le point 2 de la proposition 7. En effet, soit x un sommet de G tel que $\exists u, v \in \Omega_1(x)$. Supposons qu'il existe un sommet w tel que $w \in \Omega_2(x)$. Soit u_1 un sommet de H_x tel que $\text{dist}_{H_x}(x, u_1) > \text{dist}_G(x, u_1)$ et u_1 utilise u . Soit v_1 un sommet de H_x tel que $\text{dist}_{H_x}(x, v_1) > \text{dist}_G(x, v_1)$ et v_1 utilise v .

Posons p_{r_0, u_1} le chemin dans \mathcal{T} entre r_0 et u_1 , et p_{x, u_1} un plus court chemin dans G entre x et u_1 tel que $u \in p_{x, u_1}$.

Posons p_{r_0, v_1} le chemin dans \mathcal{T} entre r_0 et v_1 et p_{x, v_1} un plus court chemin dans G entre x et v_1 tel que $v \in p_{x, v_1}$.

Vu que $x \neq r_0$, on a $k \geq 1$. Donc le chemin $p_{r_0, w}$ dans \mathcal{T} entre r_0 et w est de longueur ≥ 2 .

Si $w \notin p_{r_0, u_1}$ et $w \notin p_{r_0, v_1}$, alors les chemins $p_{r_0, u_1} \cup p_{x, u_1}$, $p_{r_0, v_1} \cup p_{x, v_1}$ et $p_{r_0, w \cup (w, x)}$ constituent 3 chemins disjoints entre r_0 et x . On en déduit un mineur $K_{2,3}$ dans G ; ce qui est absurde par hypothèse. Donc, on a soit $w \in p_{r_0, u_1}$ soit $w \in p_{r_0, v_1}$.

On peut donc supposer sans perdre de généralité que $w \in p_{r_0, u_1}$. On a donc, $|p_{r_0, u_1}| = k + 1 + |p_{w, u_1}|$ avec p_{w, u_1} un plus court chemin dans G entre w et u_1 . En outre, par définition de $\Omega_1(x)$ et $\Omega_2(x)$, on a $|p_{w, u_1}| + 1 > |p_{x, u_1}|$. Donc, $|p_{w, u_1}| + 1 + k > |p_{x, u_1}| + k$; ce qui est absurde car $|p_{w, u_1}| + 1 + k$ est la longueur du chemin dans \mathcal{T} entre r_0 et u et \mathcal{T} est un arbre de plus courts chemins dans G . Donc, on a $w \notin p_{r_0, u_1}$.

Ce qui a comme conséquence : $\nexists w \in \Omega_2(x)$. D'où, on a $\Omega_2(x) = \emptyset$. Ce qui termine la preuve de la proposition 7. \square

En conséquence de tout cela, on peut facilement en déduire $|\Omega(x)|$. En effet, considérons chacun des cas de figure suivants :

Cas 1 : Si $|\Omega_1(x)| = 2$, alors on a $|\Omega_2(x)| \leq 4$. En effet, si on avait $|\Omega_2(x)| \geq 4$, alors il existerait au moins trois sommets $u, v, w \in \Omega_2(x)$ tels que $\text{dist}_G(r_0, u) = \text{dist}_G(r_0, v) = \text{dist}_G(r_0, w)$; ce qui est impossible d'après la proposition 6. D'où on a : $|\Omega(x)| \leq |\Omega_1(x)| + |\Omega_2(x)| = 6$.

Cas 2 : Si $|\Omega_2(x)| = 5$, alors il y a au moins un sommet $u \in \Omega_2(x)$ tel que $\text{dist}_G(r_0, u) = k + 1$ car sinon, il existerait au moins 3 sommets $u, v, w \in \Omega_2(x)$ tels que $\text{dist}_G(r_0, u) = \text{dist}_G(r_0, v) = \text{dist}_G(r_0, w)$; ce qui est impossible d'après la proposition 6. Donc, on a $|\Omega_1(x)| \leq 1$ d'après le cas 1. D'où, on a $|\Omega(x)| \leq |\Omega_1(x)| + |\Omega_2(x)| = 6$.

Cas 3 : Si $|\Omega_2(x)| = 6$, alors il y a deux sommets $u, v \in \Omega_2(x)$ tels que $\text{dist}_G(r_0, u) = \text{dist}_G(r_0, v) = k + 1$ car sinon, il existerait au moins 3 sommets $u, v, w \in \Omega_2(x)$ tels que $\text{dist}_G(r_0, u) = \text{dist}_G(r_0, v) = \text{dist}_G(r_0, w)$; ce qui est impossible d'après la proposition 6. D'où, on a $|\Omega_1(x)| = 0$ d'après la proposition 7. Donc, on a $|\Omega(x)| \leq |\Omega_1(x)| + |\Omega_2(x)| = 6$.

Cas 4 : Si $|\Omega_2(x)| \leq 4$, alors on a $|\Omega(x)| \leq |\Omega_1(x)| + |\Omega_2(x)| \leq 6$ car, d'après la proposition 5 on a $|\Omega_1(x)| \leq 2$.

Nous avons donc montré que pour tout x , $|\Omega(x)| \leq 6$. Ce qui termine la preuve du lemme 4.

4. Routage compact dans les (k, r) -constellations

La propriété de numérotation des graphes planaires-extérieurs (Frederickson *et al.*, 1988) se révèle fondamentale dans le schéma de routage. Dans cette section, nous donnons une définition plus générale de cette propriété que nous appellerons la f -propriété d'intervalle. Le schéma de routage pour les (k, r) -constellations est construit selon la même technique que celle utilisée pour les graphes planaire-extérieurs.

Pour tout ensemble X de sommets numérotés de 1 à n , on note $\text{seg}(X)$ le plus petit nombre de segments (modulo n) dont l'union est X .

Définition 2 (Propriété d'intervalle) *Un graphe G a une f -propriété d'intervalle pour une fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ s'il existe une numérotation des sommets de G telle que pour tout sommet $x \in G$, tout ensemble $\Omega \subseteq N(x)$ et tout arbre T de plus courts chemins, enraciné en x :*

$$\sum_{v \in \Omega} \text{seg}(T_v) \leq f(|\Omega|).$$

En d'autres termes, si on compacte sous forme de segments l'ensemble des destinations qui utilisent un voisin de x dans Ω , alors le nombre de segments est majoré par une fonction de $|\Omega(x)|$.

Si G est un graphe planaire-extérieur, il faut exactement $|\Omega(x)|$ segments. C'est le minimum qu'on peut espérer puisque $\sum_{v \in \Omega} \text{seg}(T_v) \geq |\Omega|$.

4.1. Construction du schéma de routage

Soit G une (k, r) -constellation connexe à n sommets et soit T un arbre de plus courts chemins couvrant G enraciné en un sommet arbitraire r_0 de G . On considère Id_1 une numérotation des sommets de G suivant un DFS sur T .

Soit $\text{Route-}T(x)$ une table de routage construite à partir de l'arbre T dans laquelle seuls les sommets descendants de x sont préservés. Ainsi, pour toute destination $y \in T_x$, $\text{Route-}T(x)[y]$ donne le port vers y . En stockant en x le segment sur $O(\log n)$ bits correspondant aux sommets de T_x , x peut déterminer en temps constant si une destination $y \in T_x$ ou pas.

Pour tout sommet $x \in G$, on note $\text{Cc}(x)$ la composante bi-connexe de x définie de la manière suivante : la composante $\text{Cc}(x)$ est celle qui contient x si x n'est pas un sommet d'articulation. Dans le cas où x est un sommet d'articulation la composante $\text{Cc}(x)$ est la composante bi-connexe contenant l'arête qui relie x à son père dans T .

Pour permettre à chaque sommet x de pouvoir reconnaître à moindre coût sa composante bi-connexe, nous allons numéroter consécutivement les composantes bi-connexes de G . Pour cela, soit \mathbf{Cc}_0 la composante bi-connexe de G contenant r_0 . On considère un arbre \mathcal{T} dont les sommets sont les composantes bi-connexes et les sommets d'articulations de G . Les arêtes sont toutes paires (C, x) où x est un sommet d'articulation de la composante C . La racine de \mathcal{T} est le sommet \mathbf{Cc}_0 représentant la composante contenant r_0 .

Soit une numérotation des composantes bi-connexes suivant un DFS sur \mathcal{T} par des entiers de 1 et $|V(\mathcal{T})| \leq n$.

Pour toute composante bi-connexe \mathbf{Cc} de G , soit $X_{\mathbf{Cc}}$ un ensemble d'au plus k sommets tel que $\mathbf{Cc} \setminus X_{\mathbf{Cc}}$ est planaire-extérieur. Les sommets de chaque composante sont numérotés consécutivement d'une manière que nous expliquerons dans la section implémentation. Notons seulement ici que pour chaque composante \mathbf{Cc} de G , on numérote en premier les sommets de $X_{\mathbf{Cc}}$.

