

Devoir Surveillé du 20 février 2023, durée 1h30

Exercice 1

1. Appliquer l'algorithme LexBFS au graphe  $G_1$  de la Figure 1, à partir du sommet  $a$ . En cas de choix sur l'ordre des sommets, privilégiez l'ordre alphabétique.

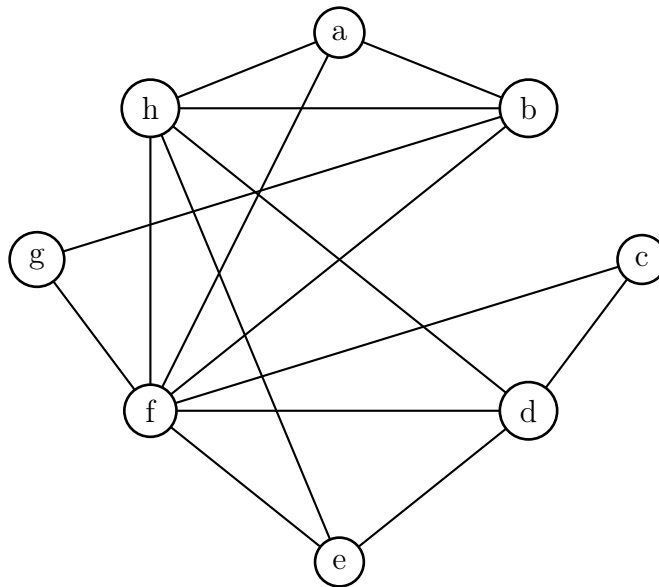


FIGURE 1 –  $G_1$

Exécution de LexBFS sur  $G_1$ .

	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$h$
initialisation	8	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
sommet choisi								
$a$	X	8				8		8
$b$		X				87	7	87
$f$			6	6	6	X	76	876
$h$				65	65			X
$g$							X	
$d$			63	X	653			
$e$					X			
$c$			X					

L'ordre obtenu est  $c, e, d, g, h, f, b, a$ .

2. Le graphe  $G_1$  est-il triangulé ? Justifier votre réponse et en cas de réponse négative, donner les sommets formant un cycle sans corde de longueur  $> 3$ .

Un graphe  $G$  est triangulé si et seulement si l'ordre retourné par LexBFS est un ordre d'élimination simplicial.

Pour  $G_1$ , l'ordre obtenu par LexBFS est  $c, e, d, g, h, f, b, a$ . Lorsque l'on élimine les sommets dans cet ordre, leurs voisinages dans le graphe restant sont :

- $c : d, f \rightarrow K_2$
- $e : d, f, h \rightarrow K_3$
- $d : f, h \rightarrow K_2$
- $g : b, f \rightarrow K_2$
- $h : a, b, f \rightarrow K_3$
- $f : a, b \rightarrow K_2$
- $b : a \rightarrow K_1$
- $a : \emptyset$

Dans tous les cas, ces voisinages sont des cliques ou un ensemble vide, donc l'ordre obtenu par LexBFS est bien simplicial et donc le graphe  $G_1$  est triangulé.

3. Le graphe  $G_1$  est-il un graphe d'intervalles ? Justifier votre réponse et donner les intervalles en cas de réponse positive.

Le complémentaire du graphe  $G_1$  est donné par la Figure 2.

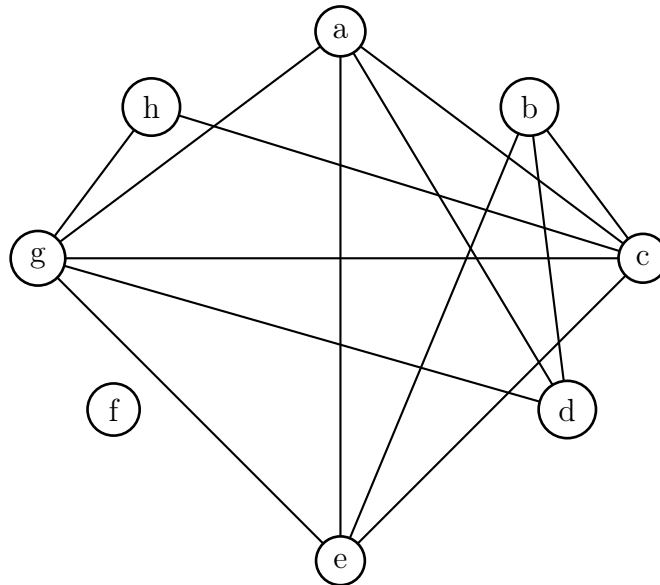


FIGURE 2 –  $\overline{G_1}$

Si on oriente (sans perte de généralité) l'arête entre  $a$  et  $c$  de  $a$  vers  $c$ , on obtient les orientations suivantes :

