

Initiation à l'informatique (MSI-102)

Université Bordeaux 1

Année 2007-2008, Licence semestre 1

Plan du cours

- 1 Présentation et organisation
- 2 Qu'est-ce que l'informatique?
- 3 Algorithmes et programmes
- 4 Introduction aux graphes
- 5 Graphes : définition
- 6 Degré
- 7 Chaînes
- 8 Connexité
- 9 Graphes Eulériens
- 10 Coloration

Dans cette partie...

1- Présentation et organisation

- Objectif et contenu
- Faut-il des connaissances préalables?
- Organisation et site web
- Support de cours
- Modalités de contrôle
- Comptes et tutorat

Objectifs et contenu

Objectif : Initiation à la programmation et l'algorithmique.

Thème : Étude d'un objet appelé *graphe*.

Contenu : Théorie des graphes (cours).

Algorithmique des graphes (TD).

Programmation des algorithmes de graphes (TP).

4 notions à acquérir : Graphe, algorithme, programme, temps de calcul.

Faut-il des connaissances préalables ?

Non prérequis

- ▶ Connaissance d'un langage, d'un système d'exploitation,
- ▶ connaissance de la programmation,
- ▶ connaissance de logiciels destinés au grand public.

Prérequis

- ▶ Il sera nécessaire de pouvoir comprendre un raisonnement mathématique pour les preuves des théorèmes.

Organisation et site web

Responsables et cours : Carole Blanc
Guy Mélançon
Catherine Pannier
Marc Zeitoun
nom.prenom@labri.fr

Planning : 5 séances de cours
9 séances de TD (1h20)
9 séances de TP (1h20)
+ travail individuel

Site Web : <http://dept-info.labri.fr/initinfo/>
Supports de cours.
Textes des TD, TP.
Annales d'examens.

Support de cours

- Livre (~ 10 euros) : *Initiation à l'informatique*
par Robert Strandh et Irène Durand
Non autorisé à l'examen
En vente à la librairie Georges
(cours de la Libération, Talence)
Version html en ligne sur le site du cours

- Transparents

Modalités de contrôle

Épreuve	Durée	Coef.
DS	1h20	0,25
Travail individuel en TP	-	0,15
Examen	1h30	0,60

DS : samedi 1er décembre 10h30.

Vous avez reçu un compte pour les ordinateurs de l'université.

Il faut suivre les instructions pour activer le compte au moins 24 heures (de préférence plus) avant le premier TP.

Tutorat pour

- ▶ activation de comptes,
- ▶ prise en main de l'environnement informatique,
- ▶ soutien pour les cours d'informatique,
- ▶ Tous les jours de 12h30 à 13h30 (bât. A22/ATI).

2- Qu'est-ce que l'informatique ?

- ▶ Qu'est-ce que l'informatique ?
- ▶ L'informatique même pour non informaticiens
- ▶ Quelques domaines de l'informatique

Qu'est-ce que l'informatique ?

- ▶ Dans la vie quotidienne : ordinateur avec logiciels.
- ▶ En entreprise : un outil de communication et de production.
- ▶ À l'université : une discipline scientifique.
 - ▶ Une partie pratique (par exemple, autour de la programmation).
 - ▶ Une partie théorique similaire aux maths (objets abstraits).
 - ▶ Les objets en mathématiques : nombres, relations, fonction, transformations, *etc.*
 - ▶ Les objets en informatique : algorithmes, programmes, preuves, systèmes de réécriture, images numériques, **graphes**, *etc.*

L'informatique pour non informaticiens

- ▶ Le travail d'un scientifique ou d'un ingénieur nécessite de plus en plus la manipulation de logiciels.
- ▶ Ces logiciels sont de plus en plus sophistiqués.
- ▶ Souvent, ces logiciels nécessitent de la programmation.
- ▶ Il faut des connaissances informatiques (algorithmique et programmation) pour
 - ▶ programmer efficacement, et
 - ▶ maintenir les programmes.

Exemples de domaines en informatique (1)

Les bases de données

- ▶ 1.070.000.000 internautes en 2005,
- ▶ 42 298 371 sites web en 2003,
- ▶ Trouver **rapidement** un billet d'avion, un trajet, une page web,...



Exemples de domaines en informatique (2)

La sécurité

- ▶ Transports,
- ▶ Médecine,
- ▶ Finance,
- ▶ Communications,
- ▶ Énergie,
- ▶ Systèmes embarqués,
- ▶ ...



Exemples de domaines en informatique (3)

Les logiciels

- ▶ Navigateurs internet,
- ▶ Anti-virus,
- ▶ Pare-feu ou passerelle,
- ▶ Clients de messagerie (mail),
- ▶ Jeux,
- ▶ ...



Exemples de domaines en informatique (4)

Les langages de programmation

Les langages de programmation sont souvent utilisés dans des domaines spécifiques.

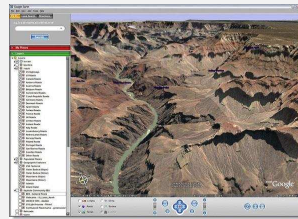
- ▶ HTML, php, javascript pour la création de pages web,
- ▶ SQL pour les bases de données,
- ▶ Java pour les applications embarquées, les serveurs, + ...
- ▶ C pour les systèmes d'exploitation (Windows, Unix), + ...

- ▶ Python pour... demandez à



Image et son

- ▶ MP3, JPEG, MPEG : codage et compression
- ▶ Voix par IP, numérisation et transformation.
- ▶ Image 3D, jeux vidéos...



3- Algorithmes et programmes

- ▶ Qu'est-ce qu'un algorithme?
- ▶ Efficacité des algorithmes
- ▶ Programmation et langage Python
- ▶ En résumé...

Qu'est-ce qu'un algorithme ?

- ▶ Un algorithme est une **méthode systématique** (comme une recette) pour résoudre un problème donné.
- ▶ Il se compose d'une suite d'**opérations simples** à effectuer pour résoudre un problème.
- ▶ Cette méthode peut donc être appliquée par un ordinateur.
- ▶ Exemple : suite de Syracuse partant de n .

tant que $n \neq 1$ **faire**

Afficher n

si n est pair **alors**

Diviser n par 2

sinon

Multiplier n par 3 et lui ajouter 1

fin si

fin tant que

Afficher 1

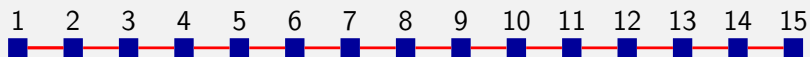
Importance de l'algorithmique

- ▶ Pour un **problème** donné, il y a **plusieurs algorithmes**.
- ▶ Il est facile d'écrire des algorithmes faux ou inefficaces.
- ▶ Une erreur peut faire la différence entre plusieurs années et quelques minutes de calculs sur une même machine.
- ▶ C'est souvent une question d'utilisation de structures de données ou d'algorithmes connus dans la littérature.
- ▶ Une structure de données est une façon particulière d'organiser les données.

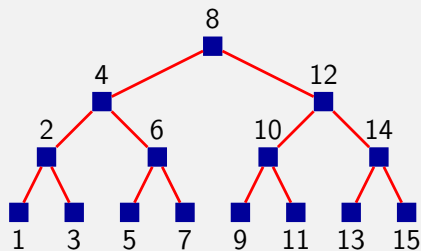
Représenter et organiser les données

Exemple Construire une ville de 15 maisons ■ en évitant aux livreurs de pizzas qui suivent les rues — un trajet trop long depuis la pizzeria.

Organisation 1 : linéaire. Numéros croissants. Pizzeria au numéro 1.



Organisation 2 : Embranchements. À l'ouest de la maison k , numéros $< k$, et à l'est, numéros $> k$. La pizzeria est au numéro 8.