L'adresse de tout sommet x contient une table, notée $\mathbf{AdrX}(x)$, où la i -ème entrée contient le port de sortie pour aller, selon un plus court chemin, du i -ème sommet de $X_{\mathbf{Cc}(x)}$ à x . La taille de cette table est $O(k \log n)$ bits. Pour pouvoir déterminer le rang $i = I_z$ d'un sommet $z \in X_{\mathbf{Cc}(x)}$, chaque sommet $z \in X_{\mathbf{Cc}(x)}$ stocke I_z . Donc nous avons un moyen de router de tout sommet $z \in X_{\mathbf{Cc}(x)}$ vers toute destination x . Nous allons construire une structure de données permettant à tout sommet $z \in \mathbf{Cc}(x) \setminus X_{\mathbf{Cc}(x)}$ de router vers x .

Soit $x \notin X_{\mathbf{Cc}(x)}$:

1) Soit $\mathbf{TableCc}(x)$ une table de routage de plus courts chemins dans $\mathbf{Cc}(x) \setminus X_{\mathbf{Cc}(x)}$. Donc pour toute destination $y \in \mathbf{Cc}(x) \setminus X_{\mathbf{Cc}(x)}$, $\mathbf{TableCc}(x)[y]$ donne le numéro de port permettant d'aller de x à y par un plus court chemin dans le sous-graphe planaire-extérieur $\mathbf{Cc}(x) \setminus X_{\mathbf{Cc}(x)}$. Notons que $\mathbf{TableCc}(x)$ n'est pas forcément une table de routage de plus courts chemins dans G mais, il l'est pour toute destination de $\mathbf{Cc}(x)$ qui n'utilise aucun sommet de $X_{\mathbf{Cc}(x)}$. La table $\mathbf{TableCc}(x)$ sert donc à router uniquement vers les destinations de $\mathbf{Cc}(x)$ qui n'utilisent pas $X_{\mathbf{Cc}(x)}$.

2) Soit $\mathbf{Table-X}_{\mathbf{Cc}(x)}$ une table de routage de plus courts chemins pour $\mathbf{Cc}(x)$ dans laquelle seuls les destinations de $\mathbf{Cc}(x)$ qui utilisent $X_{\mathbf{Cc}(x)}$ sont préservées. Pour toute destination $y \in \mathbf{Cc}(x)$, $\mathbf{Table-X}_{\mathbf{Cc}(x)}[y]$ donne le numéro de port permettant d'aller de x vers y .

Donc, nous avons construit les structures de données nécessaires pour router entre tout couple de sommets x, y tel que $\mathbf{Cc}(y) = \mathbf{Cc}(x)$. Il reste alors à construire pour chaque sommet x une structure de données permettant de router vers toute destination $y \notin T_x$ et $\mathbf{Cc}(y) \neq \mathbf{Cc}(x)$.

Pour tout sommet $x \in G$, soit $\mathbf{TableOutCc}(x)$ une table de routage de plus courts chemins de x permettant de router vers toute destination de G qui n'est pas dans $\mathbf{Cc}(x)$. Donc pour toute destination y telle que $\mathbf{Cc}(y) \neq \mathbf{Cc}(x)$, $\mathbf{TableOutCc}(x)[y]$ donne le numéro de port ou l'arête menant vers y .

4.2. L'algorithme de routage

ROUTE de x vers y :

1. si $y \in T_x$, retourner **Route- $T(x)[y]$** , sinon
2. si $\mathbf{Cc}(y) = \mathbf{Cc}(x)$
 - 2.1. si $x \in X_{\mathbf{Cc}(x)}$, retourner **AdrX(y) $[I_x]$** , sinon
 - 2.2. si $y \in \mathbf{Table-}X_{\mathbf{Cc}(x)}$ retourner **Table- $X_{\mathbf{Cc}(x)}[y]$** , sinon
 - 2.3. retourner **TableCc(x) $[y]$**
3. sinon, retourner **TableOutCc(x) $[y]$**

Lemme 8 L'algorithme de routage **ROUTE** est de plus courts chemins

Démonstration. Si $x \in T_x$, alors vu que **Route- $T(x)$** est construite à partir d'un arbre de plus courts chemins dans G on route suivant un plus court chemin en retournant le port donné par **Route- $T(x)[y]$** .

Si $\mathbf{Cc}(y) = \mathbf{Cc}(x)$, alors x et y sont dans la même composante bi-connecte et donc on a les trois cas de figure suivants : **Cas 1** : Soit $x \in X_{\mathbf{Cc}(x)}$, et donc x ne détient pas l'information mais c'est y qui l'a dans un champ **AdrX** de son adresse. Vu que x connaît l'indice I_x de l'entrée du tableau qui contient le port à utiliser, on route par un plus court chemin en passant par le port donné par **AdrX- $(y)[I_x]$** .

Cas 2 : Soit $x \notin X_{\mathbf{Cc}(x)}$, et y utilise un sommet de $X_{\mathbf{Cc}(x)}$. Alors, il existe un segment dans la table **Table- $X_{\mathbf{Cc}(x)}$** qui contient y . Donc en retournant le port donné par **Table- $X_{\mathbf{Cc}(x)}[y]$** , on route suivant un plus court chemin.

Cas 3 : Soit $x \notin X_{\mathbf{Cc}(x)}$, et y n'utilise pas $X_{\mathbf{Cc}(x)}$. Alors, un plus court chemin dans G entre x et y est dans $\mathbf{Cc}(x) \setminus X_{\mathbf{Cc}(x)}$. Or, la table **TableCc(x)** est une table de routage de plus courts chemins dans $\mathbf{Cc}(x) \setminus X_{\mathbf{Cc}(x)}$. Donc, en routant sur le port donné par **TableCc(x) $[y]$** , on route sur un plus court chemin dans G .

Si $\mathbf{Cc}(y) \neq \mathbf{Cc}(x)$, alors x et y sont dans deux composantes bi-connexes différentes. La table **TableOutCc(x)** est une table de routage de plus courts chemins dans G entre x et les destinations des autres composantes bi-connexes. Donc en routant suivant le port donné par **TableOutCc(x) $[y]$** on route sur un plus court chemin dans G . Le schéma est donc de plus courts chemins dans G . \square

4.3. Implémentation des tables de routage

1) Pour tout sommet $x \in G$, la table de routage **TableCc(x)** permet de router par de plus courts chemins dans $\mathbf{Cc}(x) \setminus X_{\mathbf{Cc}(x)}$. Or on sait que $\mathbf{Cc}(x) \setminus X_{\mathbf{Cc}(x)}$ est planaire-extérieur. Donc grâce au théorème 1, la table **TableCc(x)** peut être implémentée avec $O(\log n)$ bits. Ce schéma de routage utilise une numérotation des sommets qui est différente de Id_1 . Cette numérotation attribue des numéros consécutifs à

tous les sommets de $\mathbf{Cc}(x) \setminus X_{\mathbf{Cc}(x)}$ suivant un parcours bordant la face extérieure de son plongement. Nous pouvons appliquer une numérotation Id_2 au graphe de telle sorte que ce schéma puisse fonctionner sur chaque composante bi-connexe. En effet, soit Id_2 la fonction de numérotation des sommets de G qui commence par numéroter les sommets appartenant à la composante bi-connexe \mathbf{Cc}_0 ensuite les sommets appartenant à la deuxième composante bi-connexe de plus petit identifiant et ainsi de suite. Pour chaque composante bi-connexe \mathbf{Cc} , on numérote en premier l'ensemble $X_{\mathbf{Cc}}$ des sommets tels que $\mathbf{Cc} \setminus X_{\mathbf{Cc}}$ est planaire-extérieur. Ensuite en considérant un plongement planaire-extérieur de $\mathbf{Cc} \setminus X_{\mathbf{Cc}}$, on numérote les sommets de $\mathbf{Cc} \setminus X_{\mathbf{Cc}}$ suivant un parcours bordant la face extérieure. Les sommets appartenant à une même composante bi-connexe sont numérotés par des entiers consécutifs. En effet, les sommets de \mathbf{Cc}_0 ont des numéros compris entre 1 et $|\mathbf{Cc}_0|$.

Recommencer récursivement la procédure avec comme composante bi-connexe la composante \mathbf{Cc}_1 ayant le plus petit identifiant après celui de \mathbf{Cc}_0 . Les sommets de \mathbf{Cc}_1 sont numérotés par des entiers compris entre $|\mathbf{Cc}_0| + 1$ et $|\mathbf{Cc}_0| + |\mathbf{Cc}_1|$.

De manière générale, si \mathbf{Cc}_i est la i -ème composante bi-connexe choisie, alors la numérotation Id_2 attribue aux sommets de \mathbf{Cc}_i des entiers compris entre $\sum_{k=1}^{i-1} |\mathbf{Cc}_k| + 1$ et $\sum_{k=1}^{i-1} |\mathbf{Cc}_k| + |\mathbf{Cc}_i|$.

Avec cette numérotation, le schéma de routage du théorème 1 peut s'appliquer sur chaque composante bi-connexe.

2) La table de routage **Route- T_x** est une table de routage dans l'arbre T . D'après (Fraigniaud *et al.*, 2001; Thorup *et al.*, 2001), cette table peut être implémentée en $O(\log n)$ bits.

3) La table **Table- $X_{\mathbf{Cc}(x)}$** permet de router vers toute destination de $\mathbf{Cc}(x)$ qui utilise un sommet de $X_{\mathbf{Cc}(x)}$. Pour chaque port p de sortie en x , on compacte sous forme de segments l'ensemble des destinations de $\mathbf{Cc}(x)$ qui passent par p et qui utilise $X_{\mathbf{Cc}(x)}$. Vu que $|X_{\mathbf{Cc}(x)}| \leq k$, alors les destinations de la table **Table- $X_{\mathbf{Cc}(x)}$** utilisent au plus k ports de sortie différents en x .

Par ailleurs, grâce au lemme 9 qui sera démontré plus loin, $\mathbf{Cc}(x)$ admet la f -propriété d'intervalle avec la numérotation Id_2 . Alors le nombre de segments de la table **Table- $X_{\mathbf{Cc}(x)}$** est $f(k) = k + 6kr$. Donc la table **Table- $X_{\mathbf{Cc}(x)}$** est en $O(kr \log n)$ bits.

4) La table **TableOut $\mathbf{Cc}(x)$** est une table de routage permettant de router vers les destinations qui sont dans des composantes bi-connexes autres que $\mathbf{Cc}(x)$. Dans cette table, on compacte sous forme de segments, l'ensemble des destinations utilisant le même port de sortie p si celui-ci est utilisé par des destinations qui ne sont ni dans $\mathbf{Cc}(x)$ ni dans T_x . Nous savons que $\mathbf{Cc}(x)$ a la f -propriété d'intervalle si on considère les identifiants issus de la fonction de numérotation Id_2 (lemme 9).

Nous allons appliquer un décalage sur cette numérotation afin d'obtenir une numérotation Id_3 qui étend la f -propriété d'intervalle en tout sommet $x \in G$. Pour cela, on commence par faire pour tout sommet $x \in G$, $\text{Id}_3(x) = \text{Id}_2(x)$. Ensuite on considère a_0 le sommet d'articulation de \mathbf{Cc}_0 ayant le plus petit identifiant dans la numérotation Id_3 . Soit $\mathbf{Cc}_1, \dots, \mathbf{Cc}_l$ les composantes connexes ne contenant pas \mathbf{Cc}_0

et engendrées par $G \setminus a_0$. Posons $d = |\mathbf{Cc}_1| + \dots + |\mathbf{Cc}_l|$. Pour tout sommet y tel que $\text{Id}_2(y) > a_0$, faire $\text{Id}_3(y) = \text{Id}_2(y) + d$ et pour tout sommet $t \in \{\mathbf{Cc}_1 \cup \dots \cup \mathbf{Cc}_l\}$ on pose $\text{Id}_3(t) = \text{Id}_2(t) + \text{Id}_3(a_0) - |\mathbf{Cc}_0|$. Puis on applique le même principe au deuxième sommet d'articulation de \mathbf{Cc}_0 ayant le plus petit identifiant après a_0 et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les sommets d'articulations de \mathbf{Cc}_0 soient traités. Ensuite on procède de la même manière à la deuxième composante bi-connexe de plus petit identifiant après \mathbf{Cc}_0 et ainsi de suite sur toutes les composantes bi-connexes de G .

Montrons maintenant que grâce à la numérotation Id_3 , on étend la f -propriété d'intervalle de $\mathbf{Cc}(x)$ en tout sommet x aux destinations non accessibles en utilisant les autres tables de routage. En effet, soit $x \in G$ et a un sommet d'articulation de $\mathbf{Cc}(x)$. On sait que l'ensemble des composantes connexes de $G \setminus a$ qui ne contiennent pas $\mathbf{Cc}(x)$ constitue un segment suivant les identifiants issus de Id_3 .

Supposons que x n'est pas un sommet d'articulation. Soit $s = \{\text{Id}_2(x_1), \text{Id}_2(x_2), \dots, \text{Id}_2(a), \text{Id}_2(x_j), \dots, \text{Id}_2(x_k)\}$ un segment de $\mathbf{Cc}(x)$ contenant a et supposons que a est le seul sommet d'articulation de s . Soit $\mathbf{Cc}_1, \dots, \mathbf{Cc}_l$ les composantes connexes ne contenant pas x et engendrées par $G \setminus a$. Posons $d = |\mathbf{Cc}_1| + \dots + |\mathbf{Cc}_l|$. Par définition de la fonction de numérotation Id_3 on a $\forall i, j \leq i \leq k$, on a $\text{Id}_3(x_i) = \text{Id}_3(a) + d + i - j + 1$. De plus la fonction de numérotation Id_3 attribuée à tout sommet de $\mathbf{Cc}_1 \cup \dots \cup \mathbf{Cc}_l$ un identifiant compris entre $a + 1$ et d . Donc, suivant les identifiants issus de Id_3 , $s \cup \mathbf{Cc}_1 \cup \dots \cup \mathbf{Cc}_l$ constitue un segment modulo n . Nous avons donc étendu la f -propriété d'intervalle à G en x . En d'autres termes, le nombre de segments nécessaires en x pour router vers les destinations de $\text{TableOutCc}(x)$ est le même que pour router dans $\mathbf{Cc}(x)$. Or on sait que pour router dans $\mathbf{Cc}(x)$, on a besoin d'au plus $O(kr)$ segments. Donc la table $\text{TableOutCc}(x)$ contient $O(kr)$ segments et est donc de $O(kr \log n)$ bits.

Si x est un sommet d'articulation, alors pour toute destination qui utilise un sommet d'articulation de $\mathbf{Cc}(x)$ on a la f -propriété d'intervalle. En effet, on peut passer par la même démarche que dans le cas où x n'est pas un sommet d'articulation. Le fait d'être un sommet d'articulation n'intervient que pour les destinations qui utilisent des sommets d'articulations de composantes bi-connexes partageant x et qui sont différentes de $\mathbf{Cc}(x)$. Supposons que y est une destination qui oblige le passage par un sommet d'articulation b d'une composante bi-connexe $\mathbf{Cc}(y) \neq \mathbf{Cc}(x)$. Du fait que x a choisi la composante bi-connexe $\mathbf{Cc}(x)$ et non $\mathbf{Cc}(y)$, alors c'est $\mathbf{Cc}(x)$ qui contient l'arête qui relie x à son père dans T . Donc, x est un ancêtre de tout sommet de $\mathbf{Cc}(b)$ et à plus forte raison tout sommet qui utilise $\mathbf{Cc}(b)$. Ce qui veut dire que y est un descendant de x dans T . Donc y est dans la table $\text{Route-}T_x$. La table $\text{TableOutCc}(x)$ s'implémente donc en $O(kr \log n)$ bits.

La table de routage finale de x est une combinaison de toutes ces tables de routage. Sa taille est $O((kr + 1) \log n)$ bits.

4.4. Implémentation des adresses et des en-têtes de message

L'adresse de chaque sommet x est constituée par :

- 1) les identifiants $\text{Id}_1(x), \text{Id}_2(x), \text{Id}_3(x)$ qui sont des entiers de $[1, n]$ et donc, peuvent être implémentés en $O(\log n)$ bits,
- 2) le champ $\text{AdrX}(x)$ contenant les ports de sortie à partir de chaque sommet $z \in X_{\text{Cc}(x)}$. Or on a $|X_{\text{Cc}(x)}| \leq k$, donc $\text{AdrX}(x)$ contient au plus k numéros de ports. Donc $\text{AdrX}(x)$ est en $O(k \log n)$ bits.

D'où, l'adresse de chaque sommet x est de $O((k + 1) \log n)$ bits. Par ailleurs, les en-têtes de message sont constitués par l'adresse de destination. Les en-têtes de message sont donc de $O((k + 1) \log n)$ bits.

5. Propriété d'intervalle dans les (k, r) -constellations

Cette section est consacrée à la démonstration du lemme suivant :

Lemme 9 *Toute (k, r) -constellation bi-connexe admet une f -propriété d'intervalle, grâce à la numérotation Id_2 , avec $f(d) = d + 6kr$.*

Soit G une (k, r) -constellation bi-connexe et soit X le plus petit ensemble de sommets tels que $G \setminus X$ est planaire-extérieur. Supposons que les sommets de G sont numérotés suivant la fonction Id_2 . On rappelle que la fonction Id_2 attribue à chaque sommet de G un numéro unique compris entre 1 et n de la manière suivante :

- 1) numéroté en premier les sommets de X par des entiers consécutifs compris entre 1 et $|X|$;
- 2) prendre un plongement planaire-extérieur de $G \setminus X$, puis numéroté consécutivement les sommets $G \setminus X$ suivant un parcours bordant la face extérieure de ce plongement.

Soit x un sommet de G et $\Omega(x) = \{v_1, v_2, \dots, v_t\}$ un ensemble de voisins de x dans G . Soit T un arbre couvrant G de plus courts chemins, enraciné en x et soient $T_{v_1}, T_{v_2}, \dots, T_{v_t}$ les sous-arbres de T enracinés respectivement en v_1, v_2, \dots, v_t .

Nous allons calculer le nombre $\text{Seg}(x) = \sum_{v \in \Omega(x)} \text{seg}(T_v)$ de segments en x . Pour cela, on va calculer d'une part les segments utilisant X (c'est-à-dire les segments ayant au moins un ancêtre dans T qui est dans X) et d'autres part le reste des segments. Mais auparavant, nous allons expliciter une propriété sur l'ensemble $\text{Seg}(x)$ des segments en x .

Pour tout $\mathbf{F} \subseteq \text{Seg}(x)$ et tout couple de segments (s_1, s_2) de \mathbf{F} , on a soit les sommets de s_1 qui sont numérotés avant les sommets de s_2 soit le contraire. Il existe donc une manière d'ordonner les segments de \mathbf{F} telle que pour tout couple (s_i, s_j) de segments d'ordres respectifs i et j de \mathbf{F} avec $i < j$, on a $\forall y_i \in s_i, y_j \in s_j, y_1 < y_2$.

En d'autres termes, les sommets de s_i sont numérotés avant les sommets de s_j . On notera $s_i < s_j$ la relation entre s_i et s_j . On dit que s_i et s_j sont consécutifs dans \mathbf{F} si $i + 1 \pmod{|\mathbf{F}|} = j$ ou $j + 1 \pmod{|\mathbf{F}|} = i$.

Nous pouvons remarquer que parmi les segments utilisant X , il y a d'une part les segments qui sont adjacents à X dans T et d'autre part le reste. Un segment s est dit adjacent à X dans T s'il contient au moins un sommet y dont le père dans T est un sommet de X . Un sommet u est un ancêtre d'un segment s dans T si $\forall v \in s$, u est un ancêtre de v . Pour tout sommet $u \neq x$ de X , on note :

- 1) $\mathbf{SegFils}(u)$ l'ensemble des segments ayant u comme ancêtre dans T et dont chaque segment contient au moins un sommet adjacent à u dans T .
- 2) $\mathbf{SegPtFils}(u)$ l'ensemble des segments ayant u comme ancêtre dans T et qui ne contiennent aucun sommet adjacent à u dans T .

Il est clair que $\mathbf{SegFils}(u) \cup \mathbf{SegPtFils}(u)$ est l'ensemble des segments utilisant u . Par conséquent, en calculant le nombre maximum de segments utilisant u pour tout sommet u de X , alors on peut facilement donner le nombre maximum segments utilisant X . Calculons $\mathbf{SegFils}(u)$. On remarque que les segments de $\mathbf{SegFils}(u)$ peuvent être classés en deux catégories de la manière suivante :

- 1) soit $\mathbf{SegFils}_1(u)$ l'ensemble des segments s de $\mathbf{SegFils}(u)$ contenant au moins un sommet v_1 à partir duquel on peut atteindre un sommet $v_2 \notin T_u$ par un chemin p_{v_1, v_2} dans $G \setminus \mathbf{SegFils}(u) \cup s$;
- 2) soit $\mathbf{SegFils}_2(u)$ l'ensemble des segments de $\mathbf{SegFils}(u) \setminus \mathbf{SegFils}_1(u)$.

On peut remarquer que si v est un sommet couvert par un segment s' de $\mathbf{SegFils}_2(u)$, alors la composante connexe de $G \setminus \mathbf{SegFils}_2(u) \cup s'$ contenant v ne contient que des sommets de T_u . Si tel n'était pas le cas, v serait dans une composante connexe avec un sommet $v' \notin T_u$ et donc s' serait dans $\mathbf{SegFils}_1(u)$.

Nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 10 Pour tout sommet $u \in X$, on a $|\mathbf{SegFils}_1(u)| < r$ et $|\mathbf{SegFils}_2(u)| < r$.

Démonstration. Montrons par l'absurde que $|\mathbf{SegFils}_1(u)| < r$. En effet, supposons que $\mathbf{SegFils}_1(u) = \{s_1, s_2, \dots, s_t\}$ et $t \geq r$. Par définition de $\mathbf{SegFils}_1(u)$, chaque segment s de $\mathbf{SegFils}_1(u)$ possède un sommet v_1 par lequel on peut atteindre un sommet $v_2 \notin T_u$ par un chemin p_{v_1, v_2} dans $G \setminus \mathbf{SegFils}(u) \cup s$. Donc pour chaque segment $s_i \in \mathbf{SegFils}_1(u)$ on peut associer un sommet $y_i \notin T_u$ et un sommet $v_i \in s_i$ tel qu'on peut atteindre le sommet y_i à partir de v_i dans G par un chemin p_i qui évite tout sommet de $\mathbf{SegFils}(u) \setminus s_i$. On peut aussi supposer que pour tout segment s_i , le sommet $y_i \notin T_u$ associé est le plus proche de v_i en passant par p_i . En d'autres termes, en dehors de y_i , le chemin p_i ne contient aucun autre sommet non couvert par T_u .

Soit $P = \{p_1, p_2, \dots, p_t\}$ l'ensemble des chemins ainsi défini entre les sommets v_1, v_2, \dots, v_t et respectivement les sommets y_1, y_2, \dots, y_t . Pour chaque chemin p_i de P on pose $e_i = (w_i, w'_i)$ la première arête de p_i reliant un sommet w_i de s_i à un

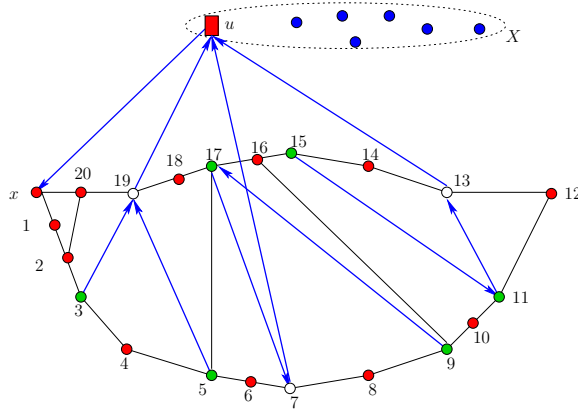


Figure 4. Une (k, r) -constellation bi-connecte Cc , un sommet $u \in X_{Cc}$, un arbre couvrant enraciné en un sommet x dans lequel seul le sous-arbre couvrant T_u est matérialisé (arêtes en gris foncé) pour ne pas surcharger la figure. De même les arêtes entre X_{Cc} et Cc sont omises sauf celles reliant u à Cc . L'ensemble $\text{SegFils}(u)$ est constitué par les sommets blancs et l'ensemble $\text{SegPtFils}(u)$ par les sommets gris clair. Les sommets noirs sont les sommets non couverts par T_u . Les sommets gris foncé et le sommet u constituent l'ensemble X_{Cc} . Dans cet exemple on a $\text{SegFils}_1(u) = \text{SegFils}(u)$ car pour tout segment de SegFils_u est constitué d'un unique sommet blanc et à partir de chaque sommet blanc, on peut atteindre au moins un sommet noir (c'est-à-dire un sommet qui n'est pas dans T_u) sans passer par un autre sommet de SegFils_u . Par conséquent on a $\text{SegFils}_2(u) = \emptyset$

sommet $w'_i \notin s_i$. Alors pour tout couple de chemins $p_i, p_j \in P, i \neq j$, on a $e_i \neq e_j$ car, sinon les segments s_i, s_j contiendraient au moins un sommet en commun (une des extrémité de e_i); ce qui contredit l'hypothèse que les segments sont disjoints. Sur la figure 5, les sommets $w_i, 1 \leq i \leq t$ sont les sommets blancs, les arête e_i sont représentées par des flèches noires et les sommets $w'_i, 1 \leq i \leq t$ sont en gris clair.

Par ailleurs, on sait que chaque segment de $\text{SegFils}_1(u)$ est adjacent à u dans T . Donc en posant² $p'_i = T[w_i, u] \cup e$ pour chaque chemin p_i de P on a t chemins de longueur au moins deux entre u et respectivement w_1, w_2, \dots, w_t . Sur chaque chemin p'_i , soit w''_i le sommet adjacent à w_i en remontant p'_i vers u . Sur la figure 5, les sommets $w''_i, 1 \leq i \leq t$ sont les sommets noirs. Dans l'exemple, aussi le sommet $w''_{t-1} = u$.

On pose **A** comme étant le sous-arbre de T_u couvrant tous les sommets w''_i pour $1 \leq i \leq t$. On pose **B** comme étant l'union du sous-arbre de T couvrant l'ensemble de y_i et les sous chemins de chaque p_i reliant w' à y_i . On a **A** et **B** qui sont reliés par

2. $T[w_i, u]$ est le chemin dans T entre w_i et u .

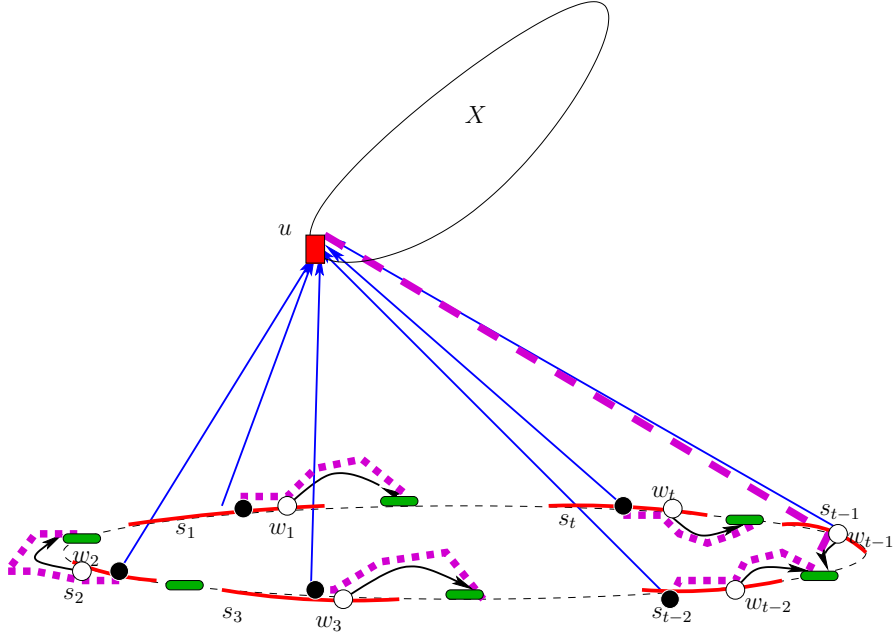


Figure 5. Illustration pour le lemme 10. Une (k, r) -constellation dans laquelle un sommet $u \in X$ est représenté en noir. Les segments de $\mathbf{SegFils}_1(u) = \{s_1, s_2, \dots, s_t\}$ sont en noir avec en gris foncé les arêtes de T_u les reliant à u . Les sommets blancs, gris clair et noirs ainsi que les chemins en pointillés servent dans l'illustration

les chemins $\rho_1 = w'_1, w_1, w''_1, \rho_2 = w'_2, w_2, w''_2, \dots, \rho_t = w'_t, w_t, w''_t$ qui sont tous de longueur deux. De plus $\forall i \neq j, 1 \leq i, j \leq t$, on a $w_i \neq w_j$ car tous les segments de $\mathbf{SegFils}_1(u)$ sont disjoints. On a donc t chemins disjoints de longueur deux entre A et B . Par conséquent, G contient un mineur $K_{2,t}$. Ce qui est absurde vu que $t \geq r$. D'où $|\mathbf{SegFils}_1(u)| = t < r$, ce qui termine la première partie. Sur la figure 5 les chemins reliant A à B sont représentés par des tirets apais.

Montrons maintenant par l'absurde que $|\mathbf{SegFils}_2(u)| < r$. Pour cela, supposons que $r \leq |\mathbf{SegFils}_2(u)| = t$. Par définition tout segment de $\mathbf{SegFils}_2(u)$ utilise au moins un segment $\mathbf{SegFils}_1(u)$. Il est clair que chaque segment de $\mathbf{SegFils}_2(u)$ utilise un segment de $\mathbf{SegFils}_1(u)$ car on ne peut pas atteindre un sommet non couvert par T_u en utilisant que des segments de $\mathbf{SegFils}_2(u)$. Nous allons montrer ici qu'à partir de tout segment de $\mathbf{SegFils}_2(u)$, on peut atteindre un sommet non couvert par T_u sans utiliser un autre segment de $\mathbf{SegFils}_2(u)$. Pour cela, on montre d'abord par l'absurde que pour tout segment $s \in \mathbf{SegFils}_2(u)$, il existe deux sommets $v_1 \in s, v_2 \notin T_u$ et un chemin p_{v_1, v_2} entre v_1 et v_2 dans G tel que $p_{v_1, v_2} \cap \mathbf{SegFils}_2(u) \setminus s = \emptyset$. Ensuite

on montre qu'en appliquant le procédé utilisé pour calculer $\mathbf{SegFils}_1(u)$, on aboutit à la même conclusion.

Supposons que s_1 est un segment de $\mathbf{SegFils}_2(u)$ tel que tout chemin dans G reliant s_1 à un sommet $z \notin T_u$ utilise un autre segment de $\mathbf{SegFils}_2(u)$. Parmi tous les segments que s_1 doit utiliser pour aller en z , soit s_2 le segment dont les sommets sont numérotés juste avant ceux de s_1 . Dans le cas où tous les segments que doit utiliser s_1 pour aller en z ont des sommets numérotés après ceux de s_1 , on prend s_2 comme étant le segment dont les sommets sont numérotés juste après ceux de s_1 .

Alors tout chemin entre s_1 et z est couvert par T_u . À plus forte raison le chemin P entre s_1 et z , contenant s_2 et induit par le bord de la face extérieure du plongement planaire-extérieur de $G \setminus X$ est aussi couvert par T_u . Par conséquent, $s_1 \cup P \cup s_2$ constitue un seul segment de T_u car les sommets couverts par l'ensemble $s_1 \cup P \cup s_2$ sont consécutifs sur le bord de la face extérieure de $G \setminus X$. Ce qui contredit l'hypothèse que les segments de T_u sont incompressibles. Donc, à partir de s_1 on peut atteindre un sommet non couvert par T_u sans traverser un segment de $\mathbf{SegFils}_2(u)$.

En appliquant la même démarche que celle utilisée pour calculer le nombre de segments de $\mathbf{SegFils}_2(u)$, on aboutit à la même conclusion qui est que $|\mathbf{SegFils}_2(u)| = t < r$. Ce qui termine la preuve de la deuxième partie et donc du lemme 10. \square

Une conséquence directe du lemme 10 est que pour tout sommet $u \in X$, le nombre de segments de $\mathbf{SegFils}(u)$ est au plus $2r$. Pour terminer le calcul du nombre de segments utilisant $u \in X$, nous avons besoin de montrer le lemme suivant :

Lemme 11 *Pour tout sommet $u \in X$, le nombre de segments de $\mathbf{SegPtFils}(u)$ est au plus r .*

Démonstration. Nous allons montrer par l'absurde que $|\mathbf{SegPtFils}(u)| \leq r$. En effet, soit u un sommet de X tel que $|\mathbf{SegPtFils}(u)| = t > r$.

Soit H le graphe obtenu à partir de G en contractant chaque segment de T_u en un *super sommet* et en remplaçant les arêtes multiples de T par une *super arête*. Cette opération ne modifie pas la structure arborescente de T . On suppose que dans H , les sommets issus de la contraction d'un segment s sont étiquetés par l'intervalle constituant s . Par exemple, la figure 6(b) représente le graphe H obtenu à partir du graphe figure 6(a).

Soit E_0 l'ensemble des arêtes de $H \setminus X$ qui sont soit des arêtes de T soit des super arêtes de T et dont moins une des extrémités est un super sommet issu de la contraction d'un segment de $\mathbf{SegPtFils}(u)$. Sur la figure 6(b) ces arêtes sont représentées dans la zone grisée par des arcs orientés en noir.

Chacune de ces arêtes partage donc le plan du plongement de $H \setminus X$ (la zone grisée sur la figure 6(b)) en deux zones qui se trouvent de part et d'autre de l'arête. De manière récursive chaque arête E_0 se trouvant dans une de ces deux zones partage la zone en deux zones et ainsi de suite. Vu que le nombre d'arêtes de E_0

est fini, alors en un nombre fini d'étapes on peut décomposer la zone du plongement de $H \setminus X$ en un ensemble Z de zones ne contenant aucune arête de E_0 . Dans la décomposition, chaque arête de E_0 augmente de nombre de zones de un. Nous aurons donc au plus $|E_0| + 1$ zones dépourvues d'arête de E_0 . Il n'est pas difficile de voir que $|E_0| \leq |\mathbf{SegPtFils}(u)|$. Nous avons donc au plus $t + 1$ zones dépourvues d'arête de E_0 .

Nous allons montrer que chaque zone de Z possède au moins un sommet non couvert par T_u . En effet, nous savons que chaque zone est engendrée par au moins une arête de E_0 . Nous savons aussi que chaque zone est délimitée par un cycle de $H \setminus X$. Supposons $z_0 \in Z$ ne contenant aucun sommet non couvert par T_u . Alors z_0 est délimité par des arêtes de E_0 et un ensemble β d'arêtes non vide de la face extérieure de $H \setminus X$ tel que $\beta \cap E_0 = \emptyset$ car sinon on aurait un cycle dans T ce qui est absurde. Vu que z_0 ne contient aucun sommet non couvert par T_u et H n'a pas d'arêtes multiples, chaque arête de β relie deux super sommets de H et donc deux segments consécutifs de G . Ces deux segments consécutifs sont couverts par T_u . Ils auraient donc pu être compactés en un seul segment et diminuer le nombre de segments de T_u . Ce qui est absurde vu que nous avons supposé que les segments sont compactés au mieux. Nous avons donc montré que chaque zone contient au moins un sommet non couvert par T_u .

Par ailleurs, on sait que le sommet x qui est la racine de T est dans une unique zone z_x de Z si $x \notin X$. Sur la figure 6(b) le sommet x est représenté dans la zone délimité par l'arc entre le super sommet étiqueté Π et le super sommet gris clair adjacent à Π .

A moins de croiser les arêtes de E_0 , tout chemin dans H entre x et un sommet $y \notin z_x \cup T_u$ utilise un sommet de $X \setminus \{u\}$. Nous avons donc au moins $|Z| - 1 = t$ arêtes dans H reliant des sommets de $X \setminus \{u\}$ à des sommets non couverts par T_u .

Si $x \in X$ alors tout chemin dans H entre x et un sommet $y \notin X \cup T_u$ utilise un sommet de $X \setminus \{u\}$. Ce qui forme plus de t arêtes dans H reliant des sommets de $X \setminus \{u\}$ à des sommets non couverts par T_u .

On pose $E_1 = \{e_1 = (w_1, w'_1), e_2 = (w_2, w'_2), \dots, e_t = (w_t, w'_t)\}$ l'ensemble d'arêtes tel que $\forall e_i \in E_1, 1 \leq i \leq t, w_i \in X$ et w'_i un sommet non couvert par T_u . Sur la figure 6(b) les arête de E_1 relie chacun des super sommets I_1, I_2, \dots, I_5 à l'ensemble X . Posons $E_2 = \{e'_1 = (w'_1, w''_1), e'_2 = (w'_2, w''_2), \dots, e'_t = (w'_t, w''_t)\}$ l'ensemble des arêtes tel que chaque arête $e'_i \in E_2, 1 \leq i \leq t$ est la première arête sur un chemin dans $H \setminus X$ reliant w'_i à un super sommet de H . Un tel chemin existe vu que $H \setminus X$ est connexe. Ces chemins sont représentés sur la figure 6(b) par des tirets épais. Posons $P = \{p_1 = e_1, e'_1, p_2 = e_2, e'_2, \dots, p_t = e_t, e'_t\}$, \mathbf{A} est le sous-arbre de T couvrant $X \setminus \{u\}$ et \mathbf{B} l'union de T_u avec l'ensemble des chemins reliant chaque sommet $w''_i, 1 \leq i \leq t$ à un super sommet de H . On a \mathbf{A} qui est connexe de même que \mathbf{B} . De plus les chemins de P sont disjoints et de longueur deux. On en déduit un mineur $K_{2,t}$ dans H ce qui est absurde car on a $t > r$ par hypothèse. Ce qui termine la preuve du lemme 11. \square

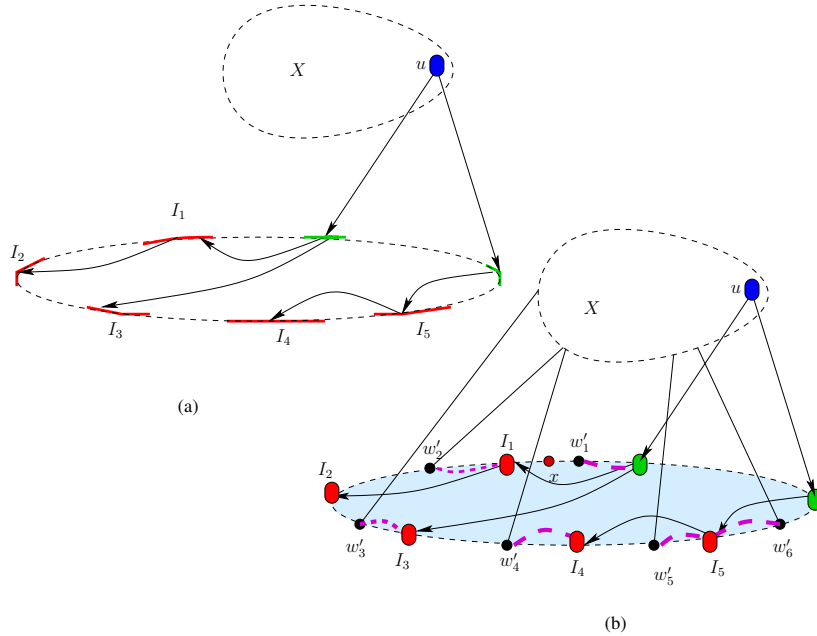


Figure 6. Illustration pour le lemme 11. En (a) on a une (k, r) -constellation dans laquelle les segments de T_u sont représentés par des segments épais. En noir nous avons les segments de $\text{SegPtFils}(u) = \{I_1, \dots, I_5\}$ et en gris clair les segments de $\text{SegFils}(u)$. En (b) nous avons le graphe H issu de G en contractant les segments de $\text{SegPtFils}(u)$. Les super sommets de H sont représentés en noir et gris clair. Les super sommets noirs sont issus de la contraction des segments de $\text{SegPtFils}(u)$ et les gris clair sont engendrés par la contraction des segments de $\text{SegFils}(u)$. Les sommets noirs, les arêtes et le pointillé qui apparaissent dans H et non dans G servent dans l'illustration de la preuve du lemme 11

En combinant les lemmes 10 et 11, on montre que la somme sur tous les sommets de X des segments qui utilisent X est de : $\sum_{u \in X} |\text{SegFils}(u)| + \sum_{u \in X} |\text{SegPtFils}(u)| \leq 2r|X| + r|X| \leq 3kr$. Par conséquent, le nombre de segments qui utilisent au moins un sommet de X est au plus $3kr$.

Nous avons ainsi calculé le nombre de segments qui utilisent au moins un sommet de X . Il reste maintenant à calculer le nombre de segments qui n'utilisent aucun sommet de X . Pour cela, nous avons besoin du résultat suivant :

Lemme 12 Le nombre de segments qui n'utilisent aucun sommet de X est au plus $|\Omega(x)| + 2kr$.

Démonstration. Nous allons considérer deux cas de figure. Le cas où x est un sommet de X et le cas où x est dans $G \setminus X$.

Supposons que $x \notin X$. Alors tout segment de G qui n'est descendant d'aucun sommet de X est accessible à x par de plus courts chemins dans $G \setminus X$.

Si $X = \emptyset$, alors G est planaire-extérieur et dans ce cas il est connu qu'il y a au plus un segment par arête (cf. (Frederickson *et al.*, 1988)). Dans ce cas le nombre de segments en x est au plus $|\Omega(x)|$.

Si X est non vide, alors calculons le cardinal de l'ensemble **SegPupille** de segments qui n'utilisent aucun sommet de X . Soit $\Omega(x) = \{v_1, v_2, \dots, v_t\}$ l'ensemble de voisins de x dans T . Soit $v_i \in \Omega(x)$ et soit **SegPupille** $(v_i) = T_{v_i} \cap \mathbf{SegPupille}$ l'ensemble des segments de T_{v_i} qui n'utilisent aucun sommet de X .

