Chapitre 21. Relations (hors-programme)

Une *relation binaire* $\mathcal{R}$ sur deux ensembles X et Y est un sous-ensemble de $X \times Y$. On écrira indifféremment $(x, y) \in \mathcal{R}$, $x\mathcal{R}y$ ou $\mathcal{R}_{(x,y)}$.
On dira que $\mathcal{R}$ est une relation binaire sur un ensemble X, lorsque c'est un sous-ensemble de $X \times X$.

Une relation $\mathcal{R} \subseteq X \times X$ est *réflexive*	si	$\forall x \in X, x\mathcal{R}x$
Une relation $\mathcal{R} \subseteq X \times X$ est *irréflexive*	si	$\forall x, y \in (X \times X), x\mathcal{R}y$ **alors** $x \neq y$
Une relation $\mathcal{R} \subseteq X \times X$ est *symétrique*	si	$\forall x, y \in (X \times X), x\mathcal{R}y$ **alors** $y\mathcal{R}x$
Une relation $\mathcal{R} \subseteq X \times X$ est *antisymétrique*	si	$\forall x, y \in (X \times X), x\mathcal{R}y$ **et** $y\mathcal{R}x$ **alors** $x = y$
Une relation $\mathcal{R} \subseteq X \times X$ est *transitive*	si	$\forall x \in X, y \in X, z \in X, x\mathcal{R}y$ **et** $y\mathcal{R}z$ **alors** $x\mathcal{R}z$

Définition 21.0.1 (équivalence) Une relation d'*équivalence* est une relation binaire réflexive, symétrique et transitive. Si on a une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur un ensemble X, la *classe d'équivalence* de $x \in X$, notée $[x]_{\mathcal{R}} = \{y \in X / x\mathcal{R}y\} \subseteq X$. ◀

Définition 21.0.2 (ordre) Une relation d'*ordre* est une relation binaire réflexive, antisymétrique et transitive. On dit aussi relation d'ordre au sens large.
On associe à toute relation d'ordre, une relation d'ordre stricte qui est la restriction de la relation d'ordre aux éléments *distincts*. **Attention** il ne s'agit pas d'une relation d'ordre (au sens de la définition) puisqu'elle est *irréflexive*.
Un ordre est dit *total* si pour tout x, pour tout y on a soit $x\mathcal{R}y$ soit $y\mathcal{R}x$. Sinon, on dira que c'est un ordre *partiel*. ◀

Ainsi, pour les entiers naturels, $\leq$ est une relation d'ordre au sens large et total, la relation $<$ est l'ordre strict associé.

Exemple 21.1

1. L'égalité est une relation d'ordre dans $\mathbb{N}$
2. Dans $\mathbb{N}$, « a divise b » signifie qu'il existe un entier c tel que $b = ac$, ou encore $b \bmod a = 0$. De façon réciproque on dira que « b est un multiple de a ». Cette relation « divise » est définie sur $\mathbb{N}$, elle est réflexive, antisymétrique et transitive. C'est donc une relation d'ordre, qui est partielle. En effet, deux nombres premiers entre eux ne sont pas en relation – par exemple 3 et 8.

Notation 21.1 Lorsque l'on voudra indiquer une relation d'ordre (au sens large) sur des ensembles quelconques on utilisera les symboles $\preceq$ ou $\succeq$. Tandis que pour indiquer des relations d'ordre strictes on utilisera les symboles $\prec$ ou $\succ$

Définition 21.0.3 (ensemble ordonné) Un ensemble ordonné $(E, \preceq)$ est un ensemble E muni d'une relation d'ordre $\preceq$. ◀

Définition 21.0.4 (majorant) Soit un sous-ensemble A d'un ensemble ordonné $(E, \preceq)$. Un élément x de E est un majorant de A si $\forall a \in A, a \preceq x$.
On notera Maj(A) l'ensemble des majorants de A. ◀

Définition 21.0.5 (minorant) Soit un sous-ensemble A d'un ensemble ordonné $(E, \preceq)$. Un élément x de E est un minorant de A si $\forall a \in A, x \preceq a$.
On notera Min(A) l'ensemble des minorants de A. ◀

Exercice 21.0.1
On considère A un sous-ensemble de $(E, \preceq)$. Montrez que les ensembles Maj(A)$\cap A$ et Min(A)$\cap A$ ont, au plus un élément chacun.