Temps de calcul

- ▶ Dans les deux organisations, le livreur a une méthode simple pour trouver une maison en partant de la pizzeria.
- ▶ **Note** une organisation en étoile avec la pizzeria au milieu permet des trajets très courts, mais **choisir** la bonne rue prend du temps.
- ▶ On suppose qu'il faut une unité de temps pour passer d'une maison à une autre (en suivant une rue).
- ▶ **Quel est, dans le cas le pire, le temps mis par un livreur pour aller jusqu'à une maison depuis la pizzeria ?**

Nombre de maisons	Temps organisation 1	Temps organisation 2
15	14	3
1023	1022	9
1073741823	1073741822	29
n	$n - 1$	$\sim \log_2(n)$

Temps de calcul

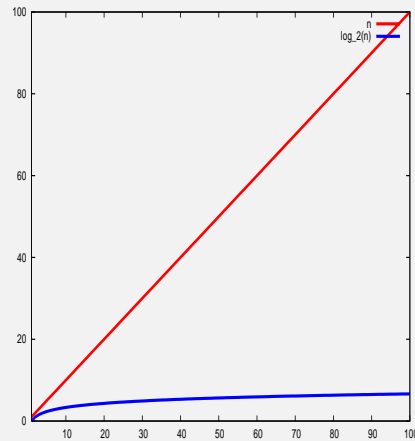
- ▶ Le **temps de calcul** (ou **complexité**) d'un algorithme est la fonction qui à un entier n associe le **nombre maximal d'instructions élémentaires** que l'algorithme effectue, lorsqu'il travaille **sur des objets de taille n** .
- ▶ En pratique, on se contente d'un ordre de grandeur.
- ▶ **Exemples d'opérations élémentaires** :
 - ▶ **additionner, soustraire, multiplier** ou **diviser** deux nombres,
 - ▶ **tester** si une valeur est égale à une autre valeur,
 - ▶ **affecter** une valeur à une variable.

Temps de calcul

- ▶ Pour déterminer si un algorithme est efficace, on compte le **nombre d'opérations** nécessaire à effectuer **dans le pire des cas** et **en fonction de la taille de la donnée**.
- ▶ Le temps de calcul d'un algorithme est une évaluation du nombre d'opérations élémentaires (opérations arithmétiques) qu'il effectue sur une donnée de taille n .
- ▶ **Exemple**
 - ▶ avec l'organisation 1 de la ville, de taille n maisons, l'algorithme naturel pour trouver une maison a une complexité $O(n)$.
 - ▶ avec l'organisation 2 d'une ville de taille n maisons, l'algorithme naturel pour trouver une maison a une complexité $O(\log_2(n))$, ce qui est bien inférieur.

Différence entre n et $\log n$

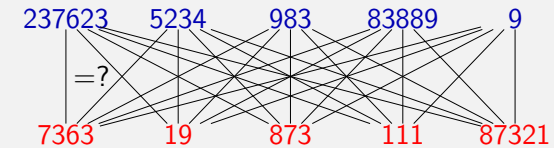
- ▶ Si $n = 10^6$, alors $\log_2 n \approx 20$, soit 50 000 fois moins.
- ▶ Si $n = 10^9$, alors $\log_2 n \approx 30$, soit 30 000 000 fois moins.



Temps de calcul : 2ème exemple

Problème : déterminer si 2 ensembles E_1, E_2 de n entiers ont une valeur commune.

Algorithme 1 : comparer successivement chaque élément de E_1 avec chaque élément de $E_2 \rightsquigarrow n^2$ comparaisons.



On peut résoudre le problème avec environ $n \log_{10}(n)$ comparaisons !

$ E_1 = E_2 $	Algorithme 1	Algorithme 2
n	n^2	$n \log_{10}(n)$
10	100	10
1000	1000000	3000
100000	10000000000	500000

Différence entre $O(n^2)$ et $O(n \log n)$

- ▶ Sur un ordinateur exécutant une instruction élémentaire en $10^{-8}s$
- ▶ Si les ensembles E_1 et E_2 ont $n = 1\,000\,000 = 10^6$ éléments :
 - ▶ Exécuter $n \log_{10} n$ instructions élémentaires nécessite 0,06s.
 - ▶ Exécuter n^2 instructions élémentaires nécessite 10^4 s soit $\sim 2h45$.
- ▶ Si les ensembles E_1 et E_2 ont $n = 10\,000\,000 = 10^7$ éléments :
 - ▶ Exécuter $n \log_{10} n$ instructions élémentaires nécessite 0,7s.
 - ▶ Exécuter n^2 instructions élémentaires nécessite 10^6 s soit ~ 11 jours
- ▶ En informatique, on manipule parfois des ensembles énormes.
 - ▶ Google indexe plusieurs milliards de pages web,
 - ▶ Google reçoit près de 200 millions de requêtes/jour.

Qu'est qu'un programme ?

- ▶ C'est une suite d'instructions écrites dans un langage de programmation compréhensible par l'ordinateur.
- ▶ Cela permet à l'ordinateur d'appliquer un algorithme.
- ▶ Par exemple en langage Python :

```
def syracuse(n):
    while n != 1:
        print n,
        if n % 2 == 0:
            n = n/2
        else:
            n = 3*n+1
    print 1
```

Quelques instructions Python

1. Affectation : ranger une valeur dans une variable

```
i = 1
x = 2 * i + 1
i = i + 1
x = x + i
```

- ▶ L'ordinateur effectue les instructions **dans l'ordre**.
- ▶ L'ordre des instructions est donc très important.
- ▶ Une variable désigne un emplacement dans lequel on peut mémoriser une **valeur**. Une variable a un **nom**.
- ▶ En python, le symbole **=** n'a pas la même signification qu'en mathématique. Il signifie **calculer la valeur à droite du symbole =, et la ranger dans la variable dont le nom se trouve à gauche**.

Quelques instructions Python (suite)

2. Instruction conditionnelle **if** :

```
if i > x :
    print "test VRAI"
    print i, "est supérieur à", x
else :
    print "test FAUX"
    print i, "n'est pas supérieur à", x
```

Quelques instructions Python (suite)

3. Répétition :

```
while i > 0 :
    print i
    i = i - 1
```

Mais aussi,

```
# affiche les entiers de 0 à 9
for i in range(10) :
    print i
```

Quelques instructions Python (fin)

4. Définition d'algorithme (fonction) :

En maths : soit la fonction $f : x \mapsto 2x^2 + 1$

En Python :

```
def f(x) :
    return 2 * x * x + 1
```

```
y = 2 * f(2)
```

- ▶ Une fonction Python peut utiliser d'autres fonctions.
- ▶ Un programme est en général composé de plusieurs fonctions.
- ▶ Il y a d'autres instructions dans le langage... <http://www.python.org/>

- ▶ **Algorithme** : méthode donnant une suite d'opérations simples pour traiter un problème donné.
- ▶ **Structure de données** : organisation particulière d'un ensemble de données dans le but d'y accéder rapidement.
- ▶ **Temps de calcul** : façon d'exprimer l'efficacité d'un algorithme, indépendamment d'un ordinateur ou d'un langage de programmation particulier.
- ▶ **Programme** : Réalisation d'un algorithme dans un langage de programmation particulier, comme Python par exemple.

4- Introduction aux graphes

- ▶ 1^{ère} sorte de graphes : les graphes orientés
- ▶ Quelques exemples de graphes orientés
- ▶ 2^{ème} sorte de graphes : les graphes non orientés
- ▶ Quelques exemples de graphes non orientés
- ▶ Les graphes dans des problèmes courants

1^{ère} sorte de graphes : les graphes orientés

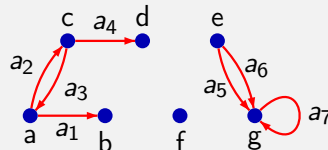
Un graphe orienté est défini par

- ▶ un ensemble de **sommets** (souvent fini),
- ▶ un ensemble d'**arcs** (souvent fini),
- ▶ à chaque arc est associé est un **couple de sommets**.
- ▶ On représente un graphe par un dessin.

- ▶ Un sommet est dessiné comme un point ●
- ▶ L'arc a associé à (s, t) est représenté par $s \xrightarrow{a} t$

Exemple (graphe simple)

- ▶ Sommets : $\{a, b, c, d, e, f, g\}$.
- ▶ Arcs : $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$.

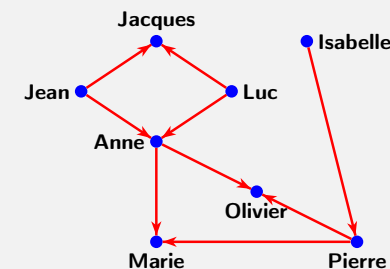


Exemple de graphe orienté : parents

Ensemble : toutes les personnes assistant à un repas de Noël.

Relation : l'ensemble des couples de personnes (p_1, p_2) tels que p_1 a pour parent p_2 (relation **non symétrique**).

Représentation graphique (relation **non symétrique**, graphe **orienté**) :

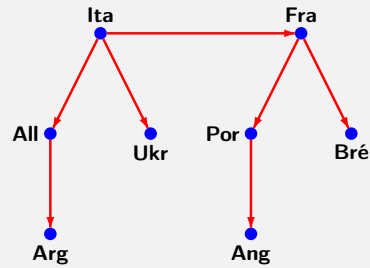


Exemple de graphe orienté : matchs de foot

Ensemble : équipes de foot.

