

# Éléments de Théorie des Graphes

Introduction, définitions  
Les graphes : un outil de modélisation  
Représentation des graphes

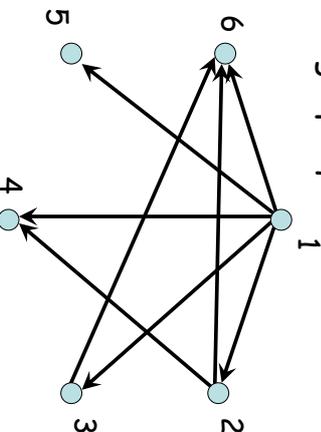
Éric SOPENA, [eric.sopena@labri.fr](mailto:eric.sopena@labri.fr), modifiés par Olivier BAUDON

MEEF - Éléments de Théorie des Graphes

## Graphes d'une relation (petite école...)

Soit la relation  $R$  sur  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  définie par :  
 $x R y$  si et seulement si  $x \mid y$  ( $x$  divise  $y$ )

Représentation graphique :



## Première partie

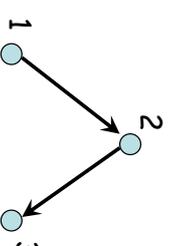
# Introduction, définitions

ENSM - Éléments de Théorie des Graphes

## Graphes orientés (définition)

Un **graphe orienté**  $G$  est un couple  $G = (S, A)$  où

- $S$  est un ensemble fini de **sommets**
- $A$  est un ensemble de couples de sommets  
appelés **arcs**



$$S = \{1, 2, 3\}$$

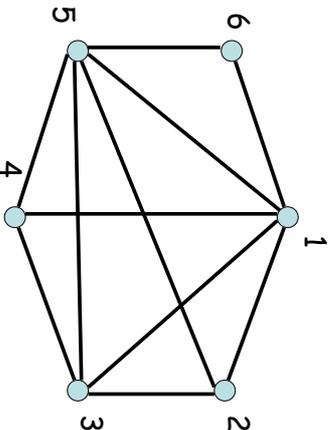
$$A = \{(1,2), (2,3)\}$$

## Graphes d'une relation symétrique (1)

Soit la relation  $R$  sur  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  définie par :

$x R y$  ssi  $x$  et  $y$  sont premiers entre eux

Représentation graphique :

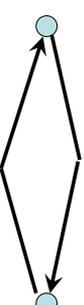


## Graphes d'une relation symétrique (2)

En réalité,



est un « raccourci » de dessin pour :

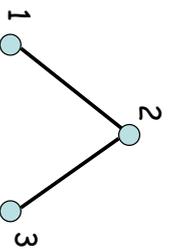


Nous avons un graphe orienté **symétrique**, appelé **graphe non orienté**...

## Graphes non orientés (définition)

Un **graphe non orienté**  $G$  est un couple  $G = (S, A)$  où

- $S$  est un ensemble fini de **sommets**
- $A$  est un ensemble de « paires » de sommets appelées **arêtes**



$$S = \{1, 2, 3\}$$

$$A = \{(1,2), (2,3)\}$$

équivalent à  $A = \{(1,2), (2,1), (2,3), (3,2)\}$

## Boucles, graphes simples, multigraphes

Une **boucle** :



On parle de **multigraphe** (orienté ou non orienté) si on autorise plusieurs arêtes (ou arcs) entre deux sommets (arêtes multiples).



On appelle **graphe simple** un graphe sans arêtes (ou arcs) multiples et sans boucle.

## Degré d'un sommet, voisinages (1)

### Cas non orienté

Si  $\{u,v\}$  est une arête,  $u$  et  $v$  sont voisins.

Le **degré** d'un sommet  $u$ , noté  $d(u)$ , est le nombre de voisins de  $u$  (*attention : les boucles comptent double...*).

On note  $\Delta(G)$  le **degré maximum** de  $G$ , et  $\delta(G)$  le **degré minimum** de  $G$ .

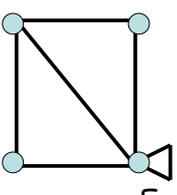
### Cas orienté

Si  $(u,v)$  est un arc,  $u$  est un **prédécesseur** de  $v$  et  $v$  est un **successeur** de  $u$ ,  $u$  et  $v$  sont **voisins**.

Le nombre de prédécesseurs de  $u$  est le **degré entrant** de  $u$ , noté  $d^-(u)$ , le nombre de successeurs de  $u$  est le **degré sortant** de  $u$ , noté  $d^+(u)$ , le nombre de voisins de  $u$  est le **degré** de  $u$ , noté  $d(u) : d(u) = d^-(u) + d^+(u)$ .

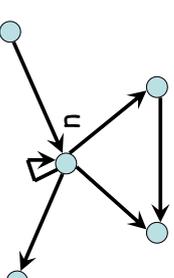
## Degré d'un sommet, voisinages (2)

Exemples :



$$\begin{aligned}d(u) &= 5 \\ \Delta(G) &= 5 \\ \delta(G) &= 2\end{aligned}$$

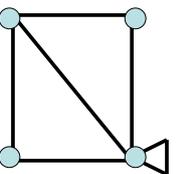
$$\begin{aligned}d^-(u) &= 2 \\ d^+(u) &= 4 \\ d(u) &= 6\end{aligned}$$



## Degré d'un sommet, voisinages (3)

Pour tout graphe  $G$ , la somme des degrés des sommets de  $G$  est égale à deux fois le nombre d'arêtes de  $G$  (lemme des poignées de mains).

Pour tout graphe orienté  $G$ , la somme des degrés entrants des sommets de  $G$  est égale à la somme des degrés sortants des sommets de  $G$  et au nombre d'arcs de  $G$  (lemme des coups de pieds).



$$2 + 5 + 2 + 3 = 2 \times 6 = 12$$

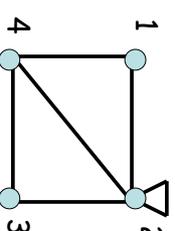
Récurrance sur nombre d'arcs ou d'arêtes...

## Chaînes, cycles, chemins et circuits (1)

Une **chaîne de longueur  $k$**  dans un graphe non orienté est une suite de  $k+1$  sommets  $u_1, u_2, \dots, u_{k+1}$ , telle que pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq k$ ,  $u_i u_{i+1}$  est une arête (longueur = nombre d'arêtes).

Si tous les sommets sont distincts, la chaîne est **élémentaire**.

Si  $u_1 = u_{k+1}$ , la chaîne est un **cycle**.



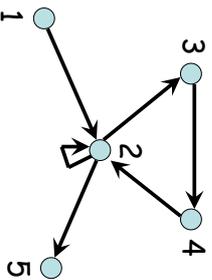
122332412 est une chaîne  
123 est une chaîne élémentaire  
12243241 est un cycle  
2342 est un cycle élémentaire

## Chaînes, cycles, chemins et circuits (2)

Un **chemin de longueur k** dans un graphe orienté est une suite de  $k+1$  sommets  $u_1, u_2, \dots, u_{k+1}$ , telle que pour tout  $i, 1 \leq i \leq k$ ,  $u_i u_{i+1}$  est un arc (longueur = nombre d'arcs).

**Élémentaire** : idem.

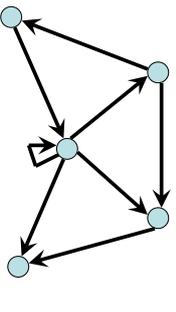
**Circuit** : chemin tel que  $u_1 = u_{k+1}$ .



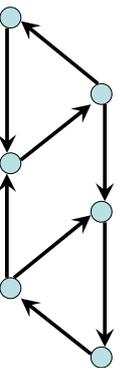
322524 est une chaîne  
 1243 est une chaîne élémentaire  
 125 est un chemin élémentaire  
 34223 est un circuit  
 2342 est un circuit élémentaire

## Connexité (2)

Un graphe orienté est **connexe** (resp. **fortement connexe**) si pour tous sommets  $u$  et  $v$  il existe une chaîne (resp. un chemin) allant de  $u$  à  $v$ .



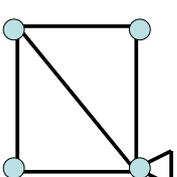
connexe mais pas  
fortement connexe



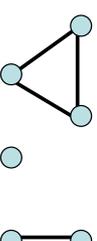
fortement connexe

## Connexité (1)

Un graphe non orienté est **connexe** si pour tous sommets  $u$  et  $v$  il existe une chaîne allant de  $u$  à  $v$ .



connexe

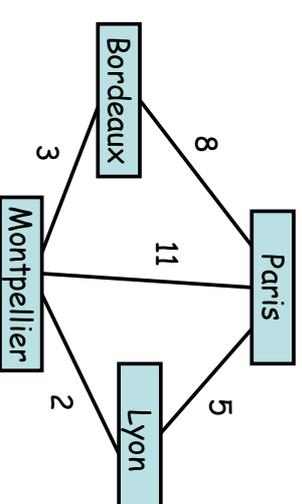


non connexe

## Graphes valués, graphes étiquetés

Un graphe est **valué** si on associe des valeurs à ses arcs (ou arêtes).

