

Feuille 2 - Automates finis

Informatique Théorique 2 - Unité J1INPW11
Licence 3 - Université de Bordeaux

Exercice 1: De l'automate à la définition mathématique

Donnez la définition mathématique des automates des figures 1 et 2.

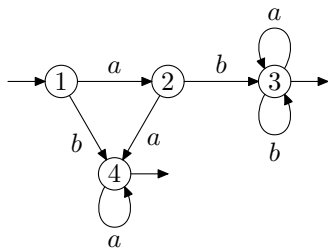


FIGURE 1 – Automate \mathcal{A}_1

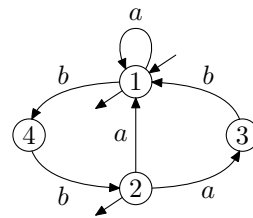


FIGURE 2 – Automate \mathcal{A}_2

Exercice 2: De la définition mathématique à l'automate

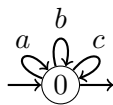
Pour chacune des deux définitions mathématiques suivantes, dessiner l'automate qui les représente.

$$\mathcal{A}_3 = \left(Q = \{1, 2, 3\}, \quad q_i = 1, \quad F = \{2, 3\}, \quad \delta : \begin{cases} (1, a) \rightarrow 2 \\ (1, b) \rightarrow 2 \\ (2, c) \rightarrow 2 \\ (2, a) \rightarrow 3 \\ (3, b) \rightarrow 1 \end{cases} \right)$$

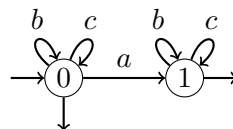
$$\mathcal{A}_4 = \left(Q = \{1, 2, 3\}, \quad q_i = 2, \quad F = \{2\}, \quad \delta : \begin{cases} (1, a) \rightarrow 1 \\ (1, b) \rightarrow 2 \\ (3, a) \rightarrow 3 \\ (2, b) \rightarrow 1 \end{cases} \right)$$

Exercice 3

- Pour chacun des automates des deux exercices précédents, et pour les deux automates ci-dessous répondez aux questions suivantes :



Automate \mathcal{A}_5



Automate \mathcal{A}_6

- (a) Est-il complet ? Si oui, justifiez-le, sinon, complétez-le.
 - (b) Est-il déterministe ? Justifiez votre réponse.
 - (c) Quels sont les plus courts mots acceptés ? Donner un calcul acceptant pour chacun de ces mots.
2. Dans les exercices précédents, trouvez un automate \mathcal{A} et un mot w , tels qu'il existe deux chemins pour w dans \mathcal{A} , l'un finissant dans un état final et l'autre dans un état non final.
 3. Pour chacun des automates \mathcal{A}_3 , \mathcal{A}_4 , \mathcal{A}_5 et \mathcal{A}_6 , dessiner un automate qui reconnaît le langage complémentaire.

Exercice 4: Automate déterministe ou non déterministe ?

Les automates suivants sont-ils déterministes ou non déterministes ? Pourquoi ?

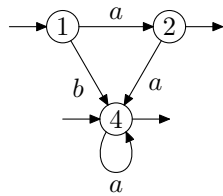


FIGURE 3 – Automate \mathcal{A}_7

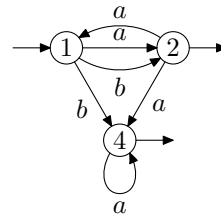


FIGURE 4 – Automate \mathcal{A}_8

Exercice 5

Soit A un alphabet. Les propriétés suivantes sont-elles correctes pour tout langage $L \subset A^*$? Justifier les réponses.

1. $\{w^i \mid i \geq 0 \text{ et } w \in L\} \subset L^*$
2. $\{w^i \mid i \geq 0 \text{ et } w \in L\} = L^*$
3. $\{w^i \mid i \geq 0 \text{ et } w \in L^*\} = L^*$

Exercice 6: Construction d'Automates (1)

On fixe $A = \{a, b\}$ comme alphabet. Donnez un automate et une expression régulière pour chacun des langages suivants :

1. L_1 : Les mots commençant par 'a' dont le préfixe de longueur deux est répété plus loin dans le mot (attention : ces deux occurrences peuvent se chevaucher). Par exemple **abbaa** $\in L_1$, **aaa** $\in L_1$, mais **abbba** $\notin L_1$.
2. L_2 : Les mots pour lesquels les nombres de 'a' et de 'b' ont la même parité (c'est-à-dire, ils sont soit tous les deux pairs, soit tous les deux impairs).
3. L_3 : Les mots pour lesquels il y a au moins un 'b' et le nombre de 'a' n'est pas un multiple de 3.

Exercice 7: Construction d'Automates (2) ♠

On fixe $A = \{a, b, c\}$ comme alphabet. Donnez un automate et une expression régulière pour le langage des mots pour lesquels entre deux 'c' consécutifs :

- soit il n'y a aucun 'b' et le nombre de 'a' est pair.
- soit il y a au moins un 'b' et le nombre de 'a' n'est pas un multiple de 3.

Exercice 8: Conjugués ♠

Soit A un alphabet. Deux mots w_1, w_2 sont *conjugués* s'il existe deux mots $u, v \in A^*$ tels que $w_1 = u \cdot v$ et $w_2 = v \cdot u$. Par exemple ab, ba sont conjugués avec $u = a$ et $v = b$.

Si w est un mot on note $C(w)$ le langage des conjugués de w . De même si L est un langage, on note $C(L) = \bigcup_{w \in L} C(w)$, l'ensemble des conjugués de mots de L .

1. Donner $C(abab)$, $C(a^*b^*)$ et $C(\{a^n b^n \mid n \geq 0\})$.
2. Montrer que si L est reconnu par un automate on peut construire un automate qui reconnaît $C(L)$.

Exercice 9: Mélange de langages ♠

Pour toute paire de mots (u, v) , on appelle *mélange* de u et v le langage $u \sqcup v$ défini comme suit :

$$u \sqcup v = \{u_1 v_1 u_2 v_2 \cdots u_n v_n \mid n \in \mathbb{N}, u = u_1 \cdots u_n \text{ et } v = v_1 \cdots v_n\}$$

où les u_i et les v_i sont des mots éventuellement vides. Par exemple,

$$ab \sqcup cd = \{abcd, acbd, cabd, acdb, cadb, cdab\}.$$

Pour deux langages L, K , leur mélange est le langage $L \sqcup K$ suivant :

$$L \sqcup K = \{w \mid w = u \sqcup v \text{ avec } u \in L \text{ et } v \in K\}.$$

1. Donner une expression rationnelle du langage $(ab)^* \sqcup \{c\}$.
2. Montrer que si L, K sont reconnus par deux automates, alors on peut aussi construire un automate qui reconnaît le langage $L \sqcup K$.