

Devoir Surveillé du 7 mars 2024, durée 1h30

---

Exercice 1

1. Faire tourner l'algorithme LexBFS sur le graphe  $G$  à partir du sommet  $a$ . Si on a le choix dans la sélection des sommets, on choisira le premier dans l'ordre alphabétique.

Exécution de LexBFS

sommet choisi	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$
$a$	X	7	7	7		7	7
$b$		X	76	76		76	76
$c$			X	765	5	765	765
$d$				X	54	7654	
$f$					543	X	
$g$							X
$e$					X		

2. Le graphe  $G$  est-il un graphe triangulé?

L'ordre d'élimination obtenu par LexBFS est  $e, g, f, d, c, b, a$ . Lorsque l'on élimine chaque sommet dans cet ordre, leurs voisinages dans le graphe restant sont :

- $e : \{c, d, f\} \rightarrow K_3$
- $g : \{a, b, c\} \rightarrow K_3$
- $f : \{a, b, c, d\} \rightarrow K_4$
- $d : \{a, b, c\} \rightarrow K_3$
- $c : \{a, b\} \rightarrow K_2$
- $b : \{a\} \rightarrow K_1$
- $a : \emptyset$

Dans tous les cas, ces voisinages sont des cliques, donc l'ordre obtenu par LexBFS est bien simplicial et donc le graphe est triangulé.

3. Le graphe  $G$  est-il un graphe d'intervalles? Si oui, représenter les intervalles.

Le graphe complémentaire du graphe  $G$  et son orientation transitive sont donnés par la figure 1. Les intervalles correspondant sont donnés par la figure 2.

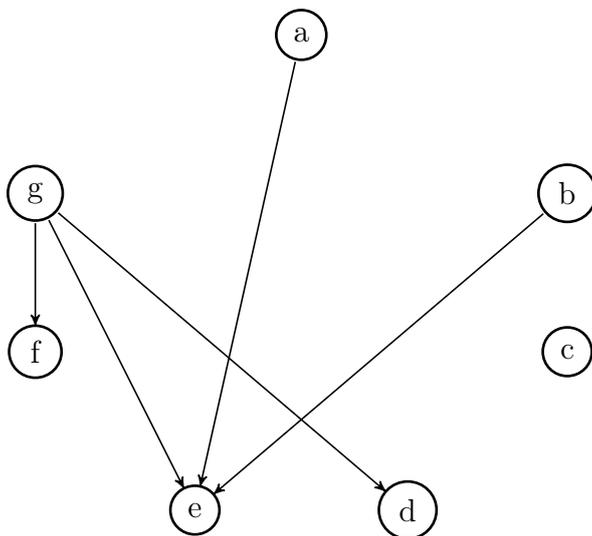


FIGURE 1 – Graphe  $\overline{G}$  orienté transitivement

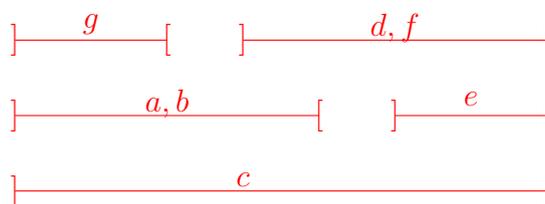


FIGURE 2 – Intervalles

### Exercice 2

1. Quel est le nombre chromatique injectif de  $K_2$ ,  $K_3$  et  $C_4$ ? On dessinera chacun de ces graphes avec une coloration injective optimale.

$\chi_i(K_2) = 1, \chi_i(K_3) = 3, \chi_i(C_4) = 2$ . Les colorations sont données par les figures 3, 4 et 5

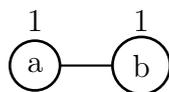


FIGURE 3 – Coloration injective de  $K_2$

2. Soit  $S_p, p \geq 1$ , le graphe composé d'un sommet  $x$  incident à  $p$  arêtes. Ce graphe est appelé une étoile. Quelles sont les valeurs de  $\chi(S_p)$  et  $\chi_i(S_p)$ ?

$\chi(S_p) = 2$  et  $\chi_i(S_p) = p$ .

3. Soit  $G$  un graphe simple. Donner une borne inférieure de  $\chi_i(G)$  en fonction du degré maximum  $\Delta(G)$  du graphe. Justifier votre réponse.

$\chi_i(G) \geq \Delta(G)$ . En effet tous les voisins d'un sommet de degré  $\Delta(G)$  doivent avoir une couleur différente.

4. Dessiner le graphe  $S_5^{(2)}$ .

Le graphe  $S_5^{(2)}$  est composé d'une clique à 5 sommets (à partir des 5 sommets différents du centre de  $S_5$ ) et d'un sommet isolé (le centre de l'étoile  $S_5$ ). Voir figure 6.

