

Arithmétique binaire

- Représentation en base 10:

$$2034 = 2 * 10^3 + 0 * 10^2 + 3 * 10^1 + 4 * 10^0$$

- Représentation en base 2:

$$11010 = 1 * 2^4 + 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 1 * 2^1 + 0 * 2^0$$

Algorithmes pour l'arithmétique binaire

Addition

$$\begin{array}{r}
 \\
 \\
 + \\
 \hline
 1
 \end{array}$$

Soustraction

$$\begin{array}{r}
 \\
 \\
 - \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Multiplication

$$\begin{array}{r}
 \\
 \\
 * \\
 \hline
 \\
 \hline
 1
 \end{array}$$

Division

$$\begin{array}{r}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \hline
 1
 \end{array}$$

Représentation des nombres négatifs

- Il est possible d'utiliser une représentation avec signe et valeur absolue
- Pour l'arithmétique il faut alors un circuit d'addition et un autre de soustraction
- Il y a une meilleure solution qui ne nécessite qu'un circuit d'addition
- Cette solution s'appelle "complément à 2"
- Pour la comprendre nous parlerons d'abord du complément à 10

Complément à 10 avec précision infinie

- Imaginons l'odomètre d'une voiture (ou d'un vélo) mais avec un nombre infini de roues.
- Les nombres positifs sont représentés comme d'habitude
- Les nombres négatifs avec un nombre infini de chiffres 9 à gauche :
 - 1 = ...9999999
 - 2 = ...9999998
 - 3 = ...9999997
- Supposons que nous avons un circuit d'addition de ce type de nombres (Chaque nombre peut être représenté de façon finie)
- C'est la représentation exacte utilisée par certains langages de programmation permettant la précision arbitraire des entiers (et des rationnels)

Représentation des nombres négatifs

- Pour les nombres positifs de ce type, le circuit marche normalement
- Pour additionner un nombre positif avec un nombre négatif, on fait comme si le nombre négatif était positif (et très grand) :

$$\begin{array}{rcccccc}
 \dots & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & (34) \\
 \dots & 9 & 9 & 9 & 9 & 3 & (-7) \\
 \dots & 0 & 0 & 0 & 2 & 7 & (27)
 \end{array}$$

- Pour additionner deux nombres négatifs, on fait la même chose :

$$\begin{array}{rcccccc}
 \dots & 9 & 9 & 9 & 8 & 7 & (-13) \\
 \dots & 9 & 9 & 9 & 9 & 3 & (-7) \\
 \dots & 9 & 9 & 9 & 8 & 0 & (20)
 \end{array}$$

- Pour calculer la négation d'un nombre, il suffit de remplacer chaque chiffre c par $(9 - c)$, puis finalement d'ajouter 1 au résultat.

Représentation des nombres négatifs

- Nous pouvons faire presque la même chose avec une précision finie
- Mais il faut introduire la notion de débordement (overflow, underflow)
- Si la roue la plus à gauche contient 0, 1, 2, 3 ou 4, alors le nombre est positif
- Si la roue la plus à gauche contient 5, 6, 7, 8 ou 9, alors le nombre est négatif
- Exemples d'additions:

$$\begin{array}{r}
 2 \ 3 \ 3 \\
 + \ 1 \ 0 \ 5 \\
 \hline
 3 \ 3 \ 8
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2 \ 3 \ 3 \\
 + \ 5 \ 2 \ 1 \quad (-479) \\
 \hline
 7 \ 5 \ 4 \quad (-246)
 \end{array}$$

Représentation des nombres négatifs

- D'autres exemples d'additions plus problématiques:

$$\begin{array}{r}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \hline
 + \\
 \\
 \hline
 1
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 (-5) \\
 (???)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \hline
 + \\
 \\
 \hline
 5
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \\
 (-446 !!!!)
 \end{array}$$

- Si le résultat de l'addition de deux nombres positifs est un nombre positif, alors le résultat est bon
- Si le résultat de l'addition de deux nombres négatifs est un nombre négatif, alors le résultat est bon

Représentation des nombres négatifs

- Le résultat de l'addition d'un nombre positif et d'un nombre négatif est toujours bon (il faut éventuellement supprimer le chiffre supplémentaire)
- Si le résultat de l'addition de deux nombres positifs est négatif, alors il y a débordement
- Si le résultat de l'addition de deux nombres négatifs contient un chiffre supplémentaire, alors il y a débordement

Arithmétique binaire

- La même représentation marche en base 2 (complément à 2)
- Les nombres positifs ont un 0 à la première position
- Les nombres négatifs ont un 1 à la première position
- Pour calculer la négation d'un nombre, il faut remplacer chaque chiffre par son inverse, puis finalement additionner 1
- Le débordement se détecte de la même façon

Représentation des nombres rationnels

- Pas souvent en matériel, mais en logiciel, car nécessite la représentation des entiers avec une précision arbitraire
- Représentation sous la forme de deux entiers, dont le premier éventuellement négatif
- Les deux entiers n'ont pas de facteurs communs (représentation canonique)