Relation : l'ensemble des couples d'équipes (eq_1, eq_2) telles que eq_1 a battu eq_2 à partir des 1/4 finale de la coupe du monde 2006.

Représentation graphique (pas de match nul, relation non symétrique, graphe orienté).



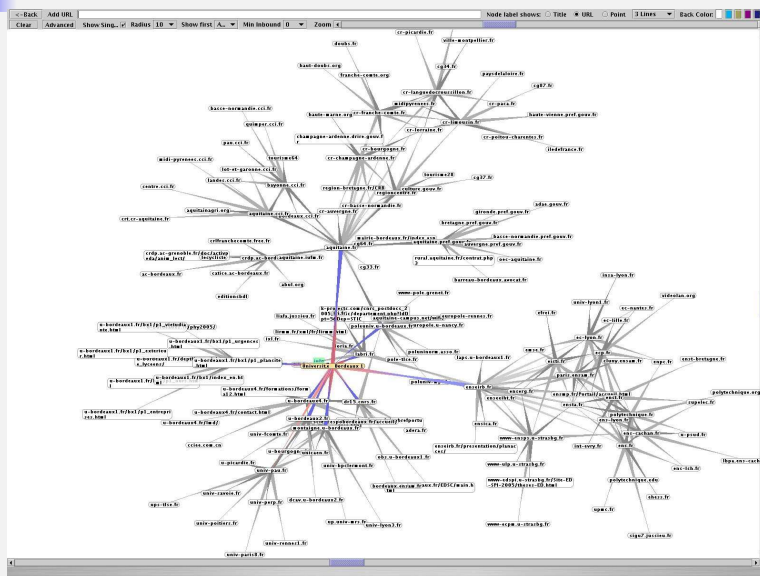
Exemple de graphe orienté : internet

Ensemble de sommets : les pages web.

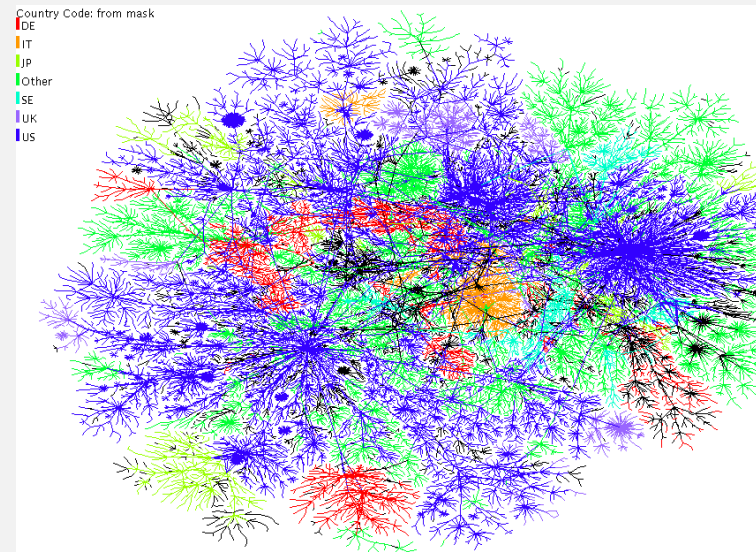
Relation : l'ensemble des couples (w_1, w_2) tels qu'il existe un lien direct sur la page web w_1 qui amène sur la page web w_2 .

Relation non symétrique, graphe orienté.

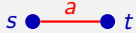

Représentation graphique (internet)



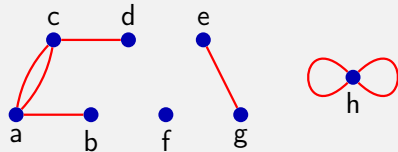
Représentation graphique : internet



2^{ème} sorte de graphes : graphes non orientés

- ▶ Un graphe orienté peut représenter une relation entre sommets.
- ▶ Une arête associée à (s, t) exprime que s et t sont en relation.
- ▶ Un graphe **non orienté** peut représenter une relation **symétrique**
- ▶ Dans un graphe non orienté, une **arête** est associée soit à une **paire de sommets** $\{s, t\}$, soit à un **singleton** $\{s\}$.
- ▶ On représente un graphe non orienté par un dessin, dans lequel les arêtes n'ont pas de flèche.
 - ▶ Un sommet est dessiné comme un point ●
 - ▶ Une arête a associée à $\{s, t\}$ est représentée par 
 - ▶ Une arête a associée à $\{s\}$ est représentée par 

▶ Exemple

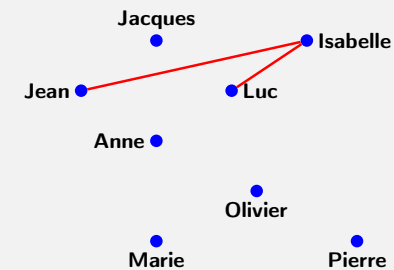


Exemple de graphe non orienté : cousins

Ensemble : toutes les personnes assistant à un repas de Noël.

Relation : l'ensemble des couples de personnes (p_1, p_2) tels que p_1 est un cousin de p_2 (relation **symétrique**).

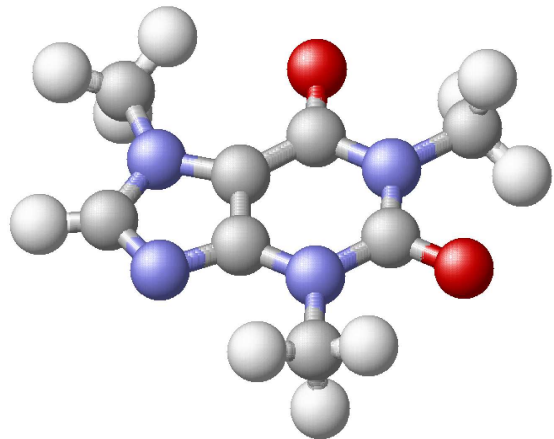
Représentation graphique (relation **symétrique**, graphe **non orienté**) :



Exemple de graphe non orienté : molécule

Ensemble : les atomes de la molécule de caféine.

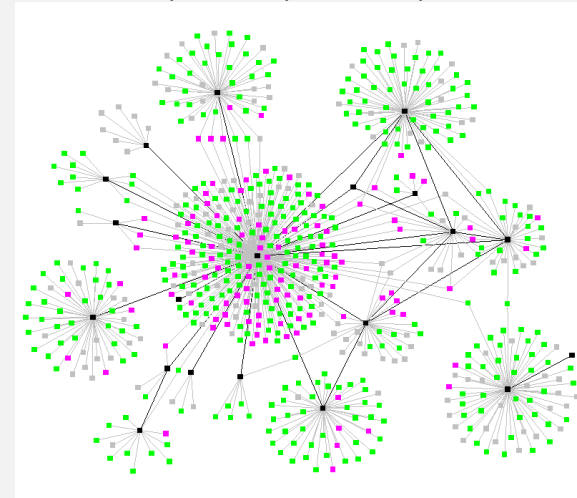
Relation : l'ensemble des couples d'atomes (a_1, a_2) tels que a_1 et a_2 partagent au moins un électron (liaison covalente, relation **symétrique**)



Exemple - graphe non orienté : connaissance

Ensemble : un ensemble de personnes.

Relation : ensemble des paires de personnes qui se connaissent.

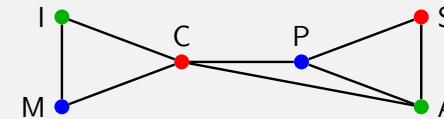


Modélisation de problèmes par des graphes

- ▶ Les graphes sont des objets permettant de représenter plusieurs situations de la vie courante.
- ▶ Des problèmes de la vie courante se **traduisent** en problèmes sur les graphes.
- ▶ Le développement d'algorithmes sur les graphes permet donc de répondre à des problèmes concrets et pratiques.