Définition 21.0.6 (maximum, minimum) Soit un sous-ensemble A d'un ensemble ordonné $(E, \preceq)$. Lorsque l'ensemble Maj(A)$\cap A$ n'est pas vide, son unique élément est appelé maximum de A.
Lorsque l'ensemble Min(A)$\cap A$ n'est pas vide, son unique élément est appelé minimum de A. ◀

Définition 21.0.7 (borne supérieure, borne inférieure) La borne supérieure d'une partie A d'un ensemble ordoné est le plus petit majorant de A
La borne inférieure d'une partie A d'un ensemble ordonné est le plus grand minorant de A. ◀

Exercice 21.0.2
On considère $(\mathbb{N}, |)$ où $|$ est la relation « divise ». Justifiez que pour tout sous-ensemble A non vide de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, 1 est un minorant de A, 0 est un majorant de A.

Exercice 21.0.3
On considère $(\mathbb{N}, |)$ où $|$ est la relation « divise ». On considère A un ensemble à deux éléments non nuls $\{a, b\}$.
Justifiez que la borne inférieure de A soit le plus grand commun diviseur de a et b, et que la borne supérieure de A soit le plus petit commun multiple de a et b.

Définition 21.0.8 (ordre bien fondé) Une relation d'ordre $\preceq$ sur un ensemble E est bien fondée s'il n'y a pas de suite infinie strictement décroissante d'éléments de E ◀

Exemple 21.2 (ordre bien fondé)
- Dans $\mathbb{N}$, la relation d'ordre $\leq$ est un ordre bien fondé
- Dans $\mathbb{N}$, la relation d'ordre $|$ est un ordre bien fondé
- Dans $\mathbb{Z}$, la relation d'ordre $\leq$ n'est pas un ordre bien fondé
- Dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, la relation définie par $(a, b)\ \mathcal{R}\ (x, y)$ « $a < x$ ou $(a = x$ et $b \leq y)$ » est bien fondée (cette relation d'ordre s'appelle ordre lexicographique).
- Dans les ensembles, l'inclusion est un ordre bien fondé.

Exercice 21.0.4
Soit E un ensemble et $\preceq$ une relation d'ordre, l'énoncé suivant est-il vrai ?
$$\forall x \in E, \forall y \in E, \text{ soit on a } x \preceq y, \text{ soit on a } y \preceq x$$

Exercice 21.0.5
Dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on considère la relation binaire définie par « $(a, b) \preceq (x, y)$ si $a \leq x$ et $b \leq y$ »

1. S'agit-il d'une relation d'ordre ?
2. S'agit-il d'une relation d'ordre total ?
3. S'agit-il d'un ordre bien fondé ?

Exercice 21.0.6
Sur l'ensemble des entiers relatifs, on considère la relation binaire, $\mathcal{R}$ telle que $x\ \mathcal{R}\ y$ quand $\exists k \in \mathbb{N}, x - y = 6k$.
Quelles sont les propriétés de $\mathcal{R}$?
Si c'est une relation d'ordre, s'agit-il d'un ordre total ou partiel ?

Exercice 21.0.7
Dans les entiers relatifs, on considère la relation binaire définie par $x \mathcal{R} y$ lorsque $x \bmod 2 = y \bmod 2$.

1. Vérifiez que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence
2. Quelles sont les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$?

Exercice 21.0.8
On considère l'alphabet des 26 lettres minuscules non accentuées $\{a, b, \ldots, z\}$. On considère l'ensemble M, des mots de 3 lettres sur cet alphabet, sans s'occuper de leur existence en Français. On considère, sur M la relation binaire $\mathcal{R}_1$ définie par $x \mathcal{R}_1 y$ lorsque les mots x et y sont constitués des mêmes lettres (anagramme), la relation $\mathcal{R}_2$ définie par $x \mathcal{R}_2 y$ lorsque le mot x lu de gauche à droite est identique au mot y lu de droite à gauche (palindrome)

1. Quel est le cardinal de M ?
2. Soit $A \subseteq M$, l'ensemble des mots de M ne contenant pas la lettre x. Quel est le cardinal de A ?
3. Soit $B \subseteq M$, l'ensemble des mots de M contenant au moins une fois la lettre x. Quel est le cardinal de B ?
4. Montrez que sur M ces deux relations sont des relations d'équivalence.
5. Quelle est la taille minimale (respectivement maximale) d'une classe d'équivalence de $\mathcal{R}_1$?
6. Quelle est la taille minimale (respectivement maximale) d'une classe d'équivalence de $\mathcal{R}_2$?
7. Que pensez de l'assertion $\forall x \in M, \forall y \in M, \textbf{Si } x \mathcal{R}_2 y \textbf{ Alors } y \mathcal{R}_1 x$?

