

Devoir Surveillé du 15 mai 2018

Exercice 1

On considère le graphe G_1 de la Figure 1.

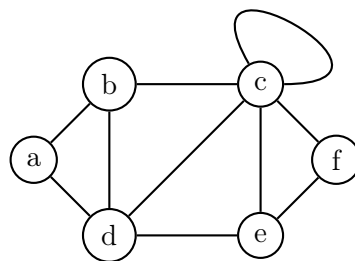


FIGURE 1 – Graphe G_1

1. Quel sont les degrés des sommets a et c ?
Le sommet a est de degré 2 et le sommet c de degré 6 (la boucle compte double).
2. Quelle est la longueur d'un plus court chemin reliant a à f ?
Les plus courts chemins entre a et f sont de longueur 3.
3. Quels sont les plus courts chemins reliant a à f ?
Il y a 3 chemins distincts de longueur 3 reliant a à f : $abcf$, $adcf$ et $adef$.
4. Quelle est la taille maximum d'une clique de G ? d'un stable de G ?
La plus grande clique (ensemble de sommets tous voisins entre eux) est de taille 3, par exemple $\{a, b, d\}$. Le plus grand stable (ensemble de sommets n'ayant aucune arête entre eux) est de taille 2, par exemple $\{a, e\}$.
5. Combien de couleurs faut-il au minimum pour colorier le graphe obtenu en supprimant la boucle sur le sommet c ? Justifier votre réponse. Que se passe-t-il si on laisse la boucle?
Il faut au moins 3 couleurs car il existe une clique de taille 3. On peut colorier le graphe avec 3 trois couleurs, par exemple avec la coloration de la Figure 2. Si on laisse la boucle sur c , le graphe n'admet plus de coloration propre.

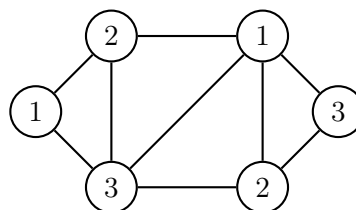


FIGURE 2 – Coloration du graphe G_1 sans la boucle sur c

6. Donner A , la matrice d'adjacence du graphe G , puis la représentation de G par liste d'adjacence. L'ordre des lignes et colonnes correspond à l'ordre alphabétique des sommets. Par exemple, $A_{1,2}$ vaudra le nombre d'arête entre les sommets a et b .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Que représente la matrice A^2 ? Quelle sera la valeur de $A_{c,c}^2$?

$A_{i,j}^2$ aura pour valeur le nombre de chaînes de longueur 2 reliant le i^{me} et le j^{me} sommets. Attention, il ne s'agit pas uniquement des chaînes simples (n'utilisant jamais deux fois la même arête) mais de toutes les chaînes possibles.

$A_{c,c}^2 = 5$, les chemins de longueur 2 reliant c à lui-même étant cbc, ccc, cdc, cec et cfc . C'est en fait le nombre d'arêtes incidentes, chaque arête étant parcourue deux fois.

Exercice 2

On rappelle que l'algorithme First-Fit consiste à colorier un par un chaque sommet d'un graphe en utilisant à chaque fois la plus petite couleur disponible (couleur non encore utilisée par un de ses voisins). Proposer deux ordres sur les sommets du graphe P_5 ci-dessous de façon à ce que :

- la coloration obtenue par First-Fit soit optimale (utilise un nombre minimum de couleurs) ;
- la coloration obtenue par First-Fit ne soit pas optimale.

P_5 est 2-coloriable et l'ordre $abcde$ aboutit bien à une coloration en 2 couleurs.

Si on prend l'ordre $adbce$ on obtiendra la 3-coloration de la Figure 4.



FIGURE 3 – Chaîne à 5 sommets P_5

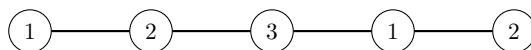


FIGURE 4 – Coloration de P_5 par First-Fit dans l'ordre $adbce$

3. Pour tout graphe G , quelle relation peut-on établir entre $\chi(G)$ son nombre chromatique et $\Delta(G)$, son degré maximum, grâce à l'algorithme First-Fit?

On a $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. En effet à chaque étape, il existe toujours une couleur entre 1 et le degré du sommet + 1 disponible.

Exercice 3

Les suites suivantes sont-elles graphiques (suites correspondant à la liste des degrés des sommets d'un graphe)? Justifier vos réponses.

- 4, 4, 3, 3, 2

Cette suite est graphique, le graphe correspondant étant donné dans la Figure 5.