Un graphe est **étiqueté** si on associe des étiquettes à ses sommets.

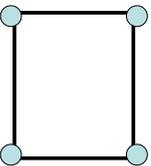


## Types particuliers de graphes (1)

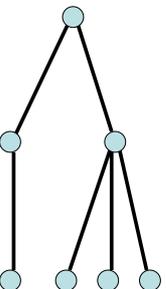
Une chaîne :



Un cycle :

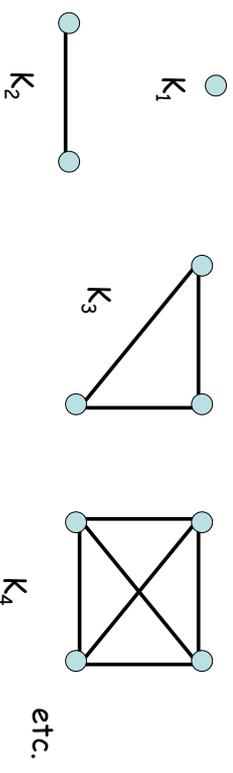


Un arbre :



## Types particuliers de graphes (2)

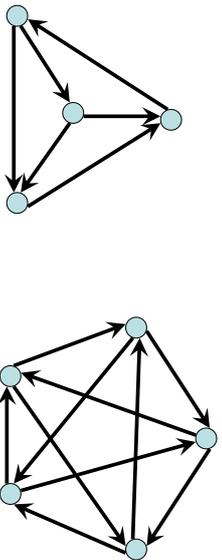
Un graphe est **complet** si c'est un graphe simple dont tous les sommets sont reliés deux à deux.



On note  $K_n$  le graphe complet à  $n$  sommets.

## Types particuliers de graphes (3)

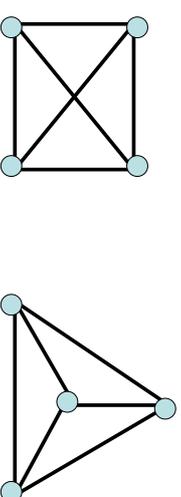
Un graphe complet orienté (antisymétrique) est un **tournoi**.



## Types particuliers de graphes (4)

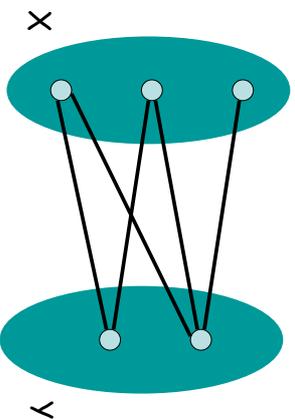
Un graphe est **planaire** s'il peut être dessiné (sur le plan ou la sphère) sans que ses arêtes se croisent.

Exemple :



## Types particuliers de graphes (5)

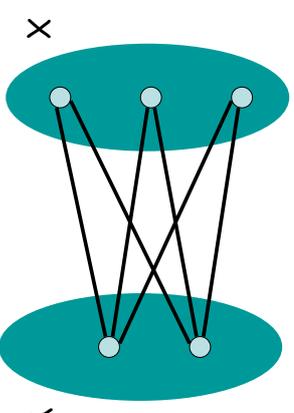
Un graphe est **biparti** s'il existe une partition de l'ensemble de ses sommets,  $S = X \cup Y$ , telle que toutes les arêtes relient un sommet de  $X$  à un sommet de  $Y$ .



## Types particuliers de graphes (6)

Un graphe est **biparti complet** s'il est biparti et si toutes les arêtes possibles entre  $X$  et  $Y$  sont présentes.

Le graphe  $K_{3,2}$



On note  $K_{n,m}$  le graphe biparti complet avec  $|X| = n$  et  $|Y| = m$ .

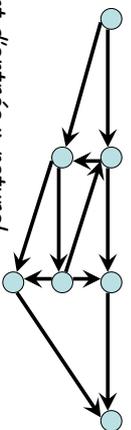
## Chemin, arborescence et... graphe !

