

Devoir Surveillé du 15 mai 2018

**Exercice 1**

On considère le graphe  $G_1$  de la Figure 1.

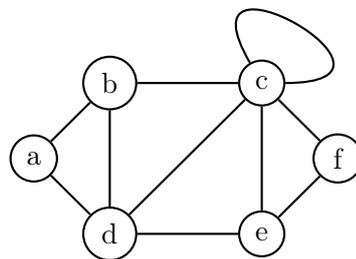


FIGURE 1 – Graphe  $G_1$

1. Quel sont les degrés des sommets  $a$  et  $c$ ?
2. Quelle est la longueur d'un plus court chemin reliant  $a$  à  $f$ ?
3. Quels sont les plus courts chemins reliant  $a$  à  $f$ ?
4. Quelle est la taille maximum d'une clique de  $G$ ? d'un stable de  $G$ ?
5. Combien de couleurs faut-il au minimum pour colorier le graphe obtenu en supprimant la boucle sur le sommet  $c$ ? Justifier votre réponse. Que se passe-t-il si on laisse la boucle?
6. Donner  $A$ , la matrice d'adjacence du graphe  $G$ , puis la représentation de  $G$  par liste d'adjacence.
7. Que représente la matrice  $A^2$ ? Quelle sera la valeur de  $A_{c,c}^2$ ?

**Exercice 2**

On rappelle que l'algorithme First-Fit consiste à colorier un par un chaque sommet d'un graphe en utilisant à chaque fois la plus petite couleur disponible (couleur non encore utilisée par un de ses voisins). Proposer deux ordres sur les sommets du graphe  $P_5$  ci-dessous de façon à ce que :

1. la coloration obtenue par First-Fit soit optimale (utilise un nombre minimum de couleurs);
2. la coloration obtenue par First-Fit ne soit pas optimale.

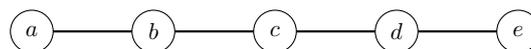


FIGURE 2 – Chaîne à 5 sommets  $P_5$

3. Pour tout graphe  $G$ , quelle relation peut-on établir entre  $\chi(G)$  son nombre chromatique et  $\Delta(G)$ , son degré maximum, grâce à l'algorithme First-Fit?

### Exercice 3

Les suites suivantes sont-elles graphiques (suites correspondant à la liste des degrés des sommets d'un graphe) ? Justifier vos réponses.

1. 4, 4, 3, 3, 2
2. 4, 4, 3, 2, 2, 1, 1

### Exercice 4

Dans un parc animalier, les allées sont connectées par des carrefours notés de C1 à C8. On souhaite parcourir toutes les allées si possible une et une seule fois. Le tableau suivant donne les allées entre les différents carrefours :

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
C1		X	X					
C2	X		X	X				
C3	X	X		X	X			
C4		X	X			X		X
C5			X			X	X	X
C6				X	X			X
C7					X			X
C8				X	X	X	X	

1. Modéliser la question en terme de graphe.
2. Est-il possible de parcourir toutes les allées une et une seule fois en revenant au point de départ ? Justifier votre réponse.
3. Sinon, est-il possible de parcourir toutes les allées une et une seule fois en mettant une entrée et une sortie séparées ? Si oui, quelles sont les possibilités pour positionner l'entrée et la sortie ? Justifier votre réponse.
4. Si vous répondez oui à l'une des deux questions précédentes, proposer un chemin en donnant l'ordre de passage aux différents carrefours.

### Exercice 5

Soit  $G = (X, A)$  le graphe orienté avec une fonction de pondération  $w : A \rightarrow \mathbb{R}$  représenté dans la Figure 3.

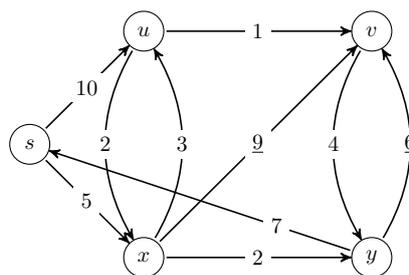


FIGURE 3 – Graphe  $G$  valué par  $w$ .

En appliquant l'algorithme de *Dijkstra*, déterminer la distance (longueur du plus court chemin) du sommet  $s$  à chacun des sommets de  $G$ .

### Exercice 6

Soit l'alphabet  $A = \{a, b\}$ .

1. Proposez un automate fini déterministe reconnaissant les mots de  $A^*$  terminés par  $ab$ .
2. Proposez un automate fini déterministe reconnaissant les mots de  $A^*$  contenant au moins deux  $a$ .