

# Feuille 2 - Automates finis

Informatique Théorique 2 - Unité J1INPW11  
Licence 3 - Université de Bordeaux

## Exercice 1: De l'automate à la définition mathématique

Donnez la définition mathématique des automates des figures 1 et 2.

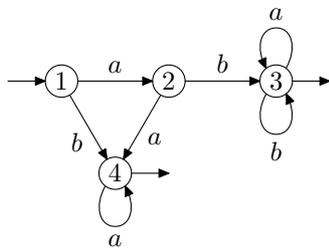


FIGURE 1 – Automate  $\mathcal{A}_1$

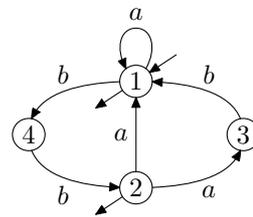


FIGURE 2 – Automate  $\mathcal{A}_2$

## Exercice 2: De la définition mathématique à l'automate

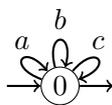
Pour chacune des deux définitions mathématiques suivantes, dessiner l'automate qui les représente.

$$\mathcal{A}_3 = \left( Q = \{1, 2, 3\}, \quad q_i = 1, \quad F = \{2, 3\}, \quad \delta : \begin{cases} (1, a) \rightarrow 2 \\ (1, b) \rightarrow 2 \\ (2, c) \rightarrow 2 \\ (2, a) \rightarrow 3 \\ (3, b) \rightarrow 1 \end{cases} \right)$$

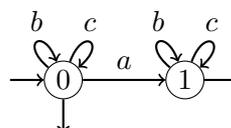
$$\mathcal{A}_4 = \left( Q = \{1, 2, 3\}, \quad q_i = 2, \quad F = \{2\}, \quad \delta : \begin{cases} (1, a) \rightarrow 1 \\ (1, b) \rightarrow 2 \\ (3, a) \rightarrow 3 \\ (2, b) \rightarrow 1 \end{cases} \right)$$

## Exercice 3

- Pour chacun des automates des deux exercices précédents, et pour les deux automates ci-dessous répondez aux questions suivantes :



Automate  $\mathcal{A}_5$



Automate  $\mathcal{A}_6$

- (a) Est-il complet ? Si oui, justifiez-le, sinon, complétez-le.
  - (b) Est-il déterministe ? Justifiez votre réponse.
  - (c) Quels sont les plus courts mots acceptés ? Donner un calcul acceptant pour chacun de ces mots.
2. Dans les exercices précédents, trouvez un automate  $\mathcal{A}$  et un mot  $w$ , tels qu'il existe deux chemins pour  $w$  dans  $\mathcal{A}$ , l'un finissant dans un état final et l'autre dans un état non final.
  3. Pour chacun des automates  $\mathcal{A}_3$ ,  $\mathcal{A}_4$ ,  $\mathcal{A}_5$  et  $\mathcal{A}_6$ , dessiner un automate qui reconnaît le langage complémentaire.

#### Exercice 4: Automate déterministe ou non déterministe ?

Les automates suivants sont-ils déterministes ou non déterministes ? Pourquoi ?

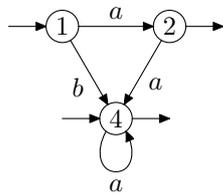


FIGURE 3 – Automate  $\mathcal{A}_7$

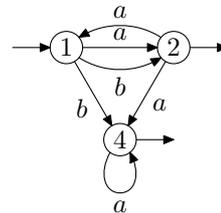


FIGURE 4 – Automate  $\mathcal{A}_8$

#### Exercice 5

Soit  $A$  un alphabet. Les propriétés suivantes sont-elles correctes pour tout langage  $L \subset A^*$  ? Justifier les réponses.

1.  $\{w^i \mid i \geq 0 \text{ et } w \in L\} \subset L^*$
2.  $\{w^i \mid i \geq 0 \text{ et } w \in L\} = L^*$
3.  $\{w^i \mid i \geq 0 \text{ et } w \in L^*\} = L^*$

#### Exercice 6: Construction d'Automates (1)

On fixe  $A = \{a, b\}$  comme alphabet. Donnez un automate et une expression régulière pour chacun des langages suivants :

1.  $L_1$  : Les mots commençant par 'a' dont le préfixe de longueur deux est répété plus loin dans le mot (attention : ces deux occurrences peuvent se chevaucher). Par exemple **abbaa**  $\in L_1$  , **aaa**  $\in L_1$ , mais **abbba**  $\notin L_1$ .
2.  $L_2$  : Les mots pour lesquels les nombres de 'a' et de 'b' ont la même parité (c'est-à-dire, ils sont soit tous les deux pairs, soit tous les deux impairs).
3.  $L_3$  : Les mots pour lesquels il y a au moins un 'b' et le nombre de 'a' n'est pas un multiple de 3.

**Exercice 7: Construction d'Automates (2) ♠**

On fixe  $A = \{a, b, c\}$  comme alphabet. Donnez un automate et une expression régulière pour le langage des mots pour lesquels entre deux 'c' consécutifs :

- soit il n'y a aucun 'b' et le nombre de 'a' est pair.
- soit il y a au moins un 'b' et le nombre de 'a' n'est pas un multiple de 3.

**Exercice 8: Conjugués ♠**

Soit  $A$  un alphabet. Deux mots  $w_1, w_2$  sont *conjugués* s'il existe deux mots  $u, v \in A^*$  tels que  $w_1 = u \cdot v$  et  $w_2 = v \cdot u$ . Par exemple  $ab, ba$  sont conjugués avec  $u = a$  et  $v = b$ .

Si  $w$  est un mot on note  $C(w)$  le langage des conjugués de  $w$ . De même si  $L$  est un langage, on note  $C(L) = \bigcup_{w \in L} C(w)$ , l'ensemble des conjugués de mots de  $L$ .

1. Donner  $C(abab)$ ,  $C(a^*b^*)$  et  $C(\{a^n b^n \mid n \geq 0\})$ .
2. Montrer que si  $L$  est reconnu par un automate on peut construire un automate qui reconnaît  $C(L)$ .

**Exercice 9: Mélange de langages ♠**

Pour toute paire de mots  $(u, v)$ , on appelle *mélange* de  $u$  et  $v$  le langage  $u \sqcup v$  défini comme suit :

$$u \sqcup v = \{u_1 v_1 u_2 v_2 \cdots u_n v_n \mid n \in \mathbb{N}, u = u_1 \cdots u_n \text{ et } v = v_1 \cdots v_n\}$$

où les  $u_i$  et les  $v_i$  sont des mots éventuellement vides. Par exemple,

$$ab \sqcup cd = \{abcd, acbd, cabd, acdb, cadb, cdab\}.$$

Pour deux langages  $L, K$ , leur mélange est le langage  $L \sqcup K$  suivant :

$$L \sqcup K = \{w \mid w = u \sqcup v \text{ avec } u \in L \text{ et } v \in K\}.$$

1. Donner une expression rationnelle du langage  $(ab)^* \sqcup \{c\}$ .
2. Montrer que si  $L, K$  sont reconnus par deux automates, alors on peut aussi construire un automate qui reconnaît le langage  $L \sqcup K$ .