

# Éléments de Théorie des Graphes

## Graphes probabilistes Quelques variations libres

Éric SOPENA, eric.sopena@labri.fr

## Septième partie

# Graphes probabilistes

## Systèmes de transitions

On s'intéresse à l'évolution de **systèmes** qui peuvent se trouver dans certains **états**, que l'on notera  $e_1, e_2, \dots$  et changer d'état selon certaines **probabilités de transition**.

Ces systèmes se modélisent de façon tout à fait naturelle par des graphes orientés valués spécifiques que l'on appellera **graphes probabilistes** (ou **graphes de transition**).

## Graphes probabilistes (1)

Un **graphe probabiliste** est un graphe orienté valué  $G = (E, T, p)$ , où :

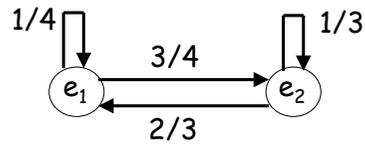
- $E = \{ e_1, \dots, e_k \}$  est un ensemble fini d'**états**,
- $T$  un ensemble de **transitions** (arcs) valués par une fonction  $p$  leur associant un nombre réel compris entre 0 et 1, correspondant à une probabilité de transition, et vérifiant la propriété suivante :

*pour tout état  $e_i$ , la somme des probabilités des transitions issues de  $e_i$  vaut 1.*

On note  $p_{i,j}$  la probabilité de transition de  $e_i$  vers  $e_j$ .

## Graphes probabilistes (2)

Exemple.



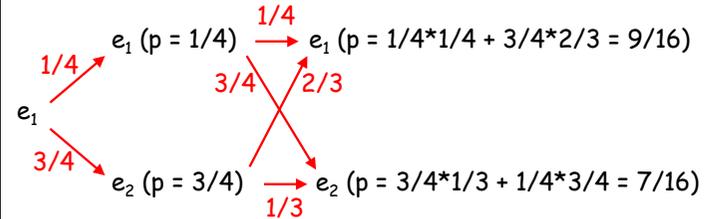
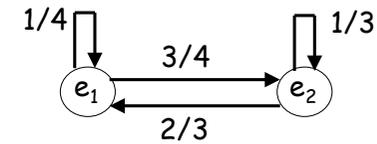
On peut définir une **loi de probabilité** sur l'ensemble des états, donnant la probabilité de se retrouver dans chacun des états après  $n$  transitions (à l'instant  $n$ ).

Cette loi de probabilité peut être représentée par une matrice ligne :

$$P_0 = [1,0] - P_1 = [1/4,3/4] - P_2 = [9/16,7/16] - \text{etc.}$$

## Graphes probabilistes (2)

Exemple.



$$P_0 = [1,0] - P_1 = [1/4,3/4] - P_2 = [9/16,7/16] - \text{etc.}$$

## Matrices de transition

À un tel graphe probabiliste, on associe une **matrice de transition**  $M$  permettant de retrouver les valeurs des différentes transitions.

La matrice de transition  $M$  associée à un graphe probabiliste  $G = (E, T, p)$ , avec  $|E| = k$ , est la matrice  $k \times k$  définie par  $M[i,j] = p_{i,j}$  ( $p_{i,j} = 0$  s'il n'existe pas de transition de  $e_i$  vers  $e_j$ ).

	$e_1$	$e_2$
$e_1$	1/4	3/4
$e_2$	2/3	1/3

$$M = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

On a alors  $P_n = P_{n-1} \times M = P_0 \times M^n$  pour tout  $n \geq 0$ .

## État stable (1)

On dit qu'un état probabiliste  $P_n$  est **stable** ssi

$$P_{n+1} = P_n \times M = P_n$$

(cet état n'évoluera donc plus).

Pour déterminer l'état stable d'un système de matrice de transition  $M$ , il suffit donc de résoudre l'équation

$$P = P \times M$$

avec  $P = [a, 1-a]$ ,  $0 \leq a \leq 1$ .

## État stable (2)

L'existence d'un état stable est assurée dans les cas suivants :

**Théorème.** Si tous les coefficients de  $M$  sont strictement positifs, la suite des états probabilistes  $(P_n)_{n \geq 0}$  converge vers un état stable  $\pi$  indépendant de l'état initial.

Par ailleurs, la suite  $(M^n)_{n \geq 0}$  converge vers une matrice  $M^*$  dont toutes les lignes sont égales à  $\pi$ .

## État stable (3)

Dans le cas d'un système à deux états, cet état stable se calcule aisément. Nous devons en effet résoudre le système suivant :

$$\begin{bmatrix} a & 1-a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 1-a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}$$

d'où  $a = q/(p+q)$  et donc :

$$\pi = \begin{bmatrix} \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q} \end{bmatrix}$$

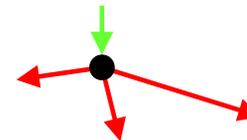
## Huitième partie

### Quelques variations libres

## Diffusion d'informations

Le sommet A veut diffuser une information à l'ensemble du réseau...

### Algorithme 1



Lorsqu'un sommet reçoit l'information pour la première fois, il la diffuse à ses autres voisins...

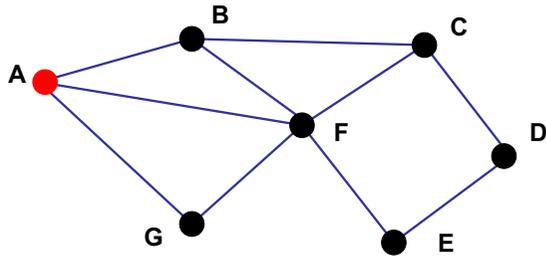
Mesures :

- nombre de messages transmis (charge)
- nombre d'étapes (temps)

### Algorithme 1 (1)

messages : 0

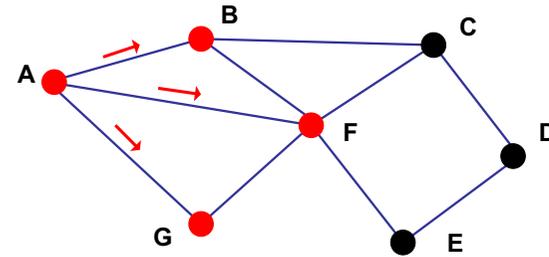
étapes : 0



### Algorithme 1 (2)

messages : 3

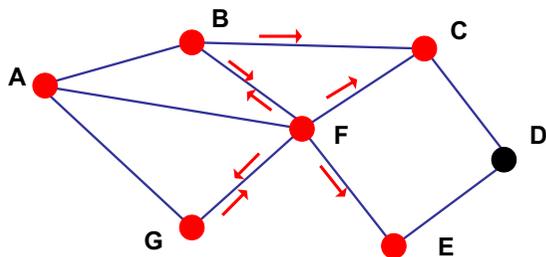
étapes : 1



### Algorithme 1 (3)

messages : 10

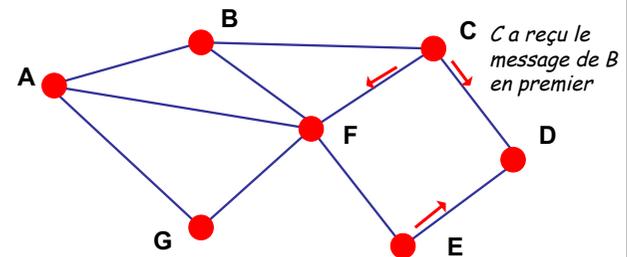
étapes : 2



### Algorithme 1 (4)

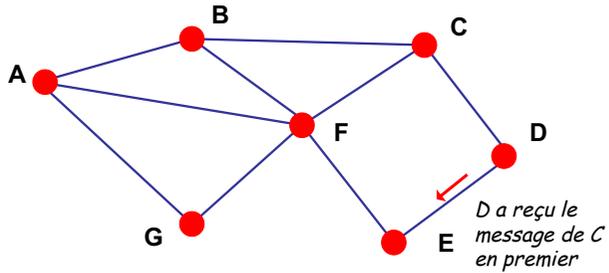
messages : 13

étapes : 3



### Algorithme 1 (5)

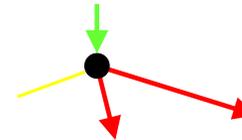
messages : 14      étapes : 4



### Diffusion d'informations

Le sommet A veut diffuser une information à l'ensemble du réseau...

#### Algorithme 2



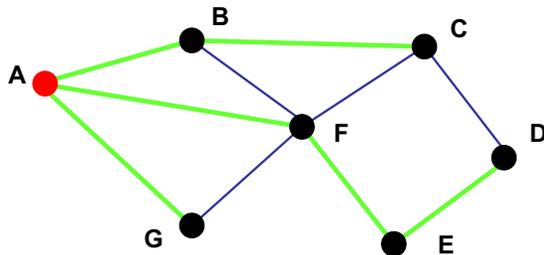
Idem algorithme 1, mais en utilisant les arêtes d'un arbre recouvrant...

Mesures :

- nombre de messages transmis (charge)
- nombre d'étapes (temps)

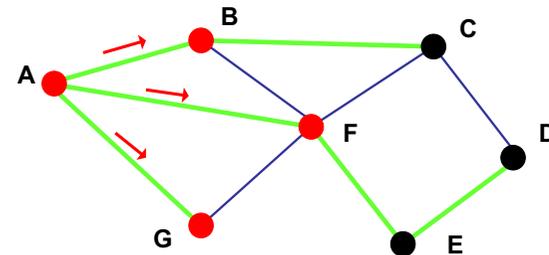
### Algorithme 2 (1)

