

# Chapitre 17. Ensembles (hors-programme)

Un **ensemble** est une collection d'objets **différents**, un élément d'un ensemble c'est simplement un objet de la collection, la collection est notée en utilisant les accolades  $\{$  et  $\}$  et en séparant les objets par une virgule – d'autres notations sont possibles pour les nombres consécutifs (intervalles).

Un ensemble peut être fini, dans ce cas il est souvent décrit en **extension** c'est-à-dire en énumérant explicitement toutes les valeurs, par exemple l'ensemble des voyelles est  $\{a, e, i, o, u, y\}$ , s'il est infini ou très grand, il sera décrit en **compréhension** ou **intension**, par exemple l'ensemble des entiers pairs sera décrit par la propriété commune des éléments par exemple « les entiers tels que le chiffre décimal le plus à droite appartient à  $\{0, 2, 4, 6, 8\}$  » ou encore « les entiers tels que le reste de la division par 2 est 0 » ou, plus formellement<sup>1</sup>  $\{x \in \mathbb{N} / x \bmod 2 = 0\}$ . La propriété utilisée est « le reste de la division de  $x$  par 2 est nul », cette propriété ou **prédicat** dépend de  $x$ . D'une manière plus générale, un ensemble défini en compréhension s'écrira  $\{x \in E / P(x)\}$  et qui se lit « l'ensemble des éléments de  $E$  qui vérifient la propriété **P** »

Une autre manière de procéder, très fréquente en informatique, est une définition **inductive**. Il s'agit en fait d'une définition *constructive*, pour laquelle on fournit explicitement certains éléments et un procédé permettant de construire de nouveaux éléments. **Attention** dans une définition inductive, on vise à définir le *plus petit ensemble* qui corresponde à la définition (voir exercice 17.0.2).

## Exemple 17.1

Voici une définition inductive des entiers naturels  $\mathbb{N}$ . On donne explicitement un élément 0, puis un mécanisme de construction pour les autres éléments

$$\begin{cases} 0 & \in \mathbb{N} \\ \forall n \in \mathbb{N} & (n+1) \in \mathbb{N} \end{cases}$$

†

Soient  $X$  et  $Y$  deux ensembles. Si tous les éléments de  $X$  sont présents dans l'ensemble  $Y$ , on dit que  $X$  est un *sous-ensemble* de  $Y$ , on note  $X \subseteq Y$ . On dira que  $X$  est un *sous-ensemble propre* de  $Y$  si  $X \subseteq Y$ , et  $X \neq Y$ , on notera  $X \subset Y$ . **Attention**, les anglo-saxons utilisent  $\subset$  pour indiquer un sous-ensemble non forcément propre.

- $\emptyset$ , parfois noté  $\{ \}$ , est l'ensemble vide, il ne possède **aucun** élément.
- L'appartenance d'un élément  $x$  à un ensemble  $X$  est notée  $x \in X$ . La non-appartenance de  $x$  à l'ensemble  $X$  est notée  $x \notin X$ .
- $X \times Y$  est le *produit cartésien* de  $X$  et  $Y$ . Ce sont les couples de la forme  $(x, y)$  pour lesquels  $x \in X, y \in Y$ .
- $|X|$ , parfois noté  $\#(X)$ , le *cardinal* de l'ensemble  $X$ , c'est le nombre d'éléments qu'il contient. Le cardinal de l'ensemble vide est 0,  $|\emptyset| = 0$ .
- $X \cap Y = \{x \in X \text{ et } x \in Y\}$  est l'*intersection* de  $X$  et  $Y$  – ce sont les éléments communs à  $X$  et  $Y$

---

1. synonyme de *écriture mathématique*.

- $X \cup Y = \{x \in X \text{ ou } x \in Y\}$  est l'*union* de  $X$  et  $Y$  – ce sont tous les éléments de  $X$  et  $Y$ .
- Différence :  $X \setminus Y = \{x \in X \text{ et } x \notin Y\}$ ; On pourra aussi écrire  $X - Y$  – ce sont les éléments de  $X$  qui ne sont pas dans  $Y$ .
- Différence symétrique :

$$X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$$

Ce sont les éléments qui sont dans  $X$  ou dans  $Y$  mais pas dans les deux à la fois.

- Souvent, les ensembles que l'on considère sont des sous-ensembles d'un ensemble plus grand que l'on appelle *univers* et que l'on note  $U$  ou  $\Omega$ . Étant donné un univers, on définit le *complémentaire* (sous-entendu dans l'univers) d'un ensemble  $X$ , que l'on note  $\overline{X}$  ou encore  $X^c$ .

$$\overline{X} = \{x \in U \mid x \notin X\} = U \setminus X$$

- Deux ensembles sont *disjoints* si leur intersection est vide.
- Une collection  $S = \{S_i\}$  d'ensembles non vides forme une *partition* de  $S$  si :

1. Les  $S_i$  sont deux à deux disjoints

$$2. S = \bigcup_{S_i \in S} S_i$$

En d'autres termes, il existe un unique  $i$  associé à chaque élément de  $S$ .

- Soit  $E$  un ensemble, on note  $\mathcal{P}(E)$  ou encore  $2^E$  l'ensemble des sous-ensembles de  $E$ .

### Exercice 17.0.1

Soit  $V$  l'ensemble des voyelles, et  $A$  l'ensemble  $\{a, b, c, d, e, f\}$ .

