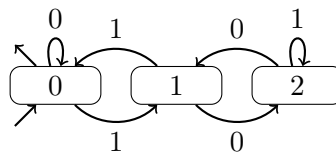


Feuille 7 - Grammaires algébriques

Informatique Théorique 2 - Unité J1INPW11
Licence 3 - Université de Bordeaux

Exercice 1

On reprend l'automate de la division par 3 étudié dans la feuille de TD 3 :



Donner une grammaire algébrique qui définit le même langage.

Exercice 2

Construisez des grammaires algébriques pour les langages suivants (et justifiez la validité de la grammaire) :

1. $\{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$
2. $\{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a > |w|_b\}$
3. $\{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \neq |w|_b\}$

Exercice 3

Soit $G = (\{a, b\}, \{S\}, R, S)$ avec

$$R : \begin{cases} S \rightarrow aS \\ S \rightarrow aSbS \\ S \rightarrow \varepsilon \end{cases}$$

Montrez que $L_G = \{w \in \{a, b\}^* \mid |v|_a \geq |v|_b \text{ pour chaque préfixe } v \text{ de } w\}$.

Exercice 4

Etant donnée une grammaire algébrique $G = (\Sigma, V, R, S)$, construisez une grammaire algébrique qui décrit le langage miroir $(L_G)^{\text{rev}} = \{a_n \dots a_0 \mid a_0 \dots a_n \in L_G\}$.

Exercice 5

Montrez que les langages suivants ne sont pas des langages algébriques :

1. $\{a^n b^n a^n b^n \mid n \geq 0\}$
2. $\{a^n \# a^{2n} \# a^{3n} \mid n \geq 0\}$
3. $\{v \# w \mid v, w \in \{a, b\}^*, v \text{ est facteur de } w\}$
4. $\{(a^n b)^n \mid n \geq 0\}$

Exercice 6

Montrer que les langages algébriques ne sont pas clos par intersection (on pourra s'inspirer de l'exercice précédent).

Exercice 7

Soit $A = \{a, b\}$. On considère le langage $L = \{ww \mid w \in A^*\}$.

1. Montrer que L n'est pas algébrique.
2. Montrer que les langages $L_a = \{uav \in A^* \mid |u| = |v|\}$ et $L_b = \{ubv \in A^* \mid |u| = |v|\}$ sont algébriques.
3. Montrer que $A^* - L = L_a + L_b + L_a L_b + L_b L_a$.
4. En déduire que $A^* - L$ est algébrique et donner une grammaire algébrique de ce langage.

Exercice 8

Trouvez trois langages algébriques K, L, M tels que $K \cap L \cap M = \{(a^n b)^n \mid n \geq 0\}$.

Exercices complémentaires

Exercice 9

Construisez des grammaires algébriques pour les langages suivants (et justifiez la validité de la grammaire) :

1. $\{a^p b^q c^r \mid p = q \text{ ou } q = r\}$
2. $\{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$
3. $\{v \# w \mid v^{\text{rev}} \text{ est facteur de } w\}$

Exercice 10

Soit $L, L' \subseteq A^*$ des langages algébriques et $\#$ une lettre n' appartenant pas à A . Les langages suivants sont-ils toujours algébriques ?

- $\text{Pref}(L) := \{u \in A^* \mid \exists v \in A^*, uv \in L\}$
- $P(L) := \{u \# v \mid uv \in L\}$
- $T(L, L') := \{u w v \mid uv \in L, w \in L'\}$
- $U(L) := \{u \# v \mid u \in A^*, v \in A^*, |u| = |v| \text{ ou } uv \in L\}$
- $V(L) := \{u \# v \mid u \in A^*, v \in A^*, |u| = |v| \text{ et } uv \in L\}$