messages : 0      étapes : 0



### Algorithme 2 (2)

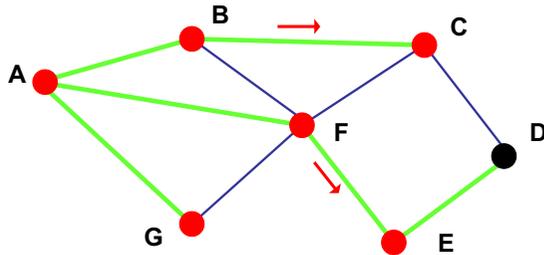
messages : 3      étapes : 1



### Algorithme 2 (3)

messages : 5

étapes : 2



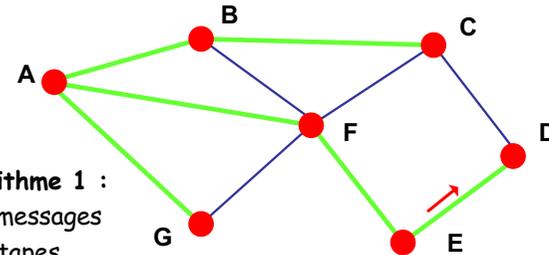
### Algorithme 2 (4)

optimal  
(6 sommets à informer)

profondeur  
de l'arbre

messages : 6

étapes : 3



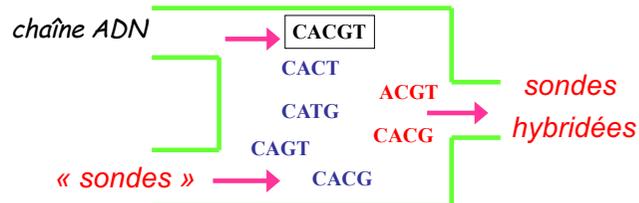
Algorithme 1 :

- > 14 messages
- > 4 étapes

### Décodage de chaînes d'ADN (1)

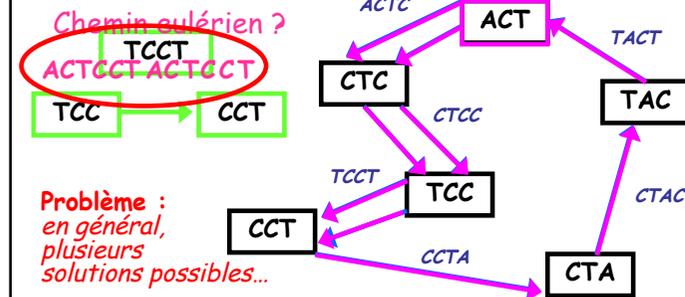
Chaîne d'ADN = séquence de nucléotides A,C,G,T :  
Adénine, Cytosine, Guanine, Thymine

#### Séquençage par « hybridation »



### Décodage de chaînes d'ADN (2)

Sondes hybridées : TCCT, ACTC, CTAC, TCCT, ACTC, CTCC, TACT, CCTA, CTCC



Problème :  
en général,  
plusieurs  
solutions possibles...

### Le graphe de Hollywood (1)

- Sommets = acteurs
- Arêtes entre acteurs ayant joué dans un même film...

**Propriété**  
Tout acteur est à distance au plus 6 de Kevin Bacon !...



### Le graphe de Hollywood (2)

Site Web :

<http://oracleofbacon.org/>  
The Oracle of Bacon at Virginia

**Louis de Funes has a Bacon number of 2.**

Louis de Funes was in *Aventures de Rabbi Jacob, Les* (1973) with Janet Brandt

Janet Brandt was in *Queens Logic* (1991) with Kevin Bacon

### Le graphe de Hollywood (3)

Site Web :

<http://oracleofbacon.org/>  
The Oracle of Bacon at Virginia

**Catherine Deneuve has a Bacon number of 2.**

Catherine Deneuve was in *Anima persa* (1977) with Vittorio Gassman

Vittorio Gassman was in *Sleepers* (1996) with Kevin Bacon

### Le graphe de Hollywood (4)

Site Web :

<http://oracleofbacon.org/>  
The Oracle of Bacon at Virginia

**Audrey Tautou has a Bacon number of 3.**

Audrey Tautou was in *Venus beauté (institut)* (1999) with Bulle Ogier

Bulle Ogier was in *Merci Docteur Rey* (2002) with Eli Wallach

Eli Wallach was in *Mystic River* (2003) with Kevin Bacon

## Graphes « petit monde » (1)

Le graphe de Hollywood est un graphe « petit monde »

Graphe « petit monde » :

- faible diamètre
- densité globale faible
- densité locale forte

Autres exemples de graphes « petit monde » :

- graphe du web (liens entre pages),
- réseau électrique de l'ouest des États-unis,
- graphe des citations (articles scientifiques),
- réseau neuronal du ver *Caenorhabditis elegans*.

## Graphes « petit monde » (2)

### Intérêt des graphes petits mondes

Modélisation de nombreuses situations concrètes :

- réseaux réels (électrique, informatique, ...)
- graphe du web
- sociologie
- propagation d'épidémies
- etc.

Nombreux problèmes algorithmiques (simulation de systèmes complexes, plus courts chemins, graphes dynamiques, etc.).