Organisation d'examens

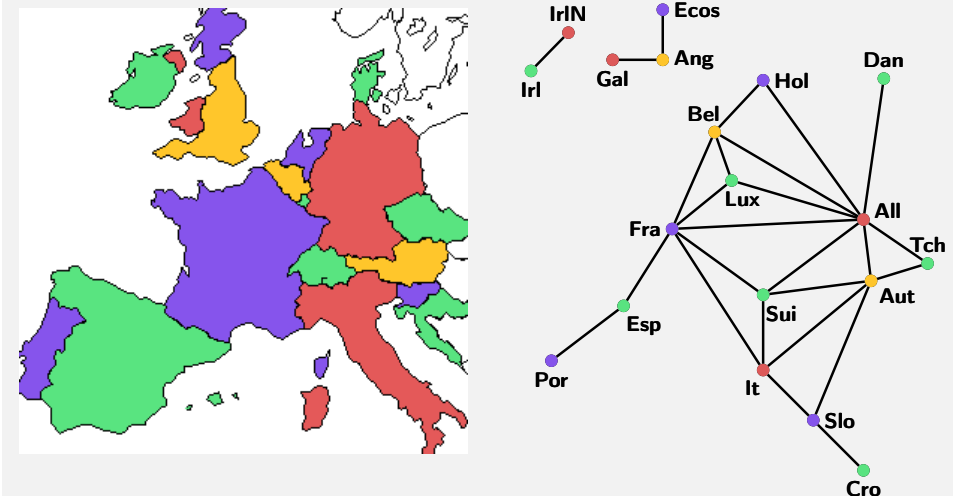
- ▶ Des étudiants passent des examens de Maths (M), Informatique (I), Chimie (C), Physique (P), Anglais (A) et Sport (S) de **2h**.
- ▶ Des étudiants passent M,I,C, d'autres C,P,A et d'autres A,S,P.
- ▶ **Qu** : Quel est le temps le plus court pour organiser les examens ?
- ▶ On fait un graphe avec comme sommets M,I,C,P,S,A.
- ▶ 2 sommets sont reliés si un étudiant passe les deux examens.
 - ▶ on relie 2 sommets s'ils sont incompatibles pour le même créneau
- ▶ On colorie les sommets avec le nombre minimal de couleurs, pour que 2 sommets reliés aient des couleurs différentes.
 - ▶ chaque couleur représente un créneau différent.
- ▶ Ici, 3 couleurs \implies on peut organiser tout en $3 \times 2h$.



Coloration de carte géographique

- ▶ 1852 Guthrie colorie la carte des cantons anglais avec **4 couleurs** sans que 2 cantons adjacents n'aient la même couleur.
- ▶ 4 couleurs suffisent-elles pour colorier n'importe quelle carte ?
- ▶ 1976 : **Oui** (Appel & Haken). Résultat obtenu en partie par ordinateur.
 - ▶ Carte géographique \rightsquigarrow graphe.
Les sommets représentent les pays, et 2 sommets sont reliés par une arête si les pays correspondants partagent une frontière.
 - ▶ But : montrer qu'on colorie le graphe avec 4 couleurs, sans que 2 sommets adjacents n'aient la même couleur.
- ▶ On peut dériver de la preuve un algorithme permettant de trouver la coloration.

Coloration de carte géographique




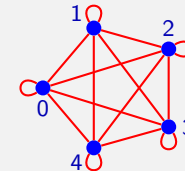
Coloration de carte géographique

Remarques

- ▶ Partant d'un graphe quelconque (ne représentant pas une carte), on peut avoir besoin de plus de 4 couleurs.
- ▶ Tester si on peut colorier avec seulement 3 couleurs est difficile.
- ▶ Pour ce dernier problème,
 - ▶ trouver un algorithme avec une complexité polynomiale, ou
 - ▶ prouver qu'un tel algorithme n'existe pasest équivalent à l'un des problèmes ouverts les plus difficiles, sélectionné par le Clay Mathematical Institute (1 000 000 \$).

Dominos

- ▶ On dispose d'un jeu de dominos, le plus grand numéro étant n .
- ▶ **Qu** : Peut-on placer tous les dominos (en suivant les règles) ?
- ▶ Graphe. **Sommets** : $\{0, \dots, n\}$. **Arêtes** : toutes les paires $\{s, t\}$.
- ▶ L'arête $\{s, t\}$ représente le domino dont les numéros sont s et t .
 - ▶ Ex. l'arête $\{1, 2\}$ représente .
 - ▶ Pour $n = 4$ par exemple, on réalise le graphe suivant.



- ▶ On peut placer tous les dominos s'il existe un **chemin** dans le graphe passant une seule fois par chaque arête : **chemin Eulérien**.
- ▶ Un résultat vu plus loin permet de résoudre le problème.

Problèmes de parcours

- ▶ Les graphes permettent de modéliser des voies de communication
 - ▶ les sommets représentent des villes,
 - ▶ les arêtes représentent des routes.
- ▶ On peut associer à chaque arête d'un tel graphe (orienté s'il y a des sens uniques) un nombre représentant la distance entre les deux sommets reliés.
- ▶ **Deux questions naturelles**
 - ▶ Peut-on trouver un algorithme efficace pour calculer un trajet le plus court possible **entre deux** villes données ?
 - ▶ Peut-on trouver un algorithme efficace pour calculer un trajet le plus court possible reliant **toutes** les villes ?
- ▶ **Réponses**
 - ▶ Oui pour le 1er problème, (il y a des algorithmes efficaces).
 - ▶ **??** pour le 2ème, sélectionné par le Clay Math Institute (1 M \$).

Dans cette partie...

5- Graphes : définition

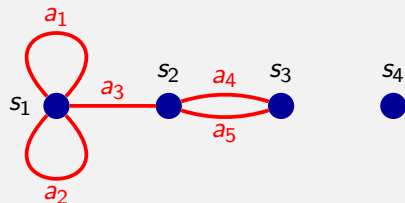
Définition de graphe, centrée sommets

Un *graphe* est un triplet (S, A, inc) , où

- ▶ S est un ensemble d'objets appelés les *sommets* du graphe,
- ▶ A est un ensemble d'objets appelés les *arêtes* du graphe,
- ▶ inc est une fonction $inc : S \rightarrow \mathcal{P}(A)$ telle que

$$\forall a \in A, \quad |\{s \in S, a \in inc(s)\}| \in \{1, 2\}$$

- ▶ Intuition : $inc(s)$ = ensemble des arêtes incidentes au sommet s .
(incidentes = qui "touchent").



$$\begin{aligned} inc(s_1) &= \{a_1, a_2, a_3\} \\ inc(s_2) &= \{a_3, a_4, a_5\} \\ inc(s_3) &= \{a_4, a_5\} \\ inc(s_4) &= \emptyset \end{aligned}$$

Interprétation de la définition

- ▶ Exemple : pour décrire les vols d'une compagnie aérienne,
 - ▶ on décrit chaque *ville* (= sommet) desservie,
 - ▶ on décrit les *lignes* (= arêtes) vers ou depuis chaque ville.
 - ▶ Ex. Ville *Bordeaux*, liaison *AF6257* (vers *Paris*).
- ▶ Le rôle de la fonction inc est très différent de celui de ext .
- ▶ inc est appliquée à un *sommet* et renvoie l'*ensemble des arêtes* qui "touchent" le sommet.
- ▶ La propriété de $inc : S \rightarrow \mathcal{P}(A)$ pour forcer une arête à avoir *une ou deux* extrémités est :

$$\forall a \in A, \quad |\{s \in S, a \in inc(s)\}| \in \{1, 2\}.$$

Le graphe en tant que type abstrait

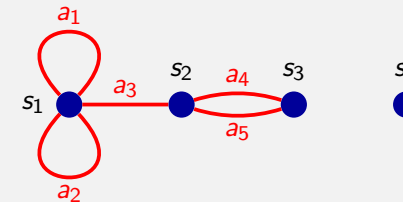
- ▶ Pour programmer une application, on se pose la question : "Quels sont les objets manipulés par le programme, et quelles sont les opérations sur ces objets ?"
- ▶ À partir d'un objet de type *graphe*, on peut :
 - ▶ récupérer la liste des sommets du graphe,
 - ▶ pour chaque sommet du graphe, récupérer la liste de ses *voisins*.
 - ▶ On verra qu'on peut aussi colorier des sommets.

Fonctions de manipulation de graphes

- Plusieurs fonctions prédéfinies permettent de manipuler des graphes.
- ▶ $nom_graphe(G)$ Retourne le nom du graphe G .
 - ▶ $nb_sommets(G)$ Retourne le nombre de sommets du graphe G .
 - ▶ $liste_sommets(G)$ Retourne la liste des sommets du graphe G .
 - ▶ $degre(s)$ Retourne le degré du sommet s .
 - ▶ $liste_voisins(s)$ Retourne la liste des voisins du sommet s .
 - ▶ $dessiner(G)$ Dessine le graphe G .

6- Degré

- ▶ Le *degré* d'un sommet s , noté $d(s)$, est le nombre de brins d'arêtes ayant s comme extrémité.
- ▶ Une boucle compte deux fois.



- ▶ Ici $d(s_1) = 5$, $d(s_2) = 3$, $d(s_3) = 2$, $d(s_4) = 0$.