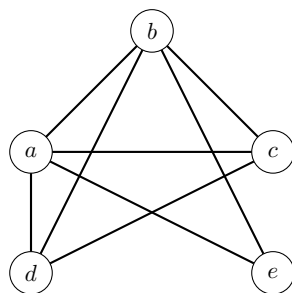


FIGURE 5 – Graphe ayant comme suite des degrés 4, 4, 3, 3, 2

2. 4, 4, 3, 2, 2, 1, 1

Cette suite n'est pas graphique car la somme des degrés est impaire (il y a 3 sommets de degré impair).

Exercice 4

Dans un parc animalier, les allées sont connectées par des carrefours notés de C1 à C8. On souhaite parcourir toutes les allées si possible une et une seule fois. Le tableau suivant donne les allées entre les différents carrefours :

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
C1		X	X					
C2	X		X	X				
C3	X	X		X	X			
C4		X	X			X		X
C5			X			X	X	X
C6				X	X			X
C7					X			X
C8				X	X	X	X	

1. Modéliser la question en terme de graphe.

On cherche une chaîne ou un cycle eulérien dans le graphe de la Figure 6. Chaque sommet représente un carrefour et chaque arête une allée.

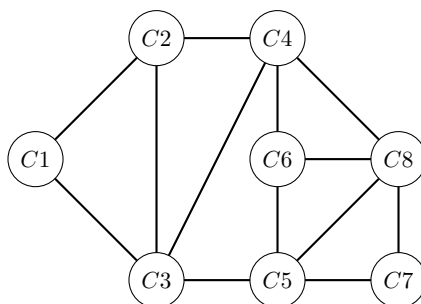


FIGURE 6 – Graphe représentant le parc animalier

2. Est-il possible de parcourir toutes les allées une et une seule fois en revenant au point de départ ? Justifier votre réponse.

Non car le graphe possède des sommets de degré impair et pour revenir au point de départ, il faut un cycle eulérien et donc que tous les sommets soient de degré pair.

3. Sinon, est-il possible de parcourir toutes les allées une et une seule fois en mettant une entrée et une sortie séparées ? Si oui, quelles sont les possibilités pour positionner l'entrée et la sortie ? Justifier votre réponse.

Oui car le graphe possède exactement deux sommets de degré impair et donc une chaîne eulérienne. Les sommets de départ et d'arrivée doivent être les sommets de degré impair. Donc le couple entrée-sortie est soit (C2, C6) soit (C6, C2).

4. Si vous répondez oui à l'une des deux questions précédentes, proposer un chemin en donnant l'ordre de passage aux différents carrefours.

On peut utiliser comme chaîne eulérienne :

C2, C1, C3, C2, C4, C3, C5, C6, C4, C8, C5, C7, C8, C6

Exercice 5

Soit $G = (X, A)$ le graphe orienté avec une fonction de pondération $w : A \rightarrow \mathbb{R}$ représenté dans la Figure7.

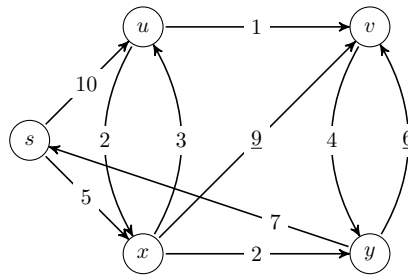


FIGURE 7 – Graphe G valué par w .

En appliquant l'algorithme de *Dijkstra*, déterminer la distance (longueur du plus court chemin) du sommet s à chacun des sommets de G .

Exécution de *Dijkstra*. Chaque ligne représente pour l'utilisation d'un pivot donné les mises à jour du plus court chemin depuis la source au sommet correspondant à la colonne.

pivot	s	u	v	x	y
	0	∞	∞	∞	∞
s	X	10		5	
x		8	14	X	7
y			13		X
u		X	9		
v			X		

Sommet	distance de s	père
s	0	NIL
u	8	x
v	9	u
x	5	s
y	7	x

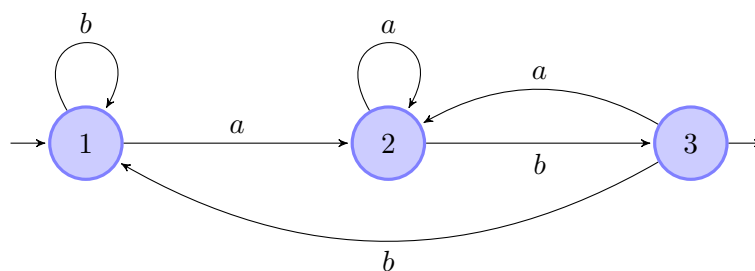
On a donc le résultat suivant :

Exercice 6

Soit l'alphabet $A = \{a, b\}$.

1. Proposez un automate fini déterministe reconnaissant les mots de A^* terminés par ab .

L'automate solution est donné dans la figure ci-dessous.



2. Proposez un automate fini déterministe reconnaissant les mots de A^* contenant au moins deux a .

L'automate solution est donné dans la figure ci-dessous.