- $ac \Rightarrow bc, hc, ad$
- $bc \Rightarrow bd, gc$
- $bd \Rightarrow gd, be$
- $ad \Rightarrow ae$
- $gd \Rightarrow ge, gh$
- $gh \Rightarrow ge, ga$
- $hc \Rightarrow ec$

L'orientation ainsi obtenue est bien transitive, comme le montre la Figure 3

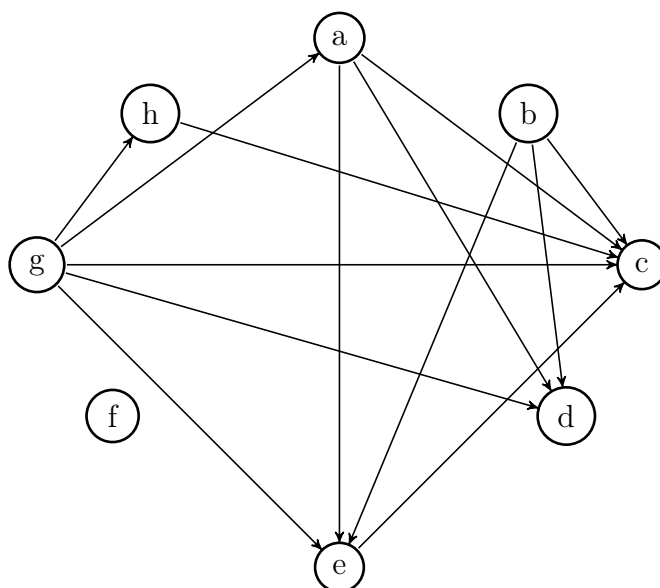


FIGURE 3 – Orientation transitive de  $\overline{G1}$

Les intervalles liés au graphe  $G1$  sont donnés par la Figure 4.

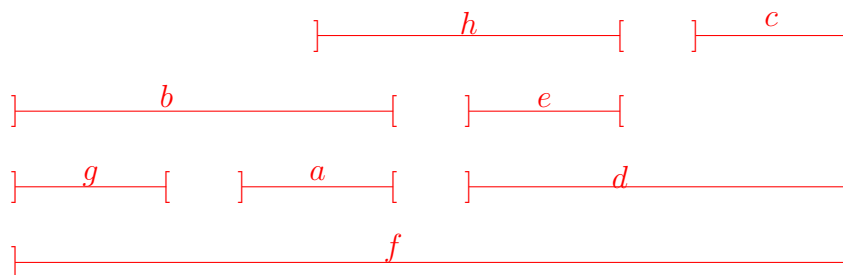


FIGURE 4 – Intervalles du graphe  $G1$

## Exercice 2

Soit  $G$  un graphe. On note  $V(G)$  l'ensemble de ses sommets,  $\omega(G)$  le cardinal maximum d'une clique de  $G$ ,  $\alpha(G)$  le cardinal maximum d'un stable de  $G$ ,  $\chi(G)$  son nombre chromatique et  $\kappa(G)$  le nombre minimum de cliques nécessaire pour couvrir  $V(G)$ .

1. Rappeler la définition d'un graphe parfait.

Un graphe  $G$  est parfait si et seulement pour tout sous-graphe  $H$  induit de  $G$ , on a  $\chi(H) = \omega(H)$ .

2. Montrer que si  $G$  est un graphe parfait, alors pour tout  $H$  sous-graphe induit de  $G$  :

$$\omega(H)\alpha(H) \geq |V(H)|$$

Dans une coloration de  $H$ , chaque classe de couleur contient au plus  $\alpha(H)$  sommets. C'est en particulier vrai pour une coloration optimale avec  $\chi(H)$  couleurs. Donc  $|V(H)| \leq$

$\chi(H)\alpha(H)$ .

Comme  $G$  est parfait  $\chi(H)\alpha(H) = \omega(H)\alpha(H)$ . Donc  $|V(H)| \leq \omega(H)\alpha(H)$ .

On rappelle que cette condition est également suffisante pour qu'un graphe soit parfait. On rappelle également qu'un graphe est parfait si et seulement si son complémentaire est parfait (Lovász, 1972).