1. Quel est le cardinal des ensembles  $V$  et  $A$ ?
2. Quel est le cardinal de  $V \cap A$ ,  $V \cup A$ ,  $V \setminus A$ ,  $A \setminus V$ ?
3. Quel est le cardinal de  $A \Delta V$ ? De  $V \Delta A$ ?
4. Quel est le cardinal de  $V \times A$ , de  $A \times V$ ?
5. Quels sont les éléments de  $(V \times A) \cap (A \times V)$ ?
6. Quels sont les éléments de  $(V \cap A) \times (A \cap V)$ ?
7. Quel est le cardinal de  $2^V \cap 2^A$ ?
8. Donnez une partition de  $V$ , telle que les ensembles qui la compose soient de cardinalité 2.
9. Donnez une partition de  $A$  en 3 sous-ensembles, ayant respectivement pour cardinalité 1, 2 et 3.

### Exercice 17.0.2

On considère la définition inductive du sous-ensemble  $A$  de  $\mathbb{N}$

$$\begin{cases} 0 \in A \\ \text{Si } x \in A \text{ alors } 2 + x \in A \end{cases}$$

1. Montrez que  $\mathbb{N}$  satisfait cette définition

2. Montrez que  $\mathbb{N} \setminus \{1\}$  satisfait cette définition
3. Montrez que  $\mathbb{N} \setminus \{1, 3\}$  satisfait cette définition
4. Montrez que  $\mathbb{N} \setminus \{3\}$  ne satisfait pas cette définition
5. Montrez que  $\mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3\}$  ne satisfait pas cette définition
6. Quel est le sous-ensemble de  $\mathbb{N}$  qui est défini inductivement ?

**Définition 17.0.1 (Maximal, Maximum)** Un sous-ensemble  $A$  d'un ensemble  $E$  est dit **maximal** pour une propriété  $\mathbf{P}$ , si  $\forall x \in E \setminus A, A \cup \{x\}$  n'a pas la propriété  $\mathbf{P}$ .

Un sous-ensemble  $A$  d'un ensemble  $E$  est dit **maximum** pour une propriété  $\mathbf{P}$ , si  $\forall B \subseteq E$  tel que  $\mathbf{P}(B) \mid B \mid \leq \mid A \mid$ . ◀

**Définition 17.0.2 (Minimal, Minimum)** Un sous-ensemble  $A$  d'un ensemble  $E$  est dit **minimal** pour une propriété  $\mathbf{P}$ , si  $\forall x \in A, A \setminus \{x\}$  n'a pas la propriété  $\mathbf{P}$ .

Un sous-ensemble  $A$  d'un ensemble  $E$  est dit **minimum** pour une propriété  $\mathbf{P}$ , si  $\forall B \subseteq E$  tel que  $\mathbf{P}(B) \mid B \mid \geq \mid A \mid$ . ◀

## 17.1 Exercices de révision et compléments

La notation des exercices « \* » signifie qu'il s'agit d'une application directe des définitions, « \*\* » désigne les exercices que vous devez savoir résoudre, « \*\*\* » se rapporte à des exercices plus délicats à résoudre.

### Exercice 17.1.1 (\*)

Soit  $E$  l'ensemble des lettres de l'alphabet, et soient  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de  $E$ . Montrer que :

1.  $A \cap B$  est un sous-ensemble de  $E$  ;
2.  $A \cup B$  est un sous-ensemble de  $E$  ;
3.  $A \cap B$  est un sous-ensemble de  $A$  ;
4.  $A \cap B$  est un sous-ensemble de  $B$  ;
5.  $A$  est un sous-ensemble de  $A \cup B$  ;
6.  $B$  est un sous-ensemble de  $A \cup B$ .

### Exercice 17.1.2 (\*)

Soit  $E$  un ensemble fini, et soient  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de  $E$

1. Montrer que  $\mid A \mid \leq \mid E \mid$  ;
2. Montrer que  $\mid A \cup B \mid \leq \mid A \mid + \mid B \mid$  ;
3. Montrer que  $\mid A \cap B \mid \leq \max(\mid A \mid, \mid B \mid)$ .

### Exercice 17.1.3 (\*)

Soit  $E$  un ensemble fini, et soient  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de  $E$

1. Montrer que si  $A \subseteq B$  et  $B \subseteq A$ , alors  $A = B$  ;

2. Montrer que si  $A \subseteq B$  alors  $A \cap B = A$  ;

3. Montrer que si  $A \subseteq B$  alors  $A \cup B = B$ .

**Exercice 17.1.4 (\*\*)**

Soit  $\Omega$  l'univers du discours. Pour chacun des énoncés, donnez une preuve ou un contre-exemple.

1.  $\forall A \subseteq \Omega, \forall B \subseteq \Omega, (A \setminus B) = (B \setminus A)$  ;

2.  $\forall A \subseteq \Omega, \forall B \subseteq \Omega, (A \setminus B) \subseteq A$  ;

3.  $\forall A \subseteq \Omega, (\Omega \setminus A) = \overline{A}$

4.  $\forall A \subseteq \Omega, \forall B \subseteq \Omega, (A \Delta B) \subseteq (A \cup B)$  ;

5.  $\forall A \subseteq \Omega, \forall B \subseteq \Omega, |A \cup B| \leq |A| + |B|$  ;

6.  $\forall A \subseteq \Omega, \forall B \subseteq \Omega, |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$  ;

7.  $\forall A \subseteq \Omega, \forall B \subseteq \Omega, |A \Delta B| + |A \cap B| = |A \cup B|$  .

**Exercice 17.1.5 (\*\*)**

Soit  $A$  un ensemble, montrer que le cardinal de l'ensemