

Schéma d'étiquetage d'adjacence pour les arbres de degré borné

N. Bonichon, C. Gavoille, et A. Labourel

Laboratoire Bordelais de Recherche Informatique (LaBRI)
Université Bordeaux 1

8èmes Journées Graphes et Algorithmes
Orléans, 9 et 10 novembre 2006

Structure de données distribuées

Motivation principale :

On a besoin d'un modèle supportant des requêtes avec seulement un accès à des données locales telles que des étiquettes attribuées à chaque sommet.

Exemples des requêtes possibles

- Adjacence entre deux sommets.
- Requêtes d'ancêtres dans les arbres.
- Distance ou une approximation de la distance entre deux sommets.

Définition du schéma d'étiquetage d'adjacence

Definition

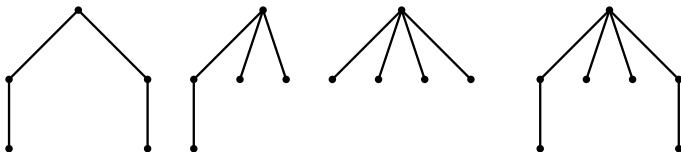
Un schéma d'étiquetage d'adjacence pour une famille F de graphes de n sommets consiste en deux fonctions :

- $E(u, G) \in (0 + 1)^{k(n)}$: Une fonction d'étiquetage qui attribue des étiquettes distinctes à chaque sommet u d'un graphe $G \in F$.
- $A(E(u, G), E(v, G)) \in \{\text{vrai}, \text{faux}\}$: Une fonction d'adjacence qui détermine si deux sommets u et v sont adjacents.

Le but est de minimiser la taille $k(n)$ des étiquettes mais aussi la complexité en temps des deux fonctions A et E .

Graphe universel induit

Graphe F -universel induit : graphe qui contient tous les graphes de la famille F en tant que sous-graphe induit.

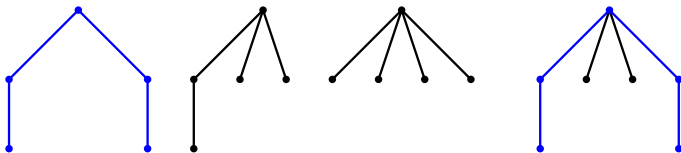


Arbres de 5 sommets

Graphe universel pour la famille
des arbres de 5 sommets

Graphe universel induit

Graphe F -universel induit : graphe qui contient tous les graphes de la famille F en tant que sous-graphe induit.

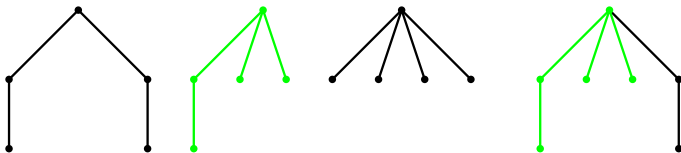


Arbres de 5 sommets

Graphe universel pour la famille
des arbres de 5 sommets

Graphe universel induit

Graphe F -universel induit : graphe qui contient tous les graphes de la famille F en tant que sous-graphe induit.

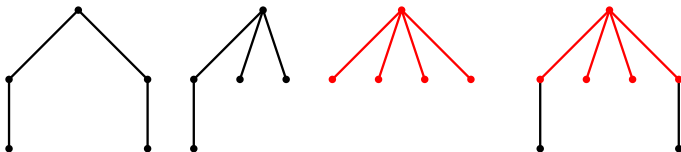


Arbres de 5 sommets

Graphe universel pour la famille
des arbres de 5 sommets

Graphe universel induit

Graphe F -universel induit : graphe qui contient tous les graphes de la famille F en tant que sous-graphe induit.

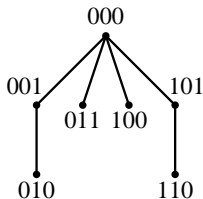


Arbres de 5 sommets

Graphe universel pour la famille
des arbres de 5 sommets

Graphes universel induit et schéma d'étiquetage d'adjacence

[Kannan, Naor et Rudich 1992] : schéma d'étiquetage d'adjacence pour F avec étiquettes de taille $k(n) \Leftrightarrow$ Graphe F -universel induit de taille $2^{k(n)}$



Graphe universel étiqueté

Travaux existants sur les graphes d'arboricité bornée

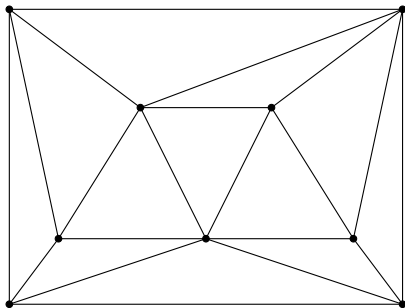
Théorème (Kannan, Naor, et Rudich 1988)

La famille des graphes d'arboricité k et de n sommets admet un schéma d'étiquetage d'adjacence avec des étiquettes de taille au plus $(k + 1) \lceil \log n \rceil$.

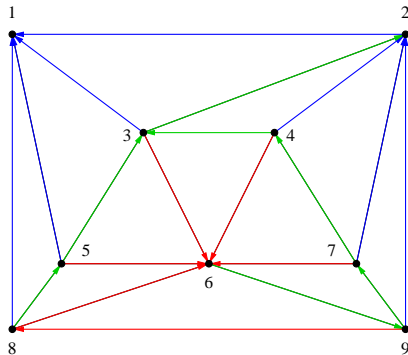
technique :

- Pré-étiquetage des sommets du graphes avec des étiquettes distinctes quelconques de taille $\lceil \log n \rceil$.
- Chaque sommet stocke en plus de son étiquette, l'étiquette de son père dans chaque arbre.

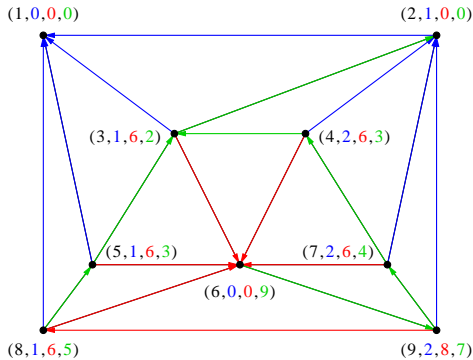
Exemple d'étiquetage



Exemple d'étiquetage



Exemple d'étiquetage



Travaux existants sur les arbres

Théorème (Chung 1990)

La famille des arbres de n sommets admet un graphe universel de taille $O(n \log n)$ et donc un schéma d'étiquetage d'adjacence de taille $\log n + \log \log n + O(1)$.

Théorème (Chung 1990)

La famille des arbres de n sommets et de degré borné admet un graphe universel de taille $O(n)$ et donc un schéma d'étiquetage d'adjacence de taille $\log n + O(1)$.

Travaux existants sur les arbres et les graphes d'arboricité bornée

Théorème (Alstrup et Rauhe FOCS 2002)

La famille des arbres de n sommets admet un schéma d'étiquetage d'adjacence de taille $\log n + O(\log^ n)$.*

Corollaire (Alstrup and Rauhe FOCS 2002)

La famille des graphes d'arboricité k et de n sommets admet un schéma d'étiquetage d'adjacence de taille $k \log n + O(k \log^ n)$.*

$$\log^* n = \min\{i \mid \log^{(i)} n \leq 1\}$$

Problème

Existe-t-il un schéma de taille $\log n + O(1)$ pour les arbres ?

Résultat principal

Théorème

La famille des arbres de n sommets et de degré $\leq d$ admet un schéma d'étiquetage d'adjacence avec des étiquettes de taille au plus $\log n + O(\log d)$ bits. De plus, le test d'adjacence se fait en temps constant et l'étiquetage du graphe en temps $O(n)$.

Corollaire pour les graphes planaires extérieurs

Lemme

G graphe planaire extérieur $\Rightarrow E(G)$ peut être partitionné en deux forêts dont une est de degré ≤ 3 . Cette partition se fait en temps linéaire.

Corollaire

La famille des graphes planaires extérieurs de n sommets admet un schéma d'étiquetage d'adjacence de taille $2 \log n + O(1)$. De plus, le test d'adjacence se fait en temps constant et l'étiquetage du graphe en temps $O(n)$.

Corollaire pour les graphes planaires

Théorème (D. Gonçalves 2005)

G graphe planaire $\Rightarrow E(G)$ peut être partitionné en trois forêts dont une est de degré ≤ 4 . Cette partition se fait en temps linéaire.

Corollaire

La famille des graphes planaires de n sommets admet un schéma d'étiquetage d'adjacence de taille $3 \log n + O(1)$. De plus, le test d'adjacence se fait en temps constant et l'étiquetage du graphe en temps $O(n)$.

Problème ouvert

Problème

Est-ce que chaque famille héréditaire de graphes avec au plus $n!2^{O(n)} = 2^{n \log n + O(n)}$ graphes étiquetés admet un schéma d'étiquetage d'adjacence de taille $\log n + O(1)$ bits ?

De nombreuses famille de graphes sont concernées par cette proposition :

- arbres
- graphes planaires
- graphes de genre bornés
- graphes excluant un mineur fixé