

# CM 9 - MANIPULATION BINAIRE

---

G. Bianchi, G. Blin, A. Bugeau, S. Gueorguieva, R. Uricaru

2015-2016

Programmation 1 - [uf-info.ue.prog1@diff.u-bordeaux.fr](mailto:uf-info.ue.prog1@diff.u-bordeaux.fr)

université  
de **BORDEAUX**

# LE BINAIRE

---

## LA REPRÉSENTATION EN BASE 2

▷ Dans un mot binaire, chaque position correspond à une puissance de deux - c'est la représentation positionnelle vue en CP sur une base 2 plutôt que 10

|       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 128   | 64    | 32    | 16    | 8     | 4     | 2     | 1     |
| $2^7$ | $2^6$ | $2^5$ | $2^4$ | $2^3$ | $2^2$ | $2^1$ | $2^0$ |
| 0     | 1     | 1     | 0     | 0     | 1     | 0     | 0     |

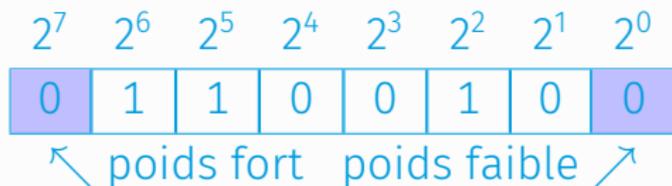
$$\begin{aligned} &= 0 * 2^7 + 1 * 2^6 + 1 * 2^5 + 0 * 2^4 + 0 * 2^3 + 1 * 2^2 + 0 * 2^1 + 0 * 2^0 \\ &= \quad \quad 64 + \quad 32 \quad \quad \quad \quad \quad + \quad 4 \\ &= 100 \end{aligned}$$

- ▷ Il faut connaître les premières puissances de deux par coeur
- ▷ Pratique pour détecter des valeurs spéciales (e.g. 1023, 4097, ...)

|       |       |          |          |          |          |       |       |
|-------|-------|----------|----------|----------|----------|-------|-------|
| 128   | 64    | 32       | 16       | 8        | 4        | 2     | 1     |
| $2^7$ | $2^6$ | $2^5$    | $2^4$    | $2^3$    | $2^2$    | $2^1$ | $2^0$ |
|       |       | 8192     | 4096     | 2048     | 1024     | 512   | 256   |
|       |       | $2^{13}$ | $2^{12}$ | $2^{11}$ | $2^{10}$ | $2^9$ | $2^8$ |

## POIDS FORT/POIDS FAIBLE

- ▷ On appelle poids fort, la position de la plus grande puissance de deux
- ▷ On appelle poids faible, la position de la plus petite puissance de deux



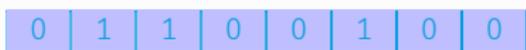
▷ Il en est de même pour les types sur plusieurs octets



octet de poids fort



octet de poids faible



- ▷ ⚠ Le codage d'un entier signé est dépendant de l'implémentation !
- ▷ Dans la représentation par magnitude signée, le bit de poids fort encode le signe de l'entier (0 = positif, 1 = négatif)
  - ▷  $+25_{10} = 00011001_2$  et  $-25_{10} = 10011001_2$
- ▷ Inconvénients:
  - ▷ Le nombre 0 possède deux représentations que sont  $+0_{10} = 0000000_2$  et  $-0_{10} = 1000000_2$
  - ▷ La simple addition ne fonctionne pas
    - ▷  $10000100 + 00000011 = 10000111$  ( $-4 + 3 = -7$ )
  - ▷ Du coup, très peu utilisée (mais utilisable)

# LES ENTIERS SIGNÉS

▷ ⚠ Le codage d'un entier signé est dépendant de l'implémentation !