Quelques propriétés des degrés

- ▶ Si G est un graphe (non orienté), on note
 - ▶ $S(G)$ l'ensemble de ses sommets, et
 - ▶ $A(G)$ l'ensemble de ses arêtes.
- ▶ **Théorème.** Pour un graphe G ayant au moins un sommet,

$$\sum_{s \in S(G)} d(s) = 2|A(G)|$$

- ▶ **Une idée de preuve :** faire la somme des degrés compte chaque arête 2 fois, car chaque arête a 2 extrémités qui contribuent chacune à une unité de cette somme.
- ▶ **Conséquence.** Dans n'importe quel graphe, le nombre de sommets qui ont un degré impair est pair.

Preuve formelle : technique d'induction

1. Vérifier que $\sum_{s \in S} d(s) = 2|A|$ pour un graphe sans arête,
2. Prouver que
 si $\sum_{s \in S} d(s) = 2|A|$ est vrai pour tout graphe à au plus k arêtes,
 alors c'est aussi vrai pour tout graphe à $k + 1$ arêtes.

Par induction sur le nombre d'arêtes dans le graphe.

1. **Cas de base** La propriété est trivialement vraie pour un graphe avec $|A| = 0$, car le degré de chaque sommet du graphe est 0.
2. **Hypothèse d'induction** On suppose que pour un graphe G avec au moins un sommet et au plus k arêtes,

$$\sum_{s \in S(G)} d(s) = 2|A(G)|.$$

3. **Induction** Soit H un graphe à $k + 1$ arêtes. En supprimant l'une des arêtes, disons a entre s_1 et s_2 , on obtient un graphe G ayant au plus k arêtes. D'après l'hypothèse d'induction, on a

$$\sum_{s \in S(G)} d(s) = 2|A(G)|.$$

Le degré de s_1 et s_2 dans H est 1 de plus que leur degré dans G .

$$\text{Donc : } \sum_{s \in S(H)} d(s) = \sum_{s \in S(G)} d(s) + 2 = 2(|A(G)| + 1)$$

Comme G est obtenu de H en supprimant une arête, on a $|A(G)| + 1 = |A(H)|$, et donc finalement

$$\sum_{s \in S(H)} d(s) = 2|A(H)|$$

Nous avons donc prouvé la propriété par induction.

7- Chaînes

- ▶ Il est souvent nécessaire de savoir si l'on peut aller d'un sommet à un autre en suivant des arêtes.
- ▶ Exemple d'utilité : Est-ce possible de prendre le train pour aller de Bordeaux à Rome ? De Bordeaux à Oslo ? De Bordeaux à Reykjavik ?
- ▶ La notion de chaîne exprime cette idée.

Définition de chaîne

Une *chaîne* dans un graphe est une suite

$$C = s_1, a_1, s_2, a_2, \dots, s_k, a_k, s_{k+1}$$

de $k + 1$ sommets et k arêtes en alternance, telle que $\forall i, 1 \leq i \leq k$, les extrémités de a_i sont s_i et s_{i+1} . On dit alors que C est une chaîne entre s_1 et s_{k+1} .

Remarques :

- ▶ si $k = 0$, on obtient une chaîne sans arête

$$C = s_1.$$

- ▶ pour définir une chaîne, se donner
 - ▶ seulement la suite des arêtes, ou
 - ▶ seulement la suite des sommetsne suffit pas (pourquoi) ?

Existence d'une chaîne

- ▶ Vérifier s'il existe une chaîne entre un sommet s et un sommet t n'est pas forcément simple.
- ▶ Pour y arriver, nous allons utiliser une technique pour marquer et démarquer les sommets.

Chaîne simple

- ▶ Une chaîne $C = s_1, a_1, s_2, a_2, \dots, s_k, a_k, s_{k+1}$ est *simple* si et seulement si

$$\forall i, j \in [1, k + 1], \quad (i < j \text{ et } s_i = s_j) \implies (i = 1 \text{ et } j = k + 1)$$

- ▶ Autrement dit "un sommet figure au plus une fois dans la chaîne". [sauf pour le sommet de début et de fin. S'ils sont les mêmes, il s'agit d'un *cycle*].

Théorème

Dans un graphe G , s'il existe une chaîne entre $s \in S(G)$ et $t \in S(G)$, alors il existe une chaîne *simple* entre s et t .

La preuve est *constructive*. On prend une chaîne non simple et on supprime les cycles.

- ▶ Soit $C = s_1, a_1, s_2, a_2, \dots, s_k, a_k, s_{k+1}$ la chaîne.
- ▶ Si C est simple, le travail est terminé.
- ▶ Sinon, il y a deux sommets s_i et s_j tels que $i, j \in [1, k + 1]$, pour lesquels $i < j$, $\{i, j\} \neq \{1, k + 1\}$, et $s_i = s_j$.
- ▶ On écrit donc :

$$C = s_1, a_1, \dots, s_i, a_i, \dots, s_j, a_j, \dots, s_k, a_k, s_{k+1}.$$

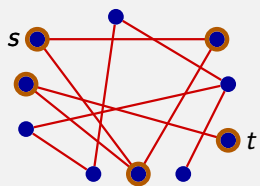
- ▶ On construit C' plus courte en supprimant de C la partie a_i, \dots, s_j .
- ▶ On obtient alors : $C' = s_1, a_1, \dots, s_i, a_j, \dots, s_k, a_k, s_{k+1}$.

- ▶ Il reste à vérifier que C' est une chaîne.
- ▶ Chaque arête de la chaîne doit être entourée de ses deux extrémités.
- ▶ C'est le cas dans C' .
- ▶ On répète le procédé tant que C' n'est pas simple.
- ▶ [Ou : on fait une preuve par induction sur la longueur de la chaîne.]

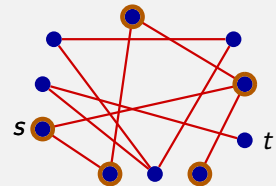
Existence d'une chaîne entre s et t

Algorithme :

- démarrer tous les sommets
- marquer s
- tant que t n'est pas marqué,
 - chercher une arête dont un sommet extrémité est marqué et l'autre ne l'est pas
 - si une telle arête n'existe pas, renvoyer la valeur "faux"
 - sinon marquer l'extrémité non encore marquée
- renvoyer la valeur "vrai"



Vrai!



Faux!

Existence d'une chaîne, complexité

Avec la définition centrée sommets :

- ▶ Étape 1 : $|S|$ unités de temps.
- ▶ Étape 2 : 1 unité de temps.
- ▶ Étape 3.1 : au pire, pour chercher une arête « bicoloré », on passe $d(s) + 1$ unité de temps par sommet s , ce qui coûte $\sum_{s \in S} (d(s) + 1) = 2|A| + |S| = O(|A| + |S|)$ unités de temps.
- ▶ Étapes 3.2 et 3.3 : 1 unité de temps.
- ▶ Au pire, on recommence l'étape 3 pour chaque sommet : $|S|$ fois.
- ▶ La complexité de l'algorithme est donc au pire de l'ordre de :

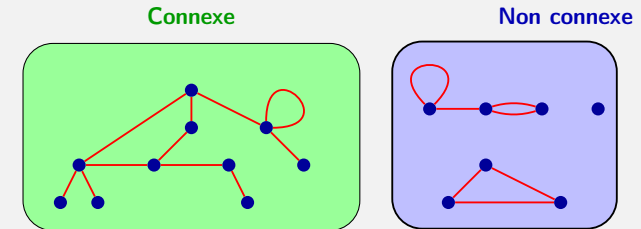
$$|S|(|A| + |S|).$$

(en négligeant les étapes 1, 2, 3.2, 3.3 et un facteur 2).

- ▶ Remarque Il existe un algorithme de complexité $O(|A| + |S|)$.

8- Connexité

- ▶ La connexité exprime la possibilité d'aller de n'importe quel sommet du graphe à n'importe quel autre sommet du graphe.
- ▶ Informellement, un graphe est connexe s'il est en un seul morceau.



- ▶ Formellement, un graphe G est **connexe** si et seulement si $\forall s, t \in S(G)$, il existe une chaîne entre s et t .
- ▶ On cherche des algorithmes pour déterminer si un graphe est connexe.

Déterminer si un graphe est connexe

Approche simple

- ▶ La première idée est toujours d'appliquer la définition.
- ▶ Donc, pour déterminer si un graphe est connexe, vérifier si pour chaque couple (s, t) de sommets, il existe une chaîne entre s et t .
- ▶ Il y a $|S|^2$ tels couples.
- ▶ Au total, la méthode simple a une complexité

$$|S|^2 \cdot |S|(|A| + |S|) = |S|^3(|A| + |S|).$$

- ▶ Nous allons montrer qu'on peut résoudre le problème en remplaçant le facteur $|S|^3$ par $|S|^2$.