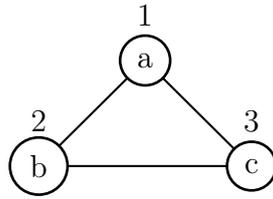


FIGURE 4 – Coloration injective de  $K_3$

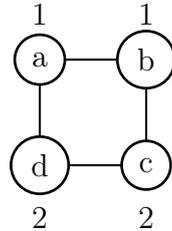


FIGURE 5 – Coloration injective de  $C_4$

5. Montrer que pour tout graphe  $G$ ,  $\chi_i(G) = \chi(G^{(2)})$ .

$c$  est une coloration injective de  $G$  si et seulement si pour tout sommet  $u$  et toute paire  $v, w$  de sommets voisins de  $u$ , on a  $c(v) \neq c(w)$ .

Or pour toute paire de sommets  $v, w$  de  $V(G)$ ,  $vw$  est une arête de  $G^{(2)}$  si et seulement si il existe un sommet  $u$  voisin de  $v$  et  $w$  dans  $G$ .

Par conséquent,  $c$  est une coloration injective de  $G$  si et seulement si  $c$  est une coloration propre de  $G^{(2)}$ . Et donc toute coloration injective d'un graphe  $G$  avec un nombre minimum de couleurs sera aussi une coloration propre de  $G^{(2)}$  avec un nombre minimum de couleurs. Donc  $\chi_i(G) = \chi(G^{(2)})$ .

6. Soit  $n \geq 2$ . Donner  $\chi(P_n)$ . Calculer  $\chi_i(P_n)$ . Justifier votre réponse.

$\chi(P_n) = 2$ ,  $\chi_i(P_2) = 1$  et pour  $n \geq 3$ ,  $\chi_i(P_n) = 2$ . En effet,  $P_n^{(2)} = P_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + P_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ .

7. Montrer que  $\chi_i(C_{2n+1}) = \chi(C_{2n+1})$ .

$C_{2n+1}^{(2)} = C_{2n+1}$ . Donc  $\chi_i(C_{2n+1}) = \chi(C_{2n+1}^{(2)}) = \chi(C_{2n+1})$ .

8. Soit  $G$  un graphe connexe ayant au moins 3 sommets. Montrer que  $\chi(G) \leq \chi_i(G)$ .

D'après le théorème de Brooks,  $\chi(G) = \Delta(G) + 1$  si et seulement si  $G = K_n$  ou  $G = C_{2k+1}$ .

Sinon  $\chi(G) \leq \Delta(G)$

D'après la question 3,  $\chi_i(G) \geq \Delta(G)$ . Donc si  $G$  n'est ni un graphe complet, ni un cycle

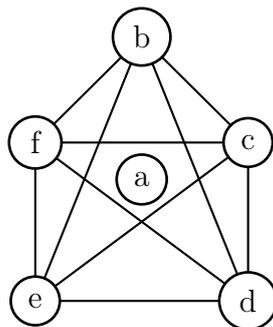


FIGURE 6 – Graphe  $S_5^{(2)}$

impair, on a bien  $\chi_i(G) \geq \chi(G)$ .

Si  $G$  est un cycle impair,  $\chi_i(G) = \chi(G)$ , d'après la question 7.

De même, pour tout  $n$ ,  $K_n^{(2)} = K_n$ . Donc  $\chi_i(K_n) = \chi(K_n)$ .

Donc pour tout graphe  $G$ , on a bien  $\chi_i(G) \geq \chi(G)$ .

9. Soit  $G$  un graphe de degré maximum  $\Delta$ . Montrer que  $\chi_i(G) \leq \Delta(\Delta - 1) + 1$ .

Soit  $v$  un sommet de  $G$ . Le nombre de voisins de  $v$  est au plus  $\Delta$  et chacun de ses voisins a au plus  $\Delta - 1$  voisins autres que  $v$ . Le nombre maximum de sommets ayant un voisin commun avec  $v$  est donc  $\Delta \times (\Delta - 1)$ . Si on dispose de  $\Delta \times (\Delta - 1) + 1$  couleurs, il sera donc toujours possible d'affecter une couleur à  $v$ . Donc  $\chi_i(G) \leq \Delta(\Delta - 1) + 1$ .

10. On considère la grille  $5 \times 5$  (5 lignes et 5 colonnes) de la figure 7. Peut-on trouver une coloration injective qui atteigne la borne inférieure de la question 3? Si oui, dessiner cette coloration. Peut-on généraliser cette coloration à une grille  $n \times n$  pour un  $n$  quelconque?