▷ Dans la représentation à complément à deux, (1) on prend la valeur absolue, (2) on inverse les bits (complément à 1) et (3) on ajoute 1 au résultat en ignorant les dépassements de capacités

▷ Le nombre  $-6$  codé sur un octet s'obtient donc ainsi

$$\triangleright 6 = 00000110 \quad \Rightarrow \quad \sim(6) = 11111001$$

$$\triangleright \sim(6) + 1 = 11111010 \quad \Rightarrow \quad 250$$

```
int main(void){
    char c = -6;
    printf("%u\n", (unsigned char) c);
    return EXIT_SUCCESS;
}
```

\$> ./a.out  
250

- ▷ ⚠ Le codage d'un entier signé est dépendant de l'implémentation !
- ▷ Dans la représentation à complément à deux, (1) on prend la valeur absolue, (2) on inverse les bits (complément à 1) et (3) on ajoute 1 au résultat en ignorant les dépassements de capacités
- ▷ L'addition fonctionne correctement
  - ▷  $11111100 + 00000011 = 11111111$  ( $-4 + 3 = -1$ )
  - ▷ Il y a une écriture unique de  $0_{10} = 00000000_2$
  - ▷  $-(-x) = x$

# CONVERSION, PROMOTION ET COERCITION

▷ Retour sur l'exemple précédent

```
int main(void){
    char c = -6;
    printf("%u\n", (unsigned char) c);
    return EXIT_SUCCESS;
}
```

▷ La chaîne de format spécifie qu'elle attend un `unsigned int` et l'argument passé est de type `char` transformé en `unsigned char`

▷ Que s'est-il passé pour que cela fonctionne ?

▷ Une conversion entre deux types compatibles (`char` et `unsigned char`)

▷ Suivie d'une transformation : la promotion de la valeur

# CONVERSION, PROMOTION ET COERCITION

▷ Rappel : type = (taille, interpretation)

▷ Un type de départ  $t_d = (\text{taille}_d, \text{interpretation}_d)$  est compatible avec un type cible  $t_c = (\text{taille}_c, \text{interpretation}_c)$  si  $\text{taille}_c \geq \text{taille}_d$

▷ Si  $\text{taille}_c == \text{taille}_d$ , les bits de l'expression de type de départ sont copiés tels quels dans l'expression de type cible. C'est donc l'interprétation qui change mais pas les données.

▷ Si  $\text{taille}_c > \text{taille}_d$ , les bits de l'expression de type de départ sont copiés tels quels dans les octets de poids faibles de l'expression de type cible.

▷ Que se passe-t-il pour les bits non "affectés" par cette copie ?

# CONVERSION, PROMOTION ET COERCITION

- ▷ Rappel :  $\text{type} = (\text{taille}, \text{interpretation})$
- ▷ Un type de départ  $t_d = (\text{taille}_d, \text{interpretation}_d)$  est compatible avec un type cible  $t_c = (\text{taille}_c, \text{interpretation}_c)$  si  $\text{taille}_c \geq \text{taille}_d$ 
  - ▷ Si  $\text{taille}_c == \text{taille}_d$ , les bits de l'expression de type de départ sont copiés tels quels dans l'expression de type cible. C'est donc l'interprétation qui change mais pas les données.
  - ▷ Si  $\text{taille}_c > \text{taille}_d$ , les bits de l'expression de type de départ sont copiés tels quels dans les octets de poids faibles de l'expression de type cible.
  - ▷ Que se passe-t-il pour les bits non "affectés" par cette copie ? Cela dépend du type cible ...

- ▷ C'est le mécanisme de promotion qui est en jeu
- ▷ Si  $\text{taille}_c > \text{taille}_d$  et le type cible  $\text{type}_c$  est non signé
  - ▷ Des 0 sont placés dans les bits non "affectés" par la copie
- ▷ Si  $\text{taille}_c > \text{taille}_d$  et le type cible  $\text{type}_c$  est signé
  - ▷ C'est le bit de poids fort de l'expression de type  $\text{type}_d$  qui est placé dans l'ensemble des bits non "affectés" par la copie
    - ▷ Cela permet de "conserver" le signe et la valeur de départ si le type  $\text{type}_c$  est signé
    - ▷ Cela peut changer le signe et la valeur de départ si le type  $\text{type}_c$  est non-signé