Soit H le graphe obtenu à partir de G en contractant chaque segment de **SegPupille** (v_i) en un super sommet et en supprimant les arêtes multiples de T . Cet opération ne modifie pas la structure arborescente de T . On suppose que dans H , les sommets issus de la contraction d'un segment s sont étiquetés par l'intervalle constituant s .

Soit E_i l'ensemble des arêtes de $H \setminus X \cap T$ dont au moins une des extrémités est un super sommets issu de la contraction d'un segment de **SegPupille** (v_i) . De la même manière que dans la preuve du lemme 11, on a les arêtes de E_i qui subdivisent le plan du plongement de $H \setminus X$ en zones dépourvues d'arêtes de E_i . Nous pouvons ainsi montrer que chacune de ces zones possède au moins un sommet qui n'est accessible à x dans G qu'en passant par X . Si on pose k_i comme étant le nombre de zones engendrées par E_i , alors le nombre de zones engendrées par E_1, E_2, \dots, E_t est au plus $|\Omega(x)| + k_1 + k_2 + \dots + k_t$. Ce qui est aussi le nombre de segments n'utilisant aucun sommet de X . Par ailleurs, vu que $k_1 + k_2 + \dots + k_t$ est le nombre de zones contenant chacun au moins un sommet adjacent à X dans T . On a donc $k_1 + k_2 + \dots + k_r \leq \sum_{u \in X} |\mathbf{SegFils}(u)| \leq 2kr$. Par conséquent, on a $|\mathbf{SegPupille}| \leq |\Omega(x)| + 2kr$. Ce qui prouve que le lemme 12 est vrai lorsque x n'est pas un sommet de X .

Supposons que x est un sommet de X . Grâce au lemme 10, le nombre de segments de **SegFils** est au plus $2kr$. Par définition **SegFils** regroupe l'ensemble des segments utilisant $X \setminus \{x\}$. Par conséquent $H = G \setminus \{\mathbf{SegFils} \cup X\} \cup \{x\}$ est connexe et $H \setminus \{x\}$ est planaire-extérieur. Les segments qui n'utilisent aucun sommet de X sont exactement les segments de H . Nous allons calculer dans ce qui suit le nombre de segments de H . Pour cela, observons la manière dont les segments de H sont engendrés à partir de $G \setminus X$. On a les sommets de $G \setminus X$ qui constituent un segment car ils ont été numérotés consécutivement par des entiers consécutifs de k à n . Ensuite, pour chaque sommet u de X on décide des sous-segments du segment $[k, n]$ qui doivent utiliser u . On remarque que si s_1, s_2 sont des sous-segments utilisant u en les enlevant du segment $[k, n]$ on a $H \setminus s_1 \cup s_2$ qui est constitué par deux segments. Cela parce que entre tout couple s_1, s_2 de segments parmi ceux utilisant X , il existe au moins deux sommets w, w' qui n'utilisent aucun sommet de X et qui sont tels que $\forall v \in s_1, v' \in s_2$ on a $w \in [v, v']$ et $w' \in [v', v]$ (les intervalles sont dans

$[k, n]$ modulo n). De même, en enlevant tout nouveau sous-segment s_3 à un segment de $H \setminus s_1 \cup s_2$ on subdivise ce segment en deux et donc on a $H \setminus s_1 \cup s_2 \cup s_3$ qui est constitué par trois segments. En appliquant ce même principe pour tous les segments de **SegFils**, on obtient par construction au plus $|\mathbf{SegFils}|$ segments engendrés dans $H = G \setminus \{\mathbf{SegFils} \cup X\} \cup \{x\}$ par les segments de **SegFils** c'est-à-dire au plus $2kr$.

Il reste à calculer le nombre de segments de $H = G \setminus \{\mathbf{SegFils} \cup X\} \cup \{x\}$ qui ne sont engendrés par aucun segment de **SegFils**. Pour cela, nous allons construire à partir de H un graphe qui va nous permettre de borner le nombre de segments de H . Posons $V(x) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ l'ensemble des voisins de x dans H tel que $T_{v_1}, T_{v_2}, \dots, T_{v_m}$ couvrent H .

Soit H_0 le graphe obtenu à partir de H en ajoutant entre tout couple de segments ($s_1 = [a, b], s_2 = [c, d]$) consécutifs sur le bord de la face extérieure du plongement de H un chemin $P_{b,c}$ entre b et c de longueur $|c - b|$. Les sommets de ce chemin sont numérotés consécutivement par des entiers distincts et compris entre b et c . Toutes les arêtes de $P_{b,c}$ ont un poids infini ou suffisamment grand pour que ces arêtes ne soient sur aucun plus court chemin entre deux sommets de H . Le graphe $H_0 \setminus \{x\}$ est bi-connexe, planaire-extérieur et tous les sommets sont numérotés consécutivement par des entiers consécutifs compris entre k et n . Par ailleurs nous savons par construction que les arêtes nouvellement créées ne serviront dans aucun plus court chemin entre deux sommets de H . Il est clair que pour chaque sommet $v_i \in V(x)$, l'ensemble des sommets de H_0 qui utilisent v_i contient l'ensemble des sommets de H qui utilisent v_i . Nous allons par construction calculer pour chaque sommet $v_i \in V(x)$ les segments de H_0 qui l'utilisent et ensuite nous allons en déduire de combien on augmente le nombre de segments de H en enlevant les nouveaux sommets de H_0 .

Soit T'_{v_1} un arbre de plus courts chemins couvrant H_0 enraciné en un sommet $v_1 \in V(x)$. Compte tenu du fait que H_0 est planaire-extérieur, alors tout sous-arbre de T'_{v_1} contient un segment (Frederickson *et al.*, 1988).

Pour chaque sommet $v_i \in V(x)$ soit T'_{v_i} un arbre de plus courts chemins couvrant $H_0 \setminus V(x) \cup \{v_i\}$. De chaque arbre T'_{v_i} avec $v_i \in V(x)$, ne conserver que les sommets qui ont une profondeur minimale dans T'_{v_i} par rapport à tous les arbres T'_{v_j} pour $j \neq i$ et $1 \leq i, j \leq m$. Chacun des arbres T'_{v_j} ainsi obtenu contient l'ensemble des sommets de H_0 utilisant v_i . Calculons le nombre de segments dans chacun de ces arbres. En effet, si on analyse sur le processus de construction des arbres T'_{v_i} pour $v_i \in V(x)$, on remarque que T'_{v_1} est construit en premier et couvre tout le graphe dans un premier temps. Ensuite au fur et à mesure on construit les autres arbres et chaque sommet choisi l'arbre qui lui permet d'avoir la meilleure hauteur. Nous allons calculer le nombre de segments de H_0 engendrés par ces arbres.

Observons ce qui se passe lorsqu'on construit l'arbre T'_{v_2} . Avant que T'_{v_2} ne soit construit, il n'y avait que T'_{v_1} qui couvrait tout les sommets. Vu de x , l'arête (x, v_1) couvre tout le graphe et donc contient le segment $[k, n]$. Avant de construire T'_{v_2} regardons d'abord l'emplacement de v_2 par rapport à v_1 . Du fait que $H_0 \setminus \{x\}$ est

bi-connexe, on peut affirmer que v_1 admet au moins deux voisins w_1, w'_1 tels que $w_1 < v_2 < w'_1$. Sans perte de généralité on peut supposer que w_1, w'_1 sont les deux sommets les plus proche de v_2 suivant le bord de la face extérieure du plongement de $H_0 \setminus \{x\}$. Les arêtes (v_1, w_1) et (v_1, w'_1) partagent le plan du plongement de $H_0 \setminus \{x\}$ en zones dont une seule zone noté z_{v_1} contient v_2 . Il est évident que par la planarité de $H_0 \setminus \{x\}$, l'arbre T'_{v_2} ne couvrira que des sommets de z_{v_1} . Nous allons montrer que vu de x l'arbre T'_{v_2} ne peut pas contenir plus d'un segments.