Oui, il est possible de colorier injectivement la grille  $5 \times 5$  avec 4 couleurs : voir figure 7. Cette coloration peut être généralisée. Si on numérote les colonnes à partir de 0, il suffit de colorier chaque colonne

- d'indice  $\equiv 0 \pmod 4$ , par le motif 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, ... ;
- d'indice  $\equiv 1 \pmod 4$ , par le motif 3, 3, 4, 4, 3, 3, 4, 4, ... ;
- d'indice  $\equiv 2 \pmod 4$ , par le motif 2, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, ... ;
- d'indice  $\equiv 3 \pmod 4$ , par le motif 4, 4, 3, 3, 4, 4, 3, 3, ... ;

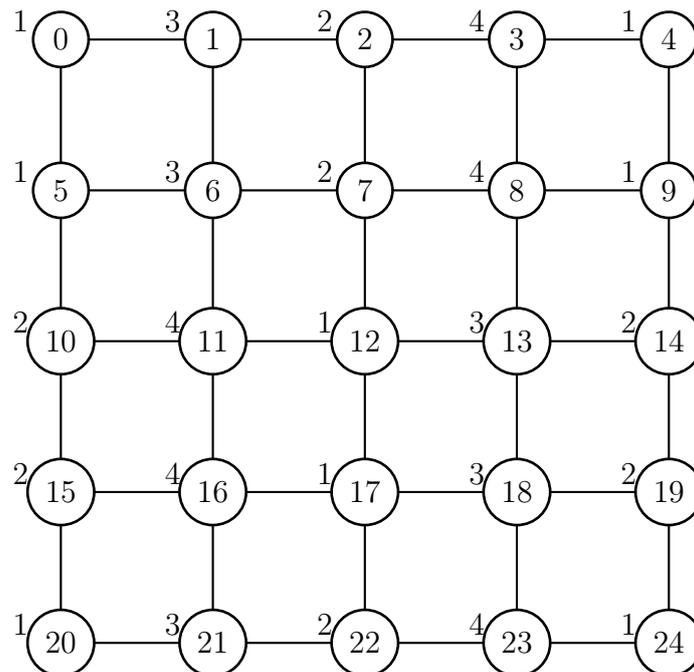


FIGURE 7 – Coloration injective de la grille  $5 \times 5$ , avec  $\Delta$  couleurs

### Exercice 3

On rappelle que  $\omega(G)$  désigne le cardinal maximum d'une clique d'un graphe  $G$  et  $\chi(G)$  son nombre chromatique.

1. Montrer que dans un graphe  $G$ , si  $\chi(G) = \omega(G)$  alors il existe un ensemble  $I$  de sommets indépendants (c'est à dire formant un stable) tel que  $\omega(G \setminus I) < \omega(G)$ .

Toute clique contient au plus un sommet d'un même stable. Donc si  $\chi(G) = \omega(G)$ , toute clique maximum contient exactement un sommet dans chaque classe de couleur d'une

coloration avec  $\chi(G)$  couleurs. Donc si on considère une coloration avec  $\chi(G)$  couleurs, et que l'on enlève une classe de couleur quelconque, on enlèvera 1 sommet à toutes les cliques de cardinalité  $\omega(G)$ . Les classes de couleur sont des stables. Donc il existe  $I$ , en prenant  $I$  étant n'importe quelle classe de couleur d'une coloration à  $\chi(G)$  couleurs, tel que  $\omega(G \setminus I) < \omega(G)$ .

2. Soit un graphe  $G$  tel que pour tout sous-graphe strict  $H$  (c'est à dire ayant au moins un sommet de moins que  $G$ ),  $\chi(H) = \omega(H)$ . Montrer que si  $\chi(G) > \omega(G)$ , alors pour tout ensemble stable  $I$ ,  $\omega(G \setminus I) = \omega(G)$ .

Preuve par contradiction : supposons qu'il existe un stable  $I$  tel que  $\omega(G \setminus I) < \omega(G)$ . Comme en enlevant un stable, on diminue d'au plus 1 la taille de toute clique, on a donc  $\omega(G \setminus I) = \omega(G) - 1$ . Comme  $\chi(G \setminus I) = \omega(G \setminus I)$  et  $\chi(G) \leq \chi(G \setminus I) + 1$ , on peut en déduire que  $\chi(G) \leq \chi(G \setminus I) + 1 = \omega(G \setminus I) + 1 = \omega(G) - 1 + 1 = \omega(G)$ . Donc  $\chi(G) = \omega(G)$ , ce qui est contraire aux hypothèses.

3. En déduire que  $G$  est un graphe parfait si et seulement si quelque soit  $H$  sous-graphe induit de  $G$ , il existe un ensemble stable  $I$  tel que  $\omega(H \setminus I) < \omega(H)$ .

$\Rightarrow$

Si  $G$  est parfait, alors pour tout sous-graphe induit  $H$  de  $G$ ,  $\chi(H) = \omega(H)$ . Donc d'après la première question, pour tout sous-graphe induit  $H$  de  $G$ , il existe un stable  $I$  tel que  $\omega(H \setminus I) < \omega(H)$ .

$\Leftarrow$

Inversement, supposons que pour tout sous-graphe  $H$  de  $G$ , il existe un stable  $I$  tel que  $\omega(H \setminus I) < \omega(H)$ .

Soit  $H$  un sous-graphe induit de  $G$  tel que tous ses sous-graphes induits stricts sont parfaits. Comme il existe un stable  $I$  tel que  $\omega(H \setminus I) < \omega(H)$ , d'après la question 2, on peut en déduire que  $\chi(H) = \omega(H)$  et donc  $H$  est parfait.

Donc par induction,  $G$  est parfait.