Définition 21.0.9 (treillis) Un ensemble ordonné est un treillis si toute paire d'éléments admet une borne supérieure et une borne inférieure. ◀

Lorsqu'un ensemble est un treillis on peut lui associer deux opérations binaire $\odot$ (produit) et $\oplus$ (somme) vérifiant les 4 propriétés suivantes :

1. idempotence des deux opérations
2. commutativité des deux opérations
3. associativité des deux opérations
4. absorption $x \odot (x \oplus y) = x = (y \odot x) \oplus x$

Représentations

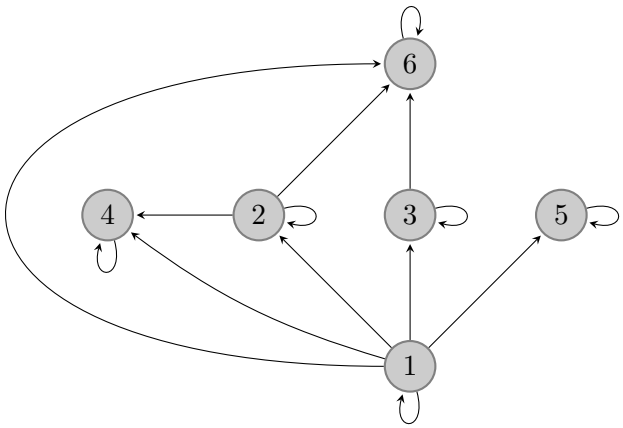
Lorsque les ensembles sont de dimension finie, il est possible de représenter une relation binaire sous la forme d'un graphe ou sous la forme d'une matrice booléenne.

Définition 21.0.10 Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire définie sur $X \times Y$ fini. Le graphe orienté associé à $\mathcal{R}$ est (V, A) où $V = X \cup Y$ et $A \subseteq X \times Y$. On mettra une flêche allant de x vers y quand $x \mathcal{R} y$.
Lorsque la relation est symétrique, on utilisera un graphe non orienté ◀

Définition 21.0.11 Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire définie sur $X \times Y$ fini. La matrice associée à $\mathcal{R}$ notée $M_{\mathcal{R}}$ aura en ligne les éléments de X, en colonne les éléments de Y et Si $x \mathcal{R} y, m_{x,y} = 1$ et 0 sinon. ◀

Exemple 21.3
Considérons les entiers de 1 à 6, et la relation « divise ». La représentation matricielle (à gauche) et la représentation graphique (à droite) sont :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



21.1 Exercices de révision et compléments

Exercice 21.1.1 (∗∗)
Soit l'ensemble des applications de $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, on définit la relation $f \mathcal{R} g$ s'il existe deux constantes *strictement positives* α et β telles que $\forall n \geq n_0, \alpha f(n) \leq g(n) \leq \beta f(n)$

1. Montrez qu'il s'agit d'une relation d'équivalence
2. Donnez des exemples d'applications f et g qui sont équivalentes mais pas égales.

Exercice 21.1.2 (∗)
On considère une relation $\mathcal{R}_A$ sur l'ensemble A et une relation $\mathcal{R}_B$ sur l'ensemble B. On construit une relation $\mathcal{R}$ sur $A \times B$, telle que $(a, b) \mathcal{R} (u, v)$ quand on a, à la fois, $a \mathcal{R}_A u$ et $b \mathcal{R}_B v$. Établir la véracité des énoncés suivants

1. Si $\mathcal{R}_A$ et $\mathcal{R}_B$ sont des relations d'équivalence alors $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence
2. Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence alors $\mathcal{R}_A$ et $\mathcal{R}_B$ sont des relations d'équivalence