Différence entre $O(n^3)$ et $O(n)$

- ▶ Pour apprécier la différence entre $O(n^3)$ et $O(n)$, imaginons un ordinateur capable d'exécuter une instruction élémentaire en $10ns = 10^{-8}s$ (ce qui est raisonnable).
- ▶ Imaginons aussi un graphe de 1 000 000 sommets (un réseau routier par exemple).
- ▶ Exécuter n instructions élémentaires nécessite 10ms, soit **0,01s**.
- ▶ Exécuter n^3 instructions élémentaires nécessite $10^{10}s$ soit **~ 321 ans**.

Différence entre $O(n^3)$, $O(n^2)$ et $O(n)$

- ▶ Imaginons encore un ordinateur capable d'exécuter une instruction élémentaire en 10ns et un graphe de 1 000 000 sommets.
- ▶ Exécuter n instructions élémentaires nécessite 10ms, soit 0,01s.
- ▶ Exécuter n^2 instructions élémentaires nécessite 10^4 s soit $\sim 2\text{h}45$.
- ▶ Exécuter n^3 instructions élémentaires nécessite ~ 321 ans.

Approche plus efficace

Théorème

Soit G un graphe. On considère les propriétés suivantes :

- A. G est **connexe**.
- B. Pour tout sommet s de G , il existe une chaîne entre s et chacun des sommets de G .
- C. Il existe un sommet s de G tel qu'il existe une chaîne entre s et chacun des sommets de G .

Les propriétés A, B et C sont équivalentes, c'est-à-dire :

$$A \iff B \iff C.$$

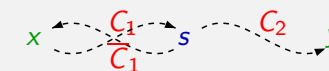
Preuve (parties $A \implies B$ et $B \implies C$)

- ▶ On suppose que A est vraie, c'est-à-dire que G est **connexe**.
- ▶ On choisit un sommet s de G .
- ▶ Comme G est connexe, pour tout sommet t de G , il existe une chaîne entre s et t . Donc B est vraie.
- ▶ On a donc montré que $A \implies B$.
- ▶ Si B est vraie, alors C est aussi vraie (évident) donc $B \implies C$.

Il reste à montrer que $C \implies A$.

Preuve (partie $C \implies A$)

- ▶ On suppose que C est vraie : il existe donc un sommet s de G tel qu'il existe une chaîne entre s et chacun des sommets de G .
- ▶ Il faut prouver que A est vraie, c'est-à-dire que G est connexe.
- ▶ Soient donc x et y deux sommets de G . On veut montrer qu'il existe une chaîne entre x et y .



- ▶ On sait qu'il existe des chaînes C_1 entre s et x , et C_2 entre s et y .
- ▶ En lisant C_1 à l'envers, on obtient une chaîne \bar{C}_1 entre x et s .
- ▶ En recollant la chaîne \bar{C}_1 à C_2 , on obtient une chaîne x et y .
- ▶ Donc A est vraie et $C \implies A$.

Un algorithme plus efficace

Pour déterminer si un graphe est connexe, on peut donc :

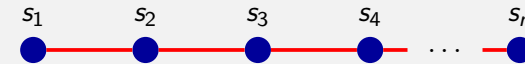
- ▶ Choisir un sommet s arbitraire dans le graphe.
- ▶ Vérifier si pour chaque sommet t du graphe, il existe une chaîne entre s et t .

Temps de calcul

1. Il faut donc faire $|S|$ vérifications.
2. Le coût de chaque vérification est $|S|.(|A| + |S|)$.
3. Au total, la complexité est donc $|S|^2.(|A| + |S|)$.

Encore une amélioration

On observe que l'algorithme parcourt la même chaîne plusieurs fois. Dans le graphe suivant :



- ▶ Il va parcourir la chaîne entre s_0 et s_1 ,
- ▶ puis entre s_0 et s_2 , **refaisant** alors le parcours entre s_0 et s_1 ,
- ▶ puis entre s_0 et s_3 , **refaisant** alors le parcours entre s_0 et s_2 , etc.

Méthode finale pour la connexité

Voici l'algorithme plus efficace.

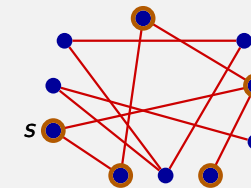
1. démarquer tous les sommets
2. marquer un sommet arbitraire s
3. tant qu'il existe une arête « bicolore » :
 - 3.1 marquer l'extrémité non encore marquée
4. si tout les sommets sont marqués, renvoyer "vrai"
5. sinon renvoyer "faux"

Complexité $|S|(|S| + |A|)$! Car on applique une seule fois l'algorithme de « parcours » du graphe depuis s .

Remarque On peut faire encore mieux : $O(|S| + |A|)$.

Méthode finale pour la connexité - Exemple

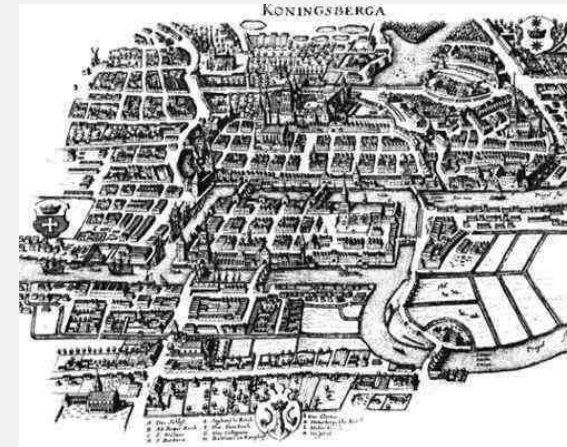
L'algorithme ressemble à celui de recherche d'une chaîne. Déroulement possible de l'algorithme sur le graphe suivant :



Non connexe (sommets pas tous marqués, plus d'arêtes « bicolorées »).

9– Graphes Eulériens

Les ponts de la ville de Königsberg au 18^e siècle
(maintenant Kaliningrad en Russie) :



Peut-on

- ▶ commencer une promenade sur une île ou une rive,
- ▶ terminer la promenade sur n'importe quelle autre (ou la même) île ou rive
- ▶ en passant exactement une fois sur chacun des ponts ?

C'est le mathématicien Euler qui en 1735 a trouvé la réponse (d'où le nom "eulérien").

Dans un graphe G , est-il possible de trouver une chaîne

$$C = s_1, a_1, s_2, a_2, \dots, s_m, a_m, s_{m+1}$$

telle que

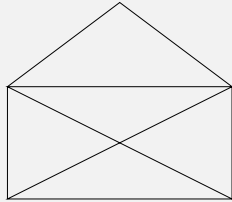
$$A(G) = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$$

et

$$|A(G)| = m.$$

Dessiner une enveloppe

Est-ce possible de dessiner cette enveloppe sans lever le crayon :



Définition de graphe eulérien

Un graphe G est *eulérien* si et seulement si il est possible de trouver une chaîne

$$C = s_1, a_1, s_2, a_2, \dots, s_m, a_m, s_{m+1}$$

telle que

$$S(G) = \{s_1, s_2, \dots, s_m, s_{m+1}\},$$

$$A(G) = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$$

$$\text{et } |A(G)| = m.$$

Remarque 1 Dans la suite de sommets s_1, s_2, \dots, s_{m+1} , certains sommets peuvent apparaître plusieurs fois.

Remarque 2 Par contre, dans la suite d'arêtes a_1, a_2, \dots, a_m , chaque arête apparaît exactement une fois.

Conditions nécessaires

Théorème. *Un graphe eulérien est forcément connexe.*

D'autres façons de dire la même chose :

- ▶ Tout graphe eulérien est connexe,
- ▶ Si un graphe est eulérien, alors il est connexe,
- ▶ G eulérien $\Rightarrow G$ connexe,
- ▶ Si un graphe n'est pas connexe, alors il n'est pas eulérien,
- ▶ G est connexe est une condition nécessaire pour que G soit eulérien.

Preuve du théorème

Soit G un graphe eulérien. Donc, il existe une chaîne

$$C = s_1, a_1, s_2, a_2, \dots, s_m, a_m, s_{m+1}$$

telle que

$$S(G) = \{s_1, s_2, \dots, s_m, s_{m+1}\},$$

$$A(G) = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$$

$$\text{et } |A(G)| = m.$$

- ▶ En arrêtant C au sommet s_j , on obtient une chaîne entre s_1 et s_j .
- ▶ Comme $S(G) = \{s_1, s_2, \dots, s_m, s_{m+1}\}$, il existe une chaîne entre s et chaque sommet de G .
Donc G est connexe, par le point C du théorème de connexité.