▷ C'est le mécanisme de promotion qui est en jeu

```
int main(void){
    char c = -6; // 11111010
    unsigned char d = 250; // 11111010
    printf("%u\n", (unsigned char) c); //0...0 11111010 (250)
    printf("%u\n", c); //1...1 11111010 (4 294 967 290)
    printf("%d\n", c); //1...1 11111010 (-6)
    printf("%u\n", (char) d); //1...1 11111010 (4 294 967 290)
    printf("%u\n", d); //0...0 11111010 (250)
    printf("%d\n", d); //0...0 11111010 (250)
    return EXIT_SUCCESS;
}
```

# CONVERSION, PROMOTION ET COERCITION

- ▷ Il est possible de forcer une conversion d'un type  $\text{type}_d$  vers un type  $\text{type}_c$  non compatible (i.e.,  $\text{taille}_c < \text{taille}_d$ )
- ▷ C'est alors le mécanisme de **coercition** qui est mis en oeuvre
- ▷ Seuls les octets de poids faibles jusqu'à obtention de  $\text{taille}_c$  octets sont recopiés ; les autres sont ignorés
- ▷ ⚠ Il faut être sûr de ce que l'on fait

```
int main(void){
    int c = -6; // 1...1 11111010
    unsigned int d = 270; // 0...01 00001110
    printf("%d\n", (char) c); //11111010 (-6)
    printf("%u\n", (unsigned char) c); //11111010 (250)
    printf("%u\n", (char) d); //00001110 (14)
    printf("%u\n", (unsigned char) d); //00001110 (14)
    return EXIT_SUCCESS;
}
```

# OPÉRATEURS BIT À BIT

---

# OPÉRATEURS BIT À BIT

- ▷ Les opérateurs bit à bit ne fonctionnent que sur les entiers
- ▷ ⚠ Ces opérateurs sont à différencier des opérateurs logiques `&&` et `||`

|                              |   |   |   |   |
|------------------------------|---|---|---|---|
| Bit 1                        | 0 | 0 | 1 | 1 |
| Bit 2                        | 0 | 1 | 0 | 1 |
| <code>&amp;</code> (et)      | 0 | 0 | 0 | 1 |
| <code> </code> (ou)          | 0 | 1 | 1 | 1 |
| <code>^</code> (ou exclusif) | 0 | 1 | 1 | 0 |

a 

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

b 

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

a&b 

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

# OPÉRATEURS BIT À BIT

- ▷ Les opérateurs bit à bit ne fonctionnent que sur les entiers
- ▷ ⚠ Ces opérateurs sont à différencier des opérateurs logiques `&&` et `||`

|                              |   |   |   |   |
|------------------------------|---|---|---|---|
| Bit 1                        | 0 | 0 | 1 | 1 |
| Bit 2                        | 0 | 1 | 0 | 1 |
| <code>&amp;</code> (et)      | 0 | 0 | 0 | 1 |
| <code> </code> (ou)          | 0 | 1 | 1 | 1 |
| <code>^</code> (ou exclusif) | 0 | 1 | 1 | 0 |

a 

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

b 

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

a|b 

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

# OPÉRATEURS BIT À BIT

- ▷ Les opérateurs bit à bit ne fonctionnent que sur les entiers
- ▷ ⚠ Ces opérateurs sont à différencier des opérateurs logiques `&&` et `||`

|                              |   |   |   |   |
|------------------------------|---|---|---|---|
| Bit 1                        | 0 | 0 | 1 | 1 |
| Bit 2                        | 0 | 1 | 0 | 1 |
| <code>&amp;</code> (et)      | 0 | 0 | 0 | 1 |
| <code> </code> (ou)          | 0 | 1 | 1 | 1 |
| <code>^</code> (ou exclusif) | 0 | 1 | 1 | 0 |

a 

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

b 

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

$a^b$ 

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

# OPÉRATEURS BIT À BIT

- ▷ Les opérateurs bit à bit ne fonctionnent que sur les entiers
- ▷ ⚠ Ces opérateurs sont à différencier des opérateurs logiques `&&` et `||`
- ▷ L'opérateur `~` permet d'inverser les bits (complément à un)

