

Chapitre 18. Fonctions (hors-programme)

- Une **application** f d'un ensemble E vers un ensemble F est un procédé qui associe à *chaque* élément $x \in E$, un *unique* élément $f(x) \in F$.
- Une **fonction** f d'un ensemble E dans un ensemble F est un procédé qui associe à *chaque* élément $x \in E$ *au plus un* élément $f(x) \in F$. La fonction sera notée $f : E \rightarrow F$.
- Lorsqu'une fonction est une application on dira que c'est une fonction *totale*.
- Soit $f : E \rightarrow F$, E est appelé le **domaine** de f et F son **co-domaine**.
- On notera $g : E \dashrightarrow F$ une fonction **partielle** g de E vers F . Dire que g est une fonction partielle signifie qu'il existe $x \in E$ pour lequel $g(x)$ n'est pas défini, on écrira $g(x) = \perp$. On pourra passer d'une fonction partielle à une fonction totale soit en restreignant le domaine de g , soit en étendant le co-domaine de g , on notera $\text{ext}(g)$ et $\text{rest}(g)$ les extensions et restrictions correspondantes.
Ainsi $\text{ext}(g) : E \rightarrow F \cup \{\perp_F\}$ et $\text{rest}(g) : E \setminus \{x \in E / g(x) = \perp_F\} \rightarrow F$.

- La notation :

$$\begin{array}{lcl} f : & E & \rightarrow F \\ & x & \mapsto y \end{array}$$

désignera l'image de x par f , i.e. $f(x) = y$.

- Une application $f : E \rightarrow F$ est :
 - injective* : $\forall x, y \in E, \text{Si } f(x) = f(y) \text{ alors } x = y$
 - surjective* : $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$
 - bijective* : lorsqu'elle est *injective* **et** *surjective*

Dit autrement, une application de E dans F est injective, si elle ne prend jamais deux fois la même valeur dans F . Une application de E dans F est surjective si elle prend toutes les valeurs possibles de F .

- On appelle fonction *caractéristique* d'une partie A de E la fonction $\chi_A : E \rightarrow \{0, 1\}$ définie par :

$$\chi_A(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } e \in A \\ 0 & \text{si } e \notin A \end{cases}$$

Exercice 18.0.1

Soit E un ensemble fini, montrez que

$$\forall A \subseteq E, \sum_{e \in E} \chi_A(e) = |A|$$

Exercice 18.0.2

Soit A les entiers de 0 à 99, soit B les entiers de 0 à 9.

1. L'opération « quotient de la division entière par 10 » est-elle une application de A dans B ?

- a) Est-elle injective ?
 - b) Est-elle surjective ?
 - c) Est-elle bijective ?
2. L'opération « multiplier par 10 puis ajouter 9 » est-elle une fonction totale ou partielle de A dans B ?
 3. L'opération « multiplier par 10 puis ajouter 9 » est-elle une fonction totale ou partielle de B dans A ?
 4. Même question si l'on s'intéresse à A dans A
 5. Même question si l'on s'intéresse à B dans B

Exercice 18.0.3

On considère A, B deux ensembles finis quelconques et $f : A \rightarrow B$ une application

1. Trouvez un exemple telle que f soit injective et non surjective
2. Trouvez un exemple telle que f soit surjective et non injective
3. Trouvez un exemple telle que f soit bijective