Définition

- ▶ Un sommet est *pair* si son degré est pair.
- ▶ Un sommet est *impair* si son degré est impair.

Théorème. *Dans un graphe eulérien, le nombre de sommets impairs est forcément 0 ou 2.*

- ▶ Le graphe de la ville de Königsberg n'est donc pas eulérien.
- ▶ Pour ce qui concerne l'enveloppe, le théorème ne nous donne pas le droit de constater que son graphe est eulérien.

Soit G un graphe eulérien. Il existe donc une chaîne

$$C = s_1, a_1, s_2, a_2, \dots, s_m, a_m, s_{m+1}$$

telle que

$$S(G) = \{s_1, s_2, \dots, s_m, s_{m+1}\},$$
$$A(G) = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$$

et $|A(G)| = m$.

$$C = s_1, a_1, s_2, a_2, \dots, s_m, a_m, s_{m+1}$$

- ▶ Examinons un sommet autre que s_1 et s_{m+1} dans cette chaîne.
- ▶ Un tel sommet s_i est entouré dans C de a_{i-1} et a_i ce qui donne une contribution de 2 au degré de s_i .
- ▶ Comme C contient chaque arête exactement une fois, s_i est pair.
- ▶ Pour s_1 et s_{m+1} il existe deux cas :
 - ▶ **Premier cas** : $s_1 \neq s_{m+1}$
 s_1 et s_{m+1} sont impairs. Il y a donc 2 sommets impairs.
 - ▶ **Deuxième cas** : $s_1 = s_{m+1}$
 $s_1 = s_{m+1}$ est pair. Il y a donc 0 sommets impairs.

Cette preuve nous indique comment trouver une chaîne eulérienne dans un graphe ayant deux sommets impairs : il faut

- ▶ commencer dans un sommet impair, et
- ▶ terminer dans l'autre sommet impair.

Théorème. *Un graphe G est eulérien si et seulement si G est connexe et le nombre de sommets impairs de G est 0 ou 2.*

- ▶ Il nous reste à établir que si G est connexe et possède 0 ou 2 sommets impairs, alors G possède une chaîne passant une seule fois par chacune des arêtes de G .
- ▶ Nous allons donner une preuve "constructive" de ce théorème en construisant cette chaîne, dite *eulérienne*.

- ▶ Un *cycle* est une chaîne $C = s_1, a_1, s_2, \dots, s_m, a_m, s_{m+1}$ telle que $|\{a_1, \dots, a_m\}| = m$ et $s_1 = s_{m+1}$.
- ▶ **Remarque.** Si $s_1, a_1, s_2, \dots, s_m, a_m, s_{m+1}$ est un cycle, alors $s_2, a_2, s_3, \dots, a_m, s_1, a_2, s_2$ est aussi un cycle.

Algorithme 1 : *construit un cycle C contenant une seule fois chaque arête de G , G étant un graphe connexe où tous les sommets sont pairs.*

1. Choisir un sommet s_1 arbitraire, et former $C = s_1$
2. Tant que le dernier sommet de C possède une arête a qui n'appartient pas à C , ajouter a et son sommet extrémité à C .
(À prouver : C est un cycle après l'étape 2.)
3. Si toutes les arêtes de G sont dans C , alors retourner C .
4. Sinon, soit s_j un sommet de C ayant une arête a qui n'appartient pas à C .
Former $C' = s_j, a_j, s_{j+1}, \dots, a_m, s_1, a_1, \dots, a_{j-1}, s_j$.
5. Poser $C = C'$, puis continuer à l'étape 2.

Cas 2 : G est connexe avec deux sommets impairs

Algorithme 2 : construit une chaîne C contenant une seule fois chaque arête de G , G étant un graphe connexe avec 2 sommets impairs, disons s et t .

1. Former $a = \{s, t\}$, et un nouveau graphe G' tel que $S(G') = S(G)$, et $A(G') = A(G) \cup \{a\}$.
(Tous les sommets de G' sont pairs.)
2. Calculer le cycle C' pour G' par l'Algorithme 1.
(C' est un cycle eulérien pour G' .)
On suppose que C' contient la sous-chaîne s, a, t dans ce sens (sinon inverser le rôle de s et t).
3. Former $C'' = s, a, t, a_i, s_{i+1}, \dots, s$.
4. Retourner $C = t, a_i, s_{i+1}, \dots, s$.

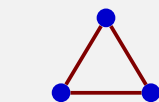
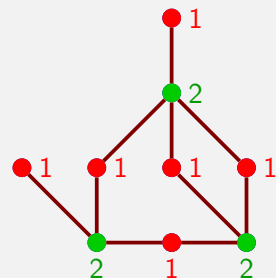
Dans cette partie...

10- Coloration

Coloration

Définition. Une coloration d'un graphe G en k couleurs est une fonction $c : S(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ telle que, pour tous sommets voisins x et y , $c(x) \neq c(y)$.

Un graphe qui a une coloration en k couleurs est dit k -coloriable.



Non 2-coloriable

2-coloriable

Graphes 2-coloriables et longueurs des cycles

Soit $C = s_1, a_1, \dots, a_m, s_{m+1}$ une chaîne.

- ▶ La **longueur** de C est son nombre m d'arêtes.
- ▶ Rappel : C est un **cycle** si les arêtes a_1, \dots, a_m sont toutes différentes, et si $s_1 = s_{m+1}$.
(La chaîne $C = s_1$ est donc un cycle de longueur 0).

Théorème. G est 2-coloriable si et seulement si G n'a pas de cycle de longueur impaire.

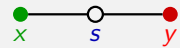
Étape 1 : si G contient un cycle de longueur impaire, alors on ne peut pas le colorier avec 2 couleurs.

Étape 2 : si G ne contient pas de tel cycle, alors il est 2-coloriable. Pour le montrer, on va construire un algorithme de 2-coloration de G .

Algorithme de 2-coloration

- ▶ On essaie de colorier en deux couleurs, ou bien de trouver un cycle de longueur impaire.
 - ▶ Quitte à travailler indépendamment sur chaque partie connexe du graphe, on peut supposer G connexe.
1. Colorier en couleur **1** un sommet arbitraire s_0
 2. tant qu'il existe un sommet s non colorié ayant au moins un voisin colorié :
 - 2.1 si la couleur de tous les voisins coloriés de s est **1**, colorier s en **2**.
 - 2.2 si la couleur de tous les voisins coloriés de s est **2**, colorier s en **1**.
 - 2.3 sinon, deux voisins de s ont une couleur différente, et on a un cycle de longueur impaire.

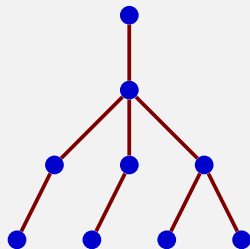
Pourquoi l'algorithme est-il correct ?

- ▶ À chaque fois qu'on colorie un sommet, on s'assure qu'il sera de couleur différente de celle de ses voisins déjà coloriés. Donc, si l'algorithme colorie tous les sommets, il produit une 2-coloration.
- ▶ Pourquoi y a-t-il un cycle de longueur impaire si l'algorithme détecte que 2 voisins x et y du sommet à colorier s sont déjà coloriés avec 2 couleurs différentes ? On a détecté :
 - (a) une chaîne C_1 de s_0 à x de sommets coloriés,
 - (b) une chaîne C_2 de s_0 à y de sommets coloriés,
 - (c) des arêtes 
- ▶ Par (a) et (b), on a une chaîne simple entre x et y , de longueur impaire car x et y ont des couleurs différentes. En fermant cette chaîne par les arêtes (c), on obtient un cycle de longueur impaire.

Arbre

Définition. *Un arbre est un graphe connexe sans cycle.*

Exemple :



Corollaire. *Tout arbre a une coloration en deux couleurs.*

Preuve. Il n'y a aucun cycle, donc pas de cycle de longueur impaire !

Colorier un graphe en 3 couleurs ?

Question : Existe-t-il un algorithme "efficace" permettant de savoir si un graphe peut être colorié en trois couleurs ? Existe-t-il un critère simple, facilement vérifiable ?

Réponse : on ne sait pas faire beaucoup mieux que de tester toutes les façons possibles de colorier en trois couleurs chacun des sommets et de vérifier que c'est une coloration. Malheureusement, ce n'est pas efficace, il y a 3^n colorations possibles pour un graphe à n sommets !

