

## Super-graphe de deux arbres : entre P et NPC

Edgar Baucher, LaBRI, U. Bordeaux, [edgar.baucher@labri.fr](mailto:edgar.baucher@labri.fr)

François Dross, LaBRI, U. Bordeaux, [francois.dross@labri.fr](mailto:francois.dross@labri.fr)

Cyril Gavoille, LaBRI, U. Bordeaux, [gavoille@labri.fr](mailto:gavoille@labri.fr)

Amaury Jacques, LaBRI, U. Bordeaux, [amaury.jacques@labri.fr](mailto:amaury.jacques@labri.fr)

Nous introduisons ici un ensemble de problèmes de décision qui se situe sur la frontière (si elle existe) entre P (l'ensemble des problèmes solvables en temps polynomial) et NPC (l'ensemble des problèmes NP-Complets).

Le problème général est le suivant : étant donné en entrée deux arbres  $T_1, T_2$  et un entier  $N$ , existe-t-il un graphe  $U$  contenant  $T_1$  et  $T_2$  et qui a exactement  $N$  sommets ?

Il existe beaucoup de variantes de ce que veut dire “contenant  $T_1$  et  $T_2$ ”. Les plus connues sont les notions de contenir au sens de sous-graphe, ou de sous-graphe induit. Nous introduisons dans cet exposé la notion de sous-graphe  $k$ -isométrique, qui est un sous-graphes dans lequel les distances de 0 à  $k$  sont conservées. Par exemple, un sous-graphe induit est un sous-graphe 1-isométrique car c'est l'adjacence (distance 1) qui est conservée. Plus formellement, un graphe  $G$  est un sous-graphe  $k$ -isométrique d'un graphe  $H$  si toute paire de sommets qui sont à distance  $d$  dans  $G$  sont à distance  $d$  dans  $H$  si  $d \leq k$ , et à distance strictement supérieure à  $d$  sinon.

Le problème décrit plus haut est trivialement dans P pour “contenir” au sens de sous-graphe. Le problème est NP-Complet pour le sens de sous-graphe induit et nous montrons qu'il est polynomial pour le sens de sous-graphe  $\infty$ -isométrique.

Enfin, pour généraliser ce problème de décision, on peut le paramétrer par une fonction  $k(n)$ , avec  $n$  la taille des arbres en entrée, et la question devient : existe-t-il un graphe qui contient  $T_1$  et  $T_2$  en tant que sous-graphe  $k(n)$ -isométrique, et qui a exactement  $N$  sommets ? Nous montrons que le problème est polynomial si  $k(n) > n/2$ , et nous pensons qu'il est NP-Complet pour  $k(n) \leq n^c$  pour tout  $c < 1$ . Laissant ainsi ouverte la question : pour quelle fonction  $k(n)$  le problème passe-t-il de NP-Complet à polynomial ?