Ce sont des généralisations successives :

Chemin :   
A horizontal line of five light blue circular vertices connected by four straight edges pointing to the right.

Arborescence :   
A directed graph with 7 light blue circular vertices. One vertex at the top left is the root. It has two outgoing edges to two vertices below it. The rightmost of these two has two outgoing edges to two vertices below it. The leftmost of these two has one outgoing edge to one vertex below it. The rightmost of these three has one outgoing edge to one vertex below it. All edges are directed downwards or to the right.

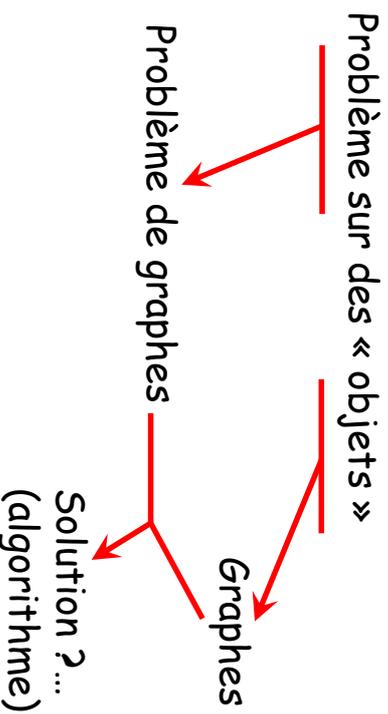
graphe orienté :



Pas de « point d'entrée » naturel...

# Les graphes : un outil de modélisation

## Modélisation et résolution de problèmes



## Un problème de plus court chemin (1)

### Question :

On souhaite prélever 4 litres de liquide dans un tonneau. Pour cela, on dispose de deux jarres, l'une de 5 litres, l'autre de 3 litres.

### Modélisation :

sommets : couples (contenu J5, contenu J3)  
arcs : opérations autorisées

Exemples :  $(4,1) \rightarrow (2,3)$  ou encore  $(4,1) \rightarrow (0,1)$

### Problème :

Trouver un plus court chemin reliant  $(0,0)$  à  $(4,x)$ .

## Quelques exemples généraux

### Théorie des jeux

- ✓ sommets : positions de jeux,
- ✓ arcs : mouvements de jeux,

✓ problème : atteindre une position gagnante

### Transport routier (ferroviaire, aérien)

- ✓ graphe : réseau routier (orienté ou non)
- ✓ problèmes : recherche / optimisation de trajet

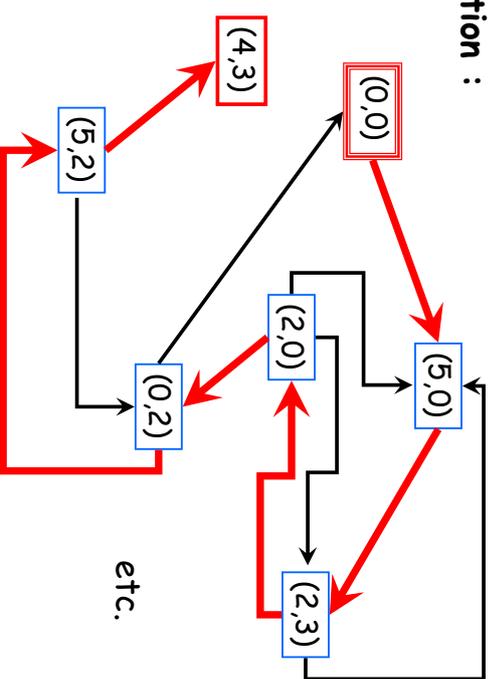
### Réseaux numériques

- ✓ graphe : réseau (orienté ou non)
- ✓ problèmes : routage d'information, optimisation de débit

Etc.

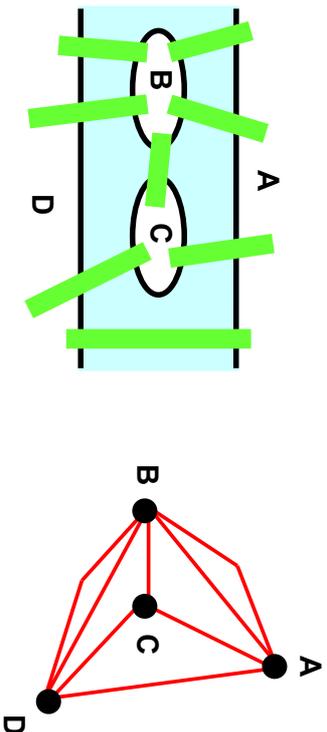
## Un problème de plus court chemin (2)

### Solution :



etc.

