

ARCHITECTURE DES ORDINATEURS

TD : 05

LOGIQUE COMBINATOIRE

Exercice 1 : Fonctions booléennes de deux variables

Voici toutes les fonctions booléennes de deux variables x et y . Donnez pour chacune une interprétation à l'aide des variables x , y , de TRUE et FALSE, ainsi que des opérateurs NOT ($\bar{}$), AND (\cdot), OR ($+$), XOR (\oplus), NOR, NAND, IMPLY (\Rightarrow) et EQUIV (\Leftrightarrow).

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Exercice 2 : Étude de fonctions booléennes (1)

Comparez les fonctions booléennes suivantes (en calculant leurs tables de vérité) :

$$f_1 = \bar{a} \cdot b \cdot c$$

$$f_2 = a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b \cdot \bar{c}$$

$$f_3 = \overline{a + b + c}$$

$$f_4 = \overline{\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot a \cdot b \cdot c}$$

Utilisez les lois de De Morgan pour montrer ce résultat.

Exercice 3 : Étude de fonctions booléennes (2)

On considère la fonction définie par la table de vérité suivante :

x	y	z	f_1
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Question 1

Exprimez cette fonction de manière naïve sous forme d'expression booléenne en utilisant l'ensemble d'opérateurs suivants : $\mathcal{C}_1 = \{and, or, not\}$, en observant simplement les valeurs 1 du tableau ci-dessus.

Question 2

Exprimez $f_2 = \overline{f_1}$, c'est-à-dire en observant maintenant les valeurs 0 du tableau ci-dessus. On obtient ainsi une autre expression de f_1 , en utilisant $\overline{f_2}$.

Exercice 4 : XOR

Question 1

Quelle relation y a-t-il entre $\bar{a} \oplus b$ et $a \oplus \bar{b}$?

Question 2

Montrez l'associativité de l'opérateur \oplus .

Exercice 5 : Complétude des ensembles d'opérateurs

Un ensemble d'opérateurs \mathcal{C} sera dit *complet* si toute fonction peut s'exprimer à partir des opérateurs de \mathcal{C} . Les ensembles suivants sont-ils complets?

- $\mathcal{C}_0 = \{\text{AND, OR, NOT}\}$;
- $\mathcal{C}_1 = \{\text{OR, NOT}\}$;
- $\mathcal{C}_2 = \{\text{AND, XOR, TRUE}\}$;
- $\mathcal{C}_3 = \{\text{NAND}\}$;
- $\mathcal{C}_4 = \{\text{AND, OR, TRUE, FALSE}\}$;
- $\mathcal{C}_5 = \{\text{IMPLY, NOT}\}$;
- $\mathcal{C}_6 = \{\text{IMPLY, FALSE}\}$;
- $\mathcal{C}_7 = \{\text{IMPLY}\}$.