Supposons qu'après la construction de T'_{v_2} on a au moins deux segments $s_1 = [a, b], s_2 = [c, d]$ dans T'_{v_2} . Alors il existe au moins un sommet f utilisant v_1 tel que $b < f < c$. Soit H_1 le graphe obtenu à partir de H_0 en contractant les segments s_1 et s_2 en deux super sommets t_1 et t_2 . Soit e_1 l'arête reliant v_1 à t_1 sur T'_{v_2} et e_2 l'arête reliant v_1 à t_2 sur T'_{v_2} . Soit e'_1 la première arête sur le chemin p_1 sur la face extérieur de H_1 entre t_1 et f et soit e'_2 la première arête sur le chemin p_2 sur la face extérieur de H_1 entre t_2 et f (ces deux chemins sont pris dans la zone z_{v_1}). On a les chemins $\rho_1 = e_1, e'_1$ et $\rho_2 = e_2, e'_2$ qui sont disjoints et de longueur deux. On pose $\mathbf{A} = p_1 \setminus e_1 \cup p_2 \setminus e_2$ et $\mathbf{B} = \{v_2\}$. Les deux chemins ρ_1 et ρ_2 relie \mathbf{A} à \mathbf{B} . De plus le chemin ρ_3 dans T'_{v_1} reliant v_1 à f n'intersecte aucun de ces deux chemins. Ce chemin est de longueur au moins deux et il existe en plus un chemin entre v_1 et v_1 qui n'intersecte aucun de ces chemins en l'occurrence le chemin passant par w_1 et contournant la face extérieur du plongement de $H_0 \setminus \{x\}$. Les chemins ρ_1, ρ_2 et ρ_3 induisent un $K_{2,3}$ dans $H_0 \setminus \{x\}$; ce qui est une contradiction. Donc, vu de x l'arbre T'_{v_2} contient au plus un segment.

On applique le même procédé pour construire l'arbre T'_{v_3} . La seule différence ici est que v_3 peut être dans une zone délimitée non seulement par des arêtes incidentes à v_1 mais aussi par des arêtes incidentes à v_2 . En choisissant les bonnes arêtes on aboutit au même résultat. Ensuite, récursivement on l'applique à tous les sommets $v_i \in V(x)$ et on obtient que par chaque sommet $v_i \in V(x)$ passe au plus un segment. Ce qui montre que le nombre de segments de H_0 est au plus $|V(x)|$.

Calculons maintenant le nombre de segments de H nouvellement créés en enlevant les nouveaux sommets ajoutés à H pour construire H_0 . On observe deux cas de configurations pour tout segment s de H . Le premier cas est que est contenu intégralement dans un segment de H_0 . Le deuxième cas est que plusieurs segments de H_0 se partagent s .

Si on est dans le premier cas, alors en supprimant les nouveaux sommets s reste un segment intact. Par conséquent on n'augmente pas le nombre de segments. Sinon s est partagé par plusieurs segments de H_0 . Chacun de ces segments contient une portion de s . En supprimant les nouveaux sommets de H_0 cette portion devient un segment de plus dans H . Il n'est pas difficile de montrer qu'un segment de H_0 ne peut pas contenir plus d'une portion de s . Ainsi, dans le pire des cas chaque segment de H_0 engendre un segment nouveau dans H . Par conséquent on passe de H_0 à H en ajoutant à H au plus $|V(x)|$ nouveaux segments.

Par ailleurs, on sait que $V(x) \subseteq \Omega(x)$. Donc le nombre de segments en x est donc au plus $|V(x)| + 2kr \leq |\Omega(x)| + 2kr$. Ce qui termine la preuve du lemme 12. \square

Le calcul de $\sum_{v \in \Omega(x)} \text{seg}(T_v)$ s'est fait en deux étapes. D'abord grâce aux lemmes 10 et 11, où nous avons montré que le nombre de segments qui utilisent au moins un sommet de X est au plus $3kr$. Ensuite grâce au lemme 12, où nous avons montré que le nombre de segments qui n'utilisent aucun sommet de X est au plus $|\Omega(x)| + 2kr$. Pour obtenir le nombre total de segments en x , il faut faire la somme de ces deux nombres et y ajouter le nombre de segments engendrés par les sommets de X . Notons que dans le pire des cas, chaque sommet de X induit un segment de plus. Par conséquent, on obtient $\sum_{v \in \Omega} \text{seg}(T_v) \leq |\Omega(x)| + 5kr + k \leq |\Omega(x)| + 6kr$ car $r \geq 1$. Ce qui par conséquent prouve le lemme 9.

6. Conclusion

Nous avons étendu le schéma optimal de routage dans les arbres aux (k, r) -constellations non valuées. Notre schéma de routage utilise des adresses de $O(k \log n)$ bits et des tables de routage de $O(kr \log n)$ bits par sommet. Le latence est $O(\log k + \log r)$.

Notons que ce résultat est fortement dépendant du schéma de routage dans les réseaux planaire-extérieurs et les valuations des arêtes sont supposées être uniformes. Notre schéma peut être adapté aux graphes de valuations arbitraires moyennant un algorithme et une implémentation plus sophistiqués pour le routage dans les graphes planaire-extérieurs (car le schéma de routage pour les graphes planaire-extérieurs ne marche que pour des valuations uniformes).

Une extension possible de nos résultats serait de considérer une famille de graphes plus générale. Par exemple, définissons un (k, r) -graphe comme un graphe dont les composantes bi-connexes sont sans mineur $K_{2,r}$ après la suppression de k sommets. Les (k, r) -constellations forment une sous-classe des (k, r) -graphes. Mais certains $(1, 2)$ -graphes peuvent contenir un $K_{2,r}$ avec r aussi grand que l'on veut. Par exemple, $K_{2,r} \in (1, 2)$ -graphe. Or la présence d'un $K_{2,r}$ comme mineur met en défaut notre schéma de routage.

Nous pouvons aussi remarquer que le fait que ces graphes excluent $K_{2,r}$ comme mineur se révèle fondamental dans notre schéma. La question qu'on pourrait se poser est de savoir si un schéma de routage avec des performances similaires pourrait être mis en place pour toute famille de graphes excluant un mineur planaire quelconque à $O(r)$ sommets.

Remerciements

Les auteurs remercient les rapporteurs pour leurs suggestions qui ont contribué à l'amélioration du papier et plus particulièrement de la quatrième section.

7. Bibliographie

- Abraham I., Gavoille C., Malkhi D., “On Space-Stretch Trade-Offs: Upper Bounds”, *18th Annual ACM Symposium on Parallel Algorithms and Architectures (SPAA)*, ACM Press, jul, 2006, p. 207-216.
- Abraham I., Gavoille C., Malkhi D., Nisan N., Thorup M., “Compact Name-Independent Routing with Minimum Stretch”, *ACM Transactions on Algorithms*, vol. 3, n° 4, Article 37, June, 2008.
- Cowen L. J., “Compact Routing with Minimum Stretch”, *Journal of Algorithms*, vol. 38, n° 1, 2001, p. 170-183.
- Dieng Y., Gavoille C., « La structure des graphes sans mineur $K_2;4$ », *10^e Journées Graphes et Algorithmes*, November, 2008.
- Dom M., “Compact Routing”, *Algorithms for Sensor and Ad Hoc Networks*, vol. 4621 of Lecture Notes in Computer Science, Springer, 2007, p. 187-202.
- Fraigniaud P., Gavoille C., “Routing in Trees”, F. Orejas, P. G. Spirakis, J. v. Leeuwen (eds), *28th International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP)*, vol. 2076 of Lecture Notes in Computer Science, Springer, July, 2001, p. 757-772.
- Fraigniaud P., Gavoille C., “A Space Lower Bound for Routing in Trees”, *19th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS)*, vol. 2285 of Lecture Notes in Computer Science, Springer, March, 2002, p. 65-75.
- Frederickson G. N., Janardan R., “Designing networks with compact routing tables”, *Algorithmica*, vol. 3, n° 1, August, 1988, p. 171-190.
- Gavoille C., “Routing in Distributed Networks : Overview and Open Problems”, *ACM SIGACT News - Distributed Computing Column*, vol. 32, n° 1, March, 2001, p. 36-52.
- Krioukov D., Claffy K., Fall K., Brady A., “On Compact Routing for the Internet”, *ACM SIGCOMM Computer Communication Review*, vol. 37, n° 3, July, 2007, p. 43-52.
- Peleg D., “Proximity-preserving Labeling Schemes”, *Journal of Graph Theory*, vol. 33, n° 3, 2000, p. 167-176.
- Peleg D., Upfal E., “A Trade-off between Space and Efficiency for Routing Tables”, *Journal of the ACM*, vol. 36, n° 3, July, 1989, p. 510-530.
- Thorup M., Zwick U., “Compact Routing Schemes”, *13th Annual ACM Symposium on Parallel Algorithms and Architectures (SPAA)*, ACM Press, July, 2001, p. 1-10.

Article reçu le 15 juin 2009

Accepté après révisions le 18 mars 2010

Youssef Dieng est docteur en informatique à l'Université de Bordeaux. Ses travaux portent sur les schémas de routage compact, les décompositions arborescentes et la théorie des mineurs de graphes.

Cyril Gavoille est professeur à l'Université de Bordeaux, membre junior de l'Institut Universitaire de France. Ses travaux portent sur le calcul distribué, les algorithmes de graphes et les structures de données distribuées. Plus en particulier, ses travaux concernent les algorithmes de routage et les oracles de distance.

