

ALGORITHMES DISTRIBUÉS

MASTER2 INFORMATIQUE

Décembre 2012

*Ce devoir est à rendre par courriel à gavoille@labri.fr au plus tard **lundi 7 janvier 2013** minuit. Il doit se présenter sous la forme d'un fichier de quelques pages au format .pdf ou .ps comprenant vos nom, prénom et spécialité de Master. Répondez de manière concise tout en justifiant vos réponses. La notation tiendra compte, en premier lieu, de l'argumentation de vos réponses.*

Tous les algorithmes distribués que l'on considèrera dans le devoir seront dans le modèle LOCAL.

On suppose que le graphe G est un cycle orienté muni d'une m -coloration. Tout sommet u possède une variable $c(u) \in \{0, \dots, m-1\}$ représentant la couleur du sommet u . L'orientation est définie en u par les relations prédécesseurs et successeurs, notées respectivement $\text{PRED}(u)$ et $\text{SUCC}(u)$.

Question 1. Montrer qu'en une ronde il est possible de calculer pour G une 4-coloration si $m = 6$ en donnant l'algorithme correspondant. En déduire qu'il est possible de calculer une 3-coloration pour G en $\lceil \frac{1}{2} \log^* m \rceil + 2$ rondes.

On suppose maintenant que G est un graphe possédant une 1-orientation, définie par la relation $\text{PÈRE}(u)$ pour tout sommet u , et toujours muni d'une m -coloration.

Question 2. Étendez l'algorithme de la question précédente (du cycle à une 1-orientation) et calculez pour G une 3-coloration dans le cas $m = 6$, puis dans le cas $m > 6$.

On suppose maintenant que la m -coloration de G est telle que l'ensemble des couleurs des voisins de chaque sommet u est composé d'au plus k couleurs. Notez que le degré de u n'est pas forcément borné par k .

Question 3. En vous inspirant de la première question, donnez un algorithme d'une seule ronde permettant de réduire autant que possible le nombre de couleurs. Notez que la première question correspond à $m = 6$ et $k = 2$. Donnez le nombre de couleurs maximum obtenues par votre algorithme.

T.S.V.P.

Un ensemble de sommets S d'un graphe G est dit *indépendant* s'il n'y a pas d'arête de G entre deux sommets quelconques de S . Un ensemble indépendant S est *maximal* si dans G il n'y a pas d'autre ensemble indépendant dans G contenant strictement S .

On suppose que G possède un ensemble indépendant maximal S défini par une variable booléenne $M(u) \in \{0, 1\}$ qui vaut 1 si et seulement si le sommet $u \in S$.

Question 4. En supposant que G possède une 1-orientation, donner un algorithme qui en une seule ronde construit une 3-coloration pour G .

Question 5. Donner une borne inférieure sur le nombre minimum de rondes pour calculer un ensemble indépendant maximal dans un graphe à n sommets muni d'une 1-orientation.

Question 6. Généralisée la question 4 en proposant un algorithme permettant, à partir d'un ensemble indépendant maximal et d'une k -orientation, de construire une $(2k + 1)$ -coloration.

FIN.