a 

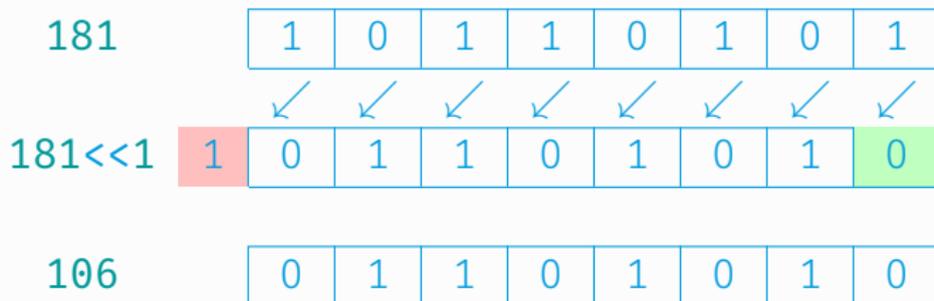
|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

`~a`

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

# OPÉRATEURS DE DÉCALAGE À GAUCHE

- ▷ En langage C, l'opérateur `<<` permet de décaler vers la gauche les bits d'un entier
- ▷ `x<<y` décale les bits de x de y bits vers la gauche (x n'est pas modifié)
- ▷ Les bits de poids faibles décalés sont remplacés par des 0
- ▷ Les bits de poids forts décalés sont perdus



# OPÉRATEURS DE DÉCALAGE À GAUCHE

- ▷ Le décalage à gauche ne conduit pas forcément à un résultat inapproprié
- ▷ En effet, le décalage de **181** stocké dans un **char** provoque la perte d'un bit significatif mais ce n'est pas le cas si ce dernier est stocké dans un **int**

```
int main(void){
    unsigned char c = 181;
    /*  10110101<<1
       = 01101010 */
    c=c<<1
    int i=181;
    /*  000...010110101<<1
       = 000...101101010 */
    i=i<<1;
    printf("%d %d\n",c,i);
    return EXIT_SUCCESS;
}
```

```
$> ./a.out
106 362
```

▷  $362 = 106 + 256 = 2 * 181$

# OPÉRATEURS DE DÉCALAGE À DROITE

- ▷ En langage C, l'opérateur `>>` permet de décaler vers la droite les bits d'un entier
- ▷ `x >> y` décale les bits de `x` de `y` bits vers la droite (`x` n'est pas modifié)
- ▷ Les bits de poids forts décalés sont remplacés par
  - ▷ des `0` si le type est non signé
  - ▷  des `0` ou des `1` suivant l'implémentation si le type est signé
- ▷  Il ne faut donc jamais effectuer de décalage à droite d'entiers signés sans une très bonne raison
- ▷ Les bits de poids faibles sont perdus

## DÉCALAGE CIRCULAIRE À GAUCHE

- ▷ Le décalage circulaire consiste à ré-injecter les bits sortant en tant que bits entrant
- ▷ Pour décaler  $x$  – de taille  $SIZE$  – de  $n$  bits vers la gauche
  - ▷ On copie  $x$  dans une variable  $tmp$
  - ▷ On décale  $tmp$  de  $SIZE-n$  bits vers la droite
  - ▷ On décale  $x$  de  $n$  bits vers la gauche
  - ▷ On effectue un "OU bit à bit" ( $|$ ) entre les résultats des décalages

```
void shiftLeft(unsigned char * c, unsigned int n){  
    n=n%CHAR_BIT;  
    unsigned char tmp= (*c) >> (CHAR_BIT-n);  
    *c=((*c)<<n)|tmp;  
}
```

```
$> ./a.out  
shiftLeft(x,2)  
00101111  
10111100
```

# DÉCALAGE CIRCULAIRE À DROITE

- ▷ Le décalage circulaire consiste à ré-injecter les bits sortant en tant que bits entrant
- ▷ Pour décaler  $x$  – de taille  $SIZE$  – de  $n$  bits vers la droite
  - ▷ On décale circulairement  $x$  de  $SIZE-n$  bits vers la gauche

```
void shiftRight(unsigned char * c, unsigned int n){  
    shiftLeft(c,CHAR_BIT-(n%CHAR_BIT));  
}  
$> ./a.out  
shiftRight(x,2)  
10111100  
00101111
```

