

# Chapitre 20. Lois de composition interne (hors-programme)

Une loi de composition interne – ou simplement loi – est une application qui à deux éléments d'un ensemble  $E$  associe un élément de  $E$ , l'addition et la multiplication dans les entiers sont des lois. On utilise souvent la notation *infixe* c'est à dire que l'on écrit l'opérateur entre les deux opérands  $x + y$ .

On considère dans ce qui suit deux opérateurs binaires  $\odot, \otimes$  définis sur un ensemble  $E$ .

1.  $\odot$  admet un élément *neutre*  $e \in E$ , si :  $\forall x \in E, x \odot e = x$
2.  $\odot$  admet un élément *absorbant*  $a \in E$ , si :  $\forall x \in E, x \odot a = a$
3.  $\odot$  est *commutatif* si :  $\forall x \in E, \forall y \in E, x \odot y = y \odot x$
4.  $\odot$  est *associatif* si :  $\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E, x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$
5.  $\odot$  est *idempotent* si :  $\forall x \in E, x \odot x = x$
6.  $\otimes$  est distributif par rapport à  $\odot$  si :  $\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E, x \otimes (y \odot z) = (x \otimes y) \odot (x \otimes z)$

Pour un ensemble  $E$ , l'union et l'intersection sont des lois de composition interne de  $\mathcal{P}(E)$ , elles sont commutatives, associatives, idempotentes, distributives l'une par rapport à l'autre.  $\emptyset$  est élément neutre pour l'union,  $E$  est élément neutre pour l'intersection.  $\emptyset$  est élément absorbant pour l'intersection,  $E$  est élément absorbant pour l'union.

## Exercice 20.0.1

On considère l'ensemble  $\mathcal{B} = \{0, 1\}$ , 3 opérations notées  $+, \cdot, \bar{\phantom{x}}$  et les parenthèses, dont le fonctionnement est décrit ci-dessous

1.  $\forall x \in \mathcal{B}, \bar{\bar{x}} = x$
2.  $\forall x \in \mathcal{B}, \forall y \in \mathcal{B}, (x + y) = \max(x, y)$
3.  $\forall x \in \mathcal{B}, \forall y \in \mathcal{B}, (x \cdot y) = \min(x, y)$

On définit, de manière inductive les expressions valides sur  $\mathcal{B}$

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{est valide} \\ 1 & \text{est valide} \\ \text{Si } f \text{ est valide} & \text{alors } \bar{f} \text{ est valide} \\ \text{Si } f \text{ et } g \text{ sont valides} & \text{alors } (f + g) \text{ est valide} \\ \text{Si } f \text{ et } g \text{ sont valides} & \text{alors } (f \cdot g) \text{ est valide} \end{array} \right.$$

1. Les 3 opérations sont-elles des lois internes de  $\mathcal{B}$ ?
2. Les opérations  $+$  et  $\cdot$  admettent-elles un élément neutre? Est-ce le même?
3. Les opérations  $+$  et  $\cdot$  admettent-elles un élément absorbant? Est-ce le même?

4.  $\mathcal{B}$  est-il un treillis - si oui, quelle est la relation d'ordre  $\preceq$  ?
5. Simplifiez l'expression  $(\bar{x} + (x + y))$
6. Simplifiez l'expression  $(\bar{x} \cdot (x \cdot y))$
7. Simplifiez l'expression  $(x \cdot (x + y))$
8. Simplifiez l'expression  $(x + (x \cdot y))$
9. Si on ne savait pas que les opérations  $\min, \max$  ont les « bonnes propriétés », combien y aurait-il de cas à examiner pour établir chacune des propriétés 3 à 5 ?
10. Est-ce que «  $\cdot$  » est distributif par rapport à «  $+$  » ?
11. Est-ce que «  $+$  » est distributif par rapport à «  $\cdot$  » ?