

## Feuille 1

### Exercice 1

On considère un graphe non orienté simple  $G$ . Le graphe complémentaire de  $G$ , noté  $\overline{G}$ , est le graphe tel que :

- $V(\overline{G}) = V(G)$
- $xy \in E(\overline{G}) \Leftrightarrow xy \notin E(G)$

Le graphe  $C_n$  est le cycle à  $n$  sommets,  $K_n$  le graphe complet à  $n$  sommets et  $P_n$  la chaîne à  $n$  sommets.

1. Dessiner les graphes  $C_4$ ,  $C_5$ ,  $K_4$  et  $P_4$ , ainsi que leurs graphes complémentaires. Que remarquez-vous pour  $C_5$  et  $P_4$  ?
2. On considère un graphe simple  $G$  tel que  $m(G) = 49$  et  $m(\overline{G}) = 56$ . Calculer  $n(G)$ .

### Exercice 2

1. Donner le nombre chromatique des graphes  $C_4$ ,  $C_5$ ,  $K_4$ .
2. Montrer que si  $T$  est un arbre ayant au moins 2 sommets, alors  $\chi(T) = 2$ .
3. Montrer que si un graphe a un nombre chromatique inférieur ou égal à 2, alors il ne contient pas de cycle de longueur impaire.
4. Montrer que si  $G$  ne contient pas de cycle de longueur impaire, alors  $\chi(G) \leq 2$  (*indication : utiliser un arbre couvrant*).
5. Soit  $G$  un graphe tel que  $\chi(G) = k$  ( $k \geq 2$ ). On veut montrer que quelle que soit une orientation  $G'$  de  $G$ ,  $G'$  contient un chemin élémentaire de longueur au moins  $k - 1$ . Pour cela, on fait un raisonnement par l'absurde : on suppose qu'il existe une orientation  $G'$  de  $G$  dont tous les chemins élémentaires sont de longueur au plus  $k - 2$ . Soit  $F \subseteq E(G')$  tel que  $G'' = (V(G), E(G') \setminus F)$  soit sans circuit, avec  $F$  de taille minimum.
  - (a) Pour tout  $x \in V(G)$ , soit  $l(x)$  la longueur du plus long chemin d'extrémité initiale  $x$  dans  $G''$ . Quelles sont les valeurs possibles pour  $l(x)$  ?
  - (b) Pour  $0 \leq i \leq k - 2$ , on pose  $A_i = \{x \in V(G) \mid l(x) = i\}$ . Que peut-on dire de  $\bigcup_{i=0}^{k-2} A_i$  et de  $A_i \cap A_j$  pour  $i \neq j$  ?
  - (c) Soit  $xy \in E(G'')$ . Si  $x \in A_i$  et  $y \in A_j$ , que peut-on dire de  $i$  et  $j$  ?
  - (d) Montrer que tout arc de  $G'$  ne peut avoir ses deux extrémités dans un même  $A_i$ .
  - (e) En déduire que  $G$  admet une  $k - 1$ -coloration et conclure.

### Exercice 3

Le but de cet exercice est d'appliquer le théorème obtenu dans l'exercice 2.

1. Montrer qu'un tournoi (graphe complet orienté) possède un chemin hamiltonien (chemin passant par tous les sommets une et une seule fois).
2. Soient  $G$  un graphe orienté et  $\{A_1, A_2, \dots, A_l\}$  une partition de  $V(G)$  en  $l$  sous-ensembles et soient  $p_1, p_2, \dots, p_l$  des entiers positifs.

- (a) Pour tout  $i, 1 \leq i \leq l$ , soit  $G_i = (V(G), A_i)$  le graphe partiel associé à  $A_i$ . Montrer que  $\chi(G) \leq \chi(G_1) \cdot \chi(G_2) \cdot \dots \cdot \chi(G_l)$ .
- (b) Montrer que si  $\chi(G) > p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_l$ , alors il existe  $i$  tel que  $G_i$  contienne un chemin de longueur  $p_i$ .
3. Soient  $p$  et  $q$  deux entiers positifs et  $s = (a_1, a_2, \dots, a_{pq+1})$  une suite de  $pq + 1$  entiers positifs ou nuls, tous distincts. Montrer, en utilisant le résultat de la question 2, que la suite  $s$  admet soit une sous-suite croissante de  $p+1$  termes, soit une sous-suite décroissante de  $q + 1$  termes.
- Indication : on utilisera un graphe dont les sommets représentent les entiers  $(a_i)_{1 \leq i \leq pq+1}$ .*