3. Donner une caractérisation des graphes parfaits utilisant  $\alpha$  et  $\kappa$ .

Un graphe  $G$  est parfait si et seulement si son complémentaire  $\overline{G}$  est parfait.

Donc un graphe  $G$  est parfait si et seulement si pour tout sous-graphe induit  $H$  de  $\overline{G}$ ,  $\chi(H) = \omega(H)$ .

Donc un graphe  $G$  est parfait si et seulement si pour tout sous-graphe induit  $H$  de  $G$ ,  $\kappa(H) = \alpha(H)$ .

Un graphe qui n'est pas parfait est dit *imparfait*. Un graphe  $G$  imparfait est *imparfait minimal* si tout  $H$  sous-graphe induit strict (ayant au moins un sommet de moins) de  $G$  est parfait.

4. On considère  $C_7$  le cycle à 7 sommets et son complémentaire  $\overline{C_7}$ . Donner les valeurs de  $\chi(C_7)$ ,  $\chi(\overline{C_7})$ ,  $\omega(C_7)$  et  $\omega(\overline{C_7})$ .  $C_7$  et  $\overline{C_7}$  sont-ils imparfaits minimaux? Justifiez votre réponse.

$$\chi(C_7) = 3, \omega(C_7) = 2$$

$$\chi(\overline{C_7}) = 4, \omega(\overline{C_7}) = 3.$$

En effet, on a  $\alpha(\overline{C_7}) = \omega(C_7) = 2$ . Donc  $\chi(\overline{C_7}) \geq \frac{7}{2} = 3,5$ . Donc  $\chi(\overline{C_7}) \geq 4$

Donc  $C_7$  et  $\overline{C_7}$  ne sont pas parfaits.

Pour tout sommet  $x$  de  $C_7$ ,  $C_7 - x = P_6$  et les chaînes sont des graphes parfaits. Donc  $C_7$  est imparfait minimal.

De même  $\overline{C_7} - x = \overline{P_6}$  et le complémentaire d'une chaîne est le complémentaire d'un graphe parfait, donc parfait également. Donc  $\overline{C_7}$  est imparfait minimal.

5. Soit  $G$  un graphe imparfait minimal et  $x$  un sommet de  $G$ .  $G - x$  désigne le sous-graphe de  $G$  induit par  $V(G) \setminus \{x\}$ . Quelles sont les relations, en termes d'égalités, entre :

—  $\chi(G)$ ,  $\chi(G - x)$ ,  $\omega(G)$  et  $\omega(G - x)$ ?

—  $\kappa(G)$ ,  $\kappa(G - x)$ ,  $\alpha(G)$  et  $\alpha(G - x)$ ?

Pour tout graphe  $G$  et tout sommet  $x$  de  $G$ ,  $\chi(G - x) \leq \chi(G) \leq \chi(G - x) + 1$  et  $\omega(G - x) \leq \omega(G) \leq \omega(G - x) + 1$ .

Comme  $G$  est imparfait minimal,  $\chi(G) > \omega(G)$  et  $\chi(G - x) = \omega(G - x)$

On obtient donc  $\chi(G - x) = \omega(G) = \omega(G - x)$  et

$$\chi(G) = \chi(G - x) + 1 = \omega(G) + 1 = \omega(G - x) + 1.$$

De même,  $\kappa(G - x) = \alpha(G) = \alpha(G - x)$  et

$$\kappa(G) = \kappa(G - x) + 1 = \alpha(G) + 1 = \alpha(G - x) + 1.$$

6. Soit  $S$  un ensemble stable d'un graphe  $G$  imparfait minimal et  $G - S$  le sous-graphe de  $G$  induit par  $V(G) \setminus S$ . Montrer que  $\omega(G - S) = \omega(G)$  (indication : on montrera que pour tout graphe  $G$ ,  $\chi(G - S) \geq \chi(G) - 1$ ).

Pour tout graphe  $G$  et  $S$  un stable de  $G$ ,  $\chi(G) \leq \chi(G - S) + 1$  et donc  $\chi(G - S) \geq \chi(G) - 1$ .

Comme  $G$  est imparfait minimal, et d'après la question précédente,  $\chi(G) - 1 = \omega(G)$ .

Donc  $\chi(G - S) \geq \omega(G)$ . Mais comme  $G - S$  est parfait,  $\chi(G - S) = \omega(G - S)$  et comme  $\omega(G - S) \leq \omega(G)$ , la seule possibilité est donc que  $\chi(G - S) = \omega(G - S) = \omega(G)$ .