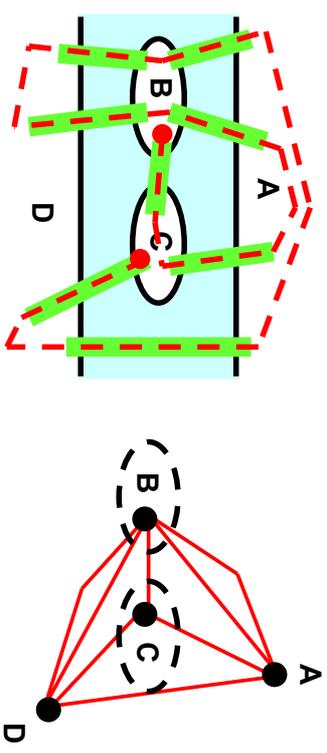
## Les ponts de Koenigsberg (1)



**Problème :**

Trouver un cycle (chemin) passant une et une seule fois par chaque arête.

## Les ponts de Koenigsberg (2)



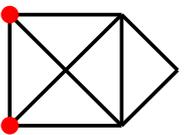
Il existe un cycle « eulérien » si et seulement si  $\mathcal{G}$  est connexe et tous ses sommets sont de degré pair ...

Il existe un chemin « eulérien » si et seulement si  $\mathcal{G}$  est connexe et possède 0 ou 2 sommets de degré impair ...

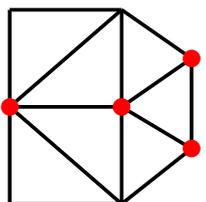
## Un problème similaire (petite école)

**Problème :**

Peut-on tracer les figures suivantes sans lever le crayon ?



OUI



NON

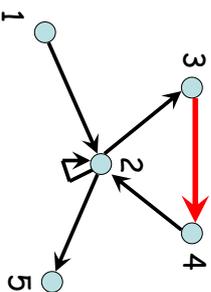
Représentation des graphes (structure de données)

## Matrices d'adjacence – Cas orienté

**Définition.** Soit  $G = (S, A)$  un graphe (orienté ou non) avec  $S = \{1, 2, \dots, n\}$  ; la **matrice d'adjacence** de  $G$ , notée  $M = M(G)$ , est la matrice  $n \times n$  à valeurs dans  $\{0, 1\}$  définie par :

$M[i, j] = 1$  ssi  $(i, j)$  est un arc (arête) de  $G$

Exemple :



	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	0
2	0	1	1	0	1
3	0	0	0	1	0
4	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	0

## Matrices d'adjacence – Complexité

$n$  = nombre de sommets

**Complexité en espace :**  $O(n^2)$

*quel que soit le nombre d'arcs, donc coûteux pour les graphes peu denses...*

**Complexité en temps de quelques opérations :**

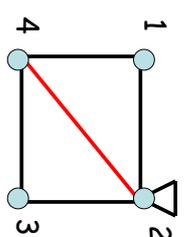
tester la présence d'un arc de  $i$  vers  $j$  :  $O(1)$

parcourir les voisins d'un sommet :  $O(n)$

parcourir tous les arcs :  $O(n^2)$

## Matrices d'adjacence – Cas non orienté

**Remarque :** dans le cas d'un graphe non orienté, la matrice d'adjacence est **symétrique**.



M :

	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2	1	0	1	1
3	0	1	0	1
4	1	1	1	0

**Représentation compacte :**

$M[i, j] = \text{Tri}(i-1)/2 + j$  ( $i > j$ ), ainsi  $M[3,4]=M[4,3]=\text{Tri}[9]$

T :

0	1	1	0	1	1	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---

1 2 3 4

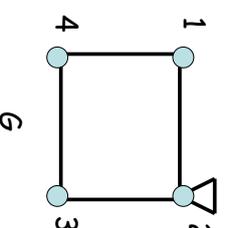
## Matrices d'adjacence – Remarque (1)

Considérons les opérations (booléennes) suivantes :

+	0	1
0	0	1
1	1	1

x	0	1
0	0	0
1	0	1

**Proposition**  
 $M^k[i, j] = 1$  ssi il existe un chemin de longueur  $k$  allant de  $i$  à  $j$



	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2	1	0	1	1
3	0	1	0	1
4	1	1	1	0

	1	2	3	4
1	0	1	1	1
2	1	0	1	1
3	0	1	0	1
4	1	1	1	0

## Matrices d'adjacence – Remarque (2)

Preuve par récurrence sur k.