Challenge : Il est offert une prime de 1 million de \$ à qui trouvera un algorithme de complexité n^c (c constante), ou bien démontrera qu'il n'existe pas d'algorithme de complexité polynomiale.

Comment faire ?

Comment faire alors pour colorier **rapidement** un graphe avec **peu** de couleurs ?

⇒ On utilise une *heuristique*, c'est-à-dire un algorithme qui ne donne pas à coup sûr le nombre minimum de couleurs, mais qui essaie de s'en rapprocher. Cet algorithme doit être *efficace*.

Heuristique DEGMIN

Étant donné un graphe G , donne une coloration pour G

Si G a au moins un sommet, faire :

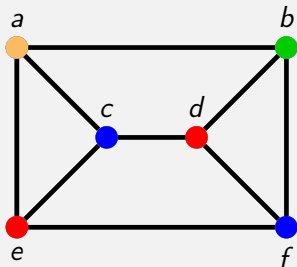
- ▶ Choisir un sommet s de degré minimum d .
- ▶ Soit G' le graphe obtenu en supprimant de G le sommet s et toutes ses arêtes incidentes.
- ▶ Colorier le graphe G' en réutilisant DEGMIN.
- ▶ Rajouter s à G' pour obtenir G .
- ▶ Colorier s avec la plus petite couleur différente de ses d voisins.

Remarque 1 Pour tout graphe, cet algorithme donne une coloration.

Remarque 2 La complexité est $O(|S(G)| + |A(G)|)$.

Heuristique DEGMIN : un exemple

Couleurs : **bleu = 1**, **rouge = 2**, **vert = 3**, **orange = 4**.



- ▶ Sur cet exemple, DEGMIN utilise 4 couleurs.
- ▶ On peut faire, mieux : il y a une 3-coloration.

Combien de couleurs sont utilisées ?

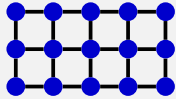
Est-ce que DEGMIN marche bien en pratique ?
Est-ce qu'il colorie avec peu de couleurs ?

On va montrer que :

- ▶ Si G est un cycle, alors trois couleurs au plus sont utilisées.
- ▶ Si G est un arbre, alors deux couleurs au plus sont utilisées.
- ▶ Si G est 2-coloriable, alors deux couleurs au plus sont utilisées.
- ▶ Si G peut être dessiné sur le plan sans que deux arêtes se croisent, alors six couleurs au plus sont utilisées.

Heuristique sur arbres et cycles

- ▶ Cycles
 - ▶ Dans un cycle, chaque sommet a un degré ≤ 2 .
 - ▶ Donc l'heuristique utilise au plus 3 couleurs.
 - ▶ C'est ce qu'on peut faire de mieux si la longueur est impaire.
- ▶ Arbres (nouvelle preuve qu'ils sont 2-coloriables)
 - ▶ Dans un arbre, il y a un sommet de degré 1 (pourquoi?).
 - ▶ Si on enlève ce sommet, on obtient à nouveau un arbre (?).
 - ▶ Donc chaque sommet enlevé par l'heuristique a un degré 1.
 - ▶ Donc l'heuristique utilise 2 couleurs au plus.
- ▶ Graphes 2-coloriables.
 - ▶ Par induction, on utilise 2 couleurs sur G' .
 - ▶ G est 2-coloriable, on réutilise une de ces couleurs pour s
- ▶ **Exercice.** Si G est une grille, DEGMIN utilise 1 ou 2 couleurs.



Une propriété importante de DEGMIN

Proposition. Si à chaque étape le sommet s choisi a un degré $\leq d$, alors DEGMIN utilisera au plus $d + 1$ couleurs pour colorier le graphe.

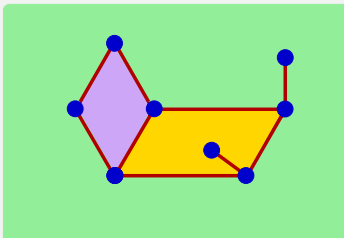
Preuve. Par induction sur le nombre de sommets : s'il y a 1 sommet, alors c'est vrai, $d = 0$. Supposons que c'est vrai pour tout graphe à n sommets, et montrons le résultat pour un graphe G à $n + 1$ sommets.

- ▶ Dans G il existe un sommet s de degré $\leq d$.
- ▶ Le graphe G' obtenu en supprimant s de G a n sommets.
- ▶ Par induction, DEGMIN l'a colorié avec au plus $d + 1$ couleurs.
- ▶ Une couleur de $\{1, \dots, d + 1\}$ est inutilisée sur les d voisins de s .
- ▶ C'est une telle couleur que choisit DEGMIN pour s , donc tous les sommets sont coloriés avec $\leq d + 1$ couleurs.

CQFD

Graphes planaires : théorème des 6 couleurs

- ▶ Un graphe est **planaire** s'il peut être dessiné sur le plan sans que deux arêtes se croisent.
- ▶ Une **face** de graphe planaire est une zone du plan délimitée par les arêtes.
- ▶ Un graphe fini a une face d'aire infinie. Les autres faces sont d'aire finie.



Euler frappe encore

Théorème. Soit G un graphe planaire connexe, n son nombre de sommets, e son nombre d'arêtes et f son nombre de faces. Alors

$$n - e + f = 2.$$

Preuve. Induction sur le nombre de sommets. Si $n = 1$, toutes les arêtes sont des boucles, chacune détermine une face en plus de la face infinie. Donc $f = e + 1$, et $n - e + f = 2$.

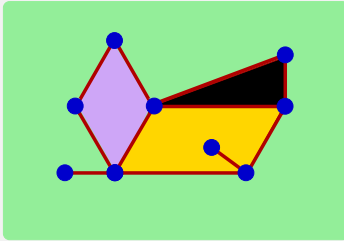
Si $n \geq 2$, comme G est connexe, il y a une arête entre deux sommets différents. On la « contracte » et on obtient un graphe G' avec $n' = n - 1$ sommets, $e' = e - 1$ arêtes et $f' = f$ faces. Par induction, $n' - e' + f' = 2$, donc $(n - 1) - (e - 1) + f = 2$, soit $n - e + f = 2$.



Longueur des faces

La longueur d'une face est la longueur de la chaîne qui la délimite.

Exemple.



La longueur de la face noire est 3 celle de la face violette est 4, celle de la face jaune est 6, celle de la face externe est 9.

(Noter que l'arête interne de la face jaune, prise « aller-retour » dans la chaîne, contribue pour 2 unités).

Densité d'arêtes des graphes planaires

Soit $\{F_1, \dots, F_f\}$ l'ensemble des f faces du graphe planaire connexe G et $\ell(F_i)$ la longueur de la face F_i .

Proposition. Si G est planaire et connexe, alors

$$\ell(F_1) + \dots + \ell(F_f) = 2 \cdot |A(G)| \quad (1)$$

Preuve. Analogue au 1er théorème sur les degrés.

Théorème des 6 couleurs

Théorème. Soit G un graphe planaire simple à au moins 3 sommets. Alors $e \leq 3n - 6$, et il existe un sommet de degré ≤ 5 .

Preuve. On peut supposer G connexe, quitte à ajouter des arêtes. Comme $n \geq 3$, et que G est simple (pas de boucle ni arête multiple) chaque face a une longueur au moins 3. Donc, par (1) :

$$2e \geq 3f.$$

Donc $3n - e = 3n - 3e + 2e \geq 3n - 3e + 3f = 3(n - e + f) = 6$
(car $n - e + f = 2$ par la formule d'Euler), donc $e \leq 3n - 6$.

Si $d(s) \geq 6$ pour tout s , on aurait $2e = \sum_{s \in S(G)} d(s) \geq 6n$, impossible.

Théorème des 6 couleurs

Théorème. Tout graphe planaire est coloriable avec 6 couleurs, sans que deux voisins n'aient la même couleur.

Preuve.

- ▶ On sait que tout graphe planaire a un sommet de degré ≤ 5 .
- ▶ On sait que si l'algorithme DEGMIN choisit toujours un sommet de degré $\leq d$, il colorie le graphe avec au plus $d + 1$ couleurs.

- ▶ Cette introduction à l'informatique a eu pour objectif d'en donner une idée fidèle, en insistant sur
 - ▶ les aspects algorithmiques, théoriques ou reliés à la recherche,
 - ▶ les applications pratiques dans le domaine de la programmation.
- ▶ Les notions de ce cours, [graphes](#), [algorithmes](#), [programmes](#), et [complexité](#) interviennent partout en informatique et au-delà, mais...
- ▶ Ce n'est qu'un avant-goût de ce que vous rencontrerez si vous choisissez des études en informatique.

Bonne continuation !