7. Soit  $G$  un graphe minimal imparfait avec  $n = |V(G)|$ ,  $\alpha = \alpha(G)$  et  $\omega = \omega(G)$ .

(a) Montrer que  $n = \alpha\omega + 1$  (indication : utiliser les égalités de la question 5).

Si  $n \leq \alpha\omega$ , alors  $G$  est parfait d'après le théorème de Lovász rappelé à la question 2. Donc  $n > \alpha\omega$ .

Pour tout sommet  $x$ , on a  $n - 1 \leq \alpha(G - x)\omega(G - x)$ .

En utilisant les égalités de la question 5, on a donc  $n - 1 \leq \alpha(G)\omega(G) < n$ .

Donc  $\alpha\omega = n - 1$  et donc  $n = \alpha\omega + 1$ .

- (b) Montrer que pour tout sommet  $x$  de  $G$ ,  $G \setminus x$  admet une partition de l'ensemble de ses sommets en  $\omega$  stables de taille  $\alpha$ .

On a  $\chi(G - x) = \omega$ ,  $\alpha(G - x) = \alpha$ , et  $n - 1 = \omega\alpha$ . Par conséquent, toute coloration optimale de  $G - x$  est composée de  $\omega$  classes de couleurs de taille  $\alpha$ .

- (c) Montrer que pour tout sommet  $x$  de  $G$ ,  $G \setminus x$  admet une partition de l'ensemble de ses sommets en  $\alpha$  cliques de taille  $\omega$ .

On a  $\kappa(G - x) = \alpha$ ,  $\omega(G - x) = \omega$ , et  $n - 1 = \omega\alpha$ . Par conséquent, toute décomposition de  $G - x$  en un nombre minimum de cliques est composée de  $\alpha$  cliques de taille  $\omega$ .

- (d) Montrer que  $G$  contient  $n (= \alpha\omega + 1)$  ensembles stables maximums  $S_1, \dots, S_n$  et  $n$  cliques maximums  $C_1, \dots, C_n$  tels que :

- i. chaque sommet de  $G$  appartient à exactement  $\alpha$  stables  $S_i$ .
- ii. chaque sommet de  $G$  appartient à exactement  $\omega$  cliques  $C_i$ .
- iii.  $C_i \cap S_i = \emptyset$ , pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$
- iv.  $|C_i \cap S_j| = 1$ , pour tout  $i, j$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $i \neq j$

Soit  $S_0$  un stable de  $G$  de taille  $\alpha$ . Soit  $v \in S_0$ . Le graphe  $G - v$  est parfait, et on peut le décomposer en une famille de  $\omega$  stables de taille  $\alpha$ . On note  $\mathcal{S}_v$  cette famille. On note  $\{\cup \mathcal{S}_v, v \in S_0\}$  par  $\{S_1, \dots, S_{\alpha\omega}\}$ . On peut voir que  $\{S_0, S_1, \dots, S_{\alpha\omega}\}$  est une famille de  $\alpha\omega + 1$  stables satisfaisant la condition 7(d)i.

De la même manière, soit  $C_0$  une clique de  $G$  de taille  $\omega$ . Soit  $v \in C_0$ . Le graphe  $G - v$  est parfait et on peut le décomposer en une famille de  $\alpha$  cliques de taille  $\omega$  (d'après la question (c)). On note  $\mathcal{C}_v$  cette famille. On note  $\{\cup \mathcal{C}_v, v \in C_0\}$  par  $\{C_1, \dots, C_{\alpha\omega}\}$ . On peut voir que  $\{C_0, C_1, \dots, C_{\alpha\omega}\}$  est une famille de  $\alpha\omega + 1$  cliques satisfaisant la condition 7(d)ii.

Par la question 6, on a  $\omega(G - S_i) = \omega$  pour tout  $i$ ,  $0 \leq i \leq \alpha\omega$ . Par conséquent, il existe une clique maximum  $C_i$  qui est disjointe de  $S_i$ . Comme chacun des sommets de  $C_i$  est dans  $\alpha$  stables de  $\{S_0, S_1, \dots, S_{\alpha\omega}\}$ , et comme deux sommets de  $C_i$  ne peuvent appartenir à un même stable,  $|C_i \cap S_j| = 1$  pour  $0 \leq i, j \leq \alpha\omega$ ,  $i \neq j$ .