- $k = 1$ .  $M^1 = M$ , donc vrai par définition (arc = longueur 1)
- Supposons vrai jusqu'au rang  $k-1$ .

On a  $M^k = M \times M^{k-1}$ ,

et donc pour tout couple  $(i,j)$  :

$$M^k[i,j] = M[i,1] \times M^{k-1}[1,j] + \dots + M[i,s] \times M^{k-1}[s,j] + \dots + M[i,n] \times M^{k-1}[n,j]$$

Ainsi,  $M^k[i,j] = 1$

ssi il existe s tel que  $M[i,s] \times M^{k-1}[s,j] = 1$

i.e. ssi il existe un sommet s tel que

-  $M[i,s] = 1$ , i.e. l'arc  $(i,s)$  existe

-  $M^{k-1}[s,j] = 1$ , i.e. il existe un chemin de longueur  $k-1$

de s à j.

i.e. il existe un chemin de longueur k de i à j.

CCFD.

## Matrices d'adjacence – Remarque (3)

En utilisant les opérations + et  $\times$  usuelles, nous avons :

**Proposition.**  $M^k[i,j] = p$  ssi il existe p chemins de longueur k allant de i à j

	1	2	3	4		1	2	3	4	
1	1	0	1	0	1	1	2	1	2	
2	0	1	1	1	0	2	1	3	1	
3	0	1	0	1	1	3	2	1	2	
4	1	0	1	0	0	4	0	2	0	
	$M$					$M^2$				

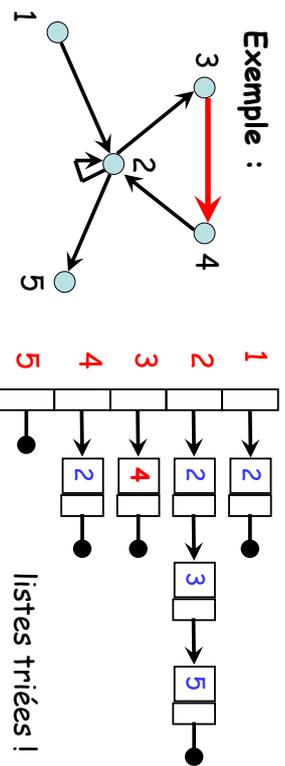
**Exercice.** Prouvez ce résultat.

## Listes d'adjacence – Cas orienté

**Définition.** La liste d'adjacence d'un sommet u est la liste des successeurs de u (ou des voisins de u dans le cas non orienté).

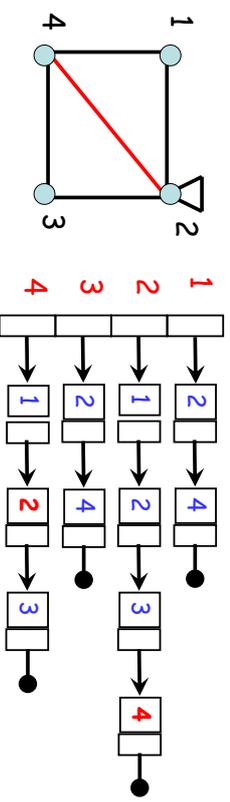
Un graphe peut alors être représenté par l'ensemble (tableau, liste) des listes d'adjacence de ses sommets.

Exemple :



## Listes d'adjacence – Cas non orienté

**Remarque.** Dans le cas des graphes non orientés, chaque arête apparaît dans 2 listes.



On utilise plutôt des listes de listes si le graphe peut évoluer par ajout ou suppression de sommets.

## Listes d'adjacence – Complexité

---

$n$  = nombre de sommets,  $m$  = nombre d'arcs

**Complexité en espace :**  $O(n + m)$

*optimal...*

**Complexité en temps de quelques opérations :**

tester la présence d'un arc de  $i$  vers  $j$  :  $O(n)$

parcourir les voisins d'un sommet :  $O(n)$

parcourir tous les arcs :  $O(n + m)$