- ▷ Il est possible de générer un mot binaire avec un **1** uniquement au n<sup>ème</sup> bit avec les autres bits à **0**
  - ▷  $1 \ll n$  – qui correspond à  $2^n$
  - ▷ bit 0: **00000001** =  $1 \ll 0$  ( $2^0$ )
  - ▷ bit 1: **00000010** =  $1 \ll 1$  ( $2^1$ )
  - ▷ ...
  - ▷ bit 7: **10000000** =  $1 \ll 7$  ( $2^7$ )

## TESTER LE NÈME BIT

- ▷ Pour récupérer la valeur du nème bit d'une valeur à tester, il suffit d'effectuer un "ET bit à bit" (&) entre la valeur à tester et le masque  $1 \ll n$
- ▷ Cela permet, par exemple, d'afficher en binaire une valeur

```
void printBinary(char a){
    int i;
    for(i=CHAR_BIT-1;i>=0;i=i-1){
        if((a&(1<<i))){
            printf("1");
        }else{
            printf("0");
        }
    }
    printf("\n");
}

int main(void){
    printBinary(79);
    return EXIT_SUCCESS;
}

$>./a.out
01001111
```

## METTRE LE NÈME BIT À 1

▷ Pour fixer à 1 le nème bit d'une valeur, il suffit d'effectuer un "OU bit à bit" (|) entre la valeur à tester et le masque  $1 \ll n$

```
void setBit(char *c, int bit){  
    *c=((*c)|(1<<bit));  
}
```

```
int main(void){  
    char c=79;  
    printf(" ");  
    printBinary(c);  
    printf("| ");  
    printBinary(1<<5);  
    setBit(&c,5);  
    printf("= ");  
    printBinary(c);  
    return EXIT_SUCCESS;  
}
```

```
$>./a.out  
    01001111  
| 00100000  
= 01101111
```

## METTRE LE NÈME BIT À 0

▷ Pour fixer à 0 le nème bit d'une valeur, il suffit d'effectuer un "ET bit à bit" (&) entre la valeur à tester et le masque  $\sim(1 \ll n)$

```
void unsetBit(char *c, int bit){  
    *c=((*c)&~(1<<bit));  
}
```

```
int main(void){  
    char c=79;  
    printf(" ");  
    printBinary(c);  
    printf("& ");  
    printBinary(~(1<<2));  
    setBit(&c,2);  
    printf("= ");  
    printBinary(c);  
    return EXIT_SUCCESS;  
}
```

```
$> ./a.out  
    01001111  
& 11111011  
= 01001011
```

## AFFECTER LE NÈME BIT

- ▷ Il existe deux méthodes pour affecter le nème bit
  - ▷ Méthode 1: Mettre à 0 ou à 1 en fonction de la valeur
  - ▷ Méthode 2: Mettre à 0 puis effectuer un "OU bit à bit" (|) avec la valeur décalée de n bits vers la gauche

```
void setBit1(char *c, int bit, int value){
    if(value){
        setBit(c,bit);
    }else{
        unsetBit(c,bit);
    }
}
```

```
void setBit2(char *c, int bit, int value){
    unsetBit(c,bit);
    *c=(*c | ((value && value)<<bit));
}
```

# UTILISATION DES BITS

---

# STOCKAGE D'INFORMATIONS

▷ Il est par exemple possible de stocker les valeurs de propriétés binaires – appelées "drapeaux" (flags en anglais) – en désignant des constantes servant de masques pour chaque bit

```
#define INITIAL 1
#define FINAL 2
#define ACCESSIBLE 4
#define COACCESSIBLE 8

void setFlag(char * c, int flag){
    *c=(*c)|flag;
}

void unsetFlag(char * c, int flag){
    *c=(*c)&(~flag);
}

bool isFlagSet(char c, int flag){
    return c&flag;
}

int main(void){
    char c='\0';
    setFlag(&c,FINAL);
    printBinary(c);
    setFlag(&c,(INITIAL|ACCESSIBLE));
    printBinary(c);
    if(isFlagSet(c,FINAL)){
        unsetFlag(&c,INITIAL);
    }
    printBinary(c);
    return EXIT_SUCCESS;
}

$>./a.out
00000010
00000111
00000110
```

# STOCKAGE D'INFORMATIONS

▷ Il est également possible d'utiliser un entier pour stocker plusieurs informations

```
/*
 * A color representation with 2 bits for alpha and 10 bits for each
 * of red, green and blue: aarr rrrr rrrr gggg gggg ggbb bbbb bbbb
 */
typedef unsigned int color;

void setRed(color * c, unsigned int value){
    /* removing extra bits if any */
    value=value&1023; //0...011 1111 1111
    *c=((*c)&(~(1023u<<20u))); //aarr rrrr rrrr gggg gggg ggbb bbbb bbbb
                                //1100 0000 0000 1111 1111 1111 1111 1111
    *c=((*c)|(value<<20u));   //aa00 0000 0000 gggg gggg ggbb bbbb bbbb
                                //00vv vvvv vvvv 0000 0000 0000 0000 0000
}
...
```

# STOCKAGE D'INFORMATIONS

▷ Il est également possible d'utiliser un entier pour stocker plusieurs informations

```
/*  
 * A color representation with 2 bits for alpha and 10 bits for each  
 * of red, green and blue: aarr rrrr rrrr gggg gggg ggbb bbbb bbbb  
 */  
typedef unsigned int color;  
  
void setRed(color * c, unsigned int value){  
    ...  
}  
  
unsigned int getRed(color c){  
    return ((1023u<<20u)&c)>>20;  
}           //0011 1111 1111 0000 0000 0000 0000 0000  
           //aarr rrrr rrrr gggg gggg ggbb bbbb bbbb  
           //00rr rrrr rrrr 0000 0000 0000 0000 0000  
           //0000 0000 0000 0000 0000 00rr rrrr rrrr
```

- ▷ Les champs de bits correspondent à un type particulier de champ d'une structure où ce dernier est suivi du nombre de bits qu'il doit avoir

```
struct color{
    unsigned int alpha : 2;
    unsigned int red : 10;
    unsigned int green : 10;
    unsigned int blue : 10;
};
```

- ▷ Plus pratique que les masques
- ▷ ⚠ Mais non portables

## CONTRAINTES SUR LES CHAMPS DE BITS

- ▷ Les seuls types acceptés pour les champs de bits sont `int`, `unsigned int` et `signed int`
- ▷ L'ordre des champs est respecté
- ▷ L'ordre des bits d'un champ n'est pas normé ⚠
- ▷ Un champ de bits déclaré comme étant de type `int` peut en fait se comporter comme un `signed int` ou un `unsigned int` suivant l'implémentation ⚠
  - ▷ Toujours utiliser des champs de bits de type `unsigned int`
- ▷ La taille d'un champ de bits ne doit pas excéder celle d'un entier
- ▷ Un champ de bits n'a pas d'adresse ; seule sa valeur est accessible (comme tout autre champ de la structure)

## CHAMPS DE BITS

▷ Les champs de bits correspondent à un type particulier de champs d'une structure où ce dernier est suivi du nombre de bits qu'il doit avoir

```
struct color{
    unsigned int alpha : 2,
    red : 10, green : 10, blue : 10;
};

void setRed(struct color * c, int value){
    (*c).red=value;
}

int getRed(const struct color * c){
    return (*c).red;
}

int main(void){
    struct color c={0,0,0,0};
    setRed(&c,255);
    printf("%d",c.red);
    setRed(&c,1025);
    printf("%d",c.red);
    return EXIT_SUCCESS;
}

$>./a.out
255
1
```

DOGGY BAG

---

- ▷ Il est risqué de s'appuyer sur une norme de codage des entiers pour faire des calculs ou de l'analyse car elle dépend de l'implémentation
- ▷ La conversion de type fait appel à deux mécanismes possibles: la promotion et la coercition
- ▷ Les opérateurs bit à bit permettent la gestion fine d'une valeur au niveau du bit
- ▷ Cette gestion fine permet de stocker des propriétés ou informations avec un codage binaire personnel et ceci en optimisant l'espace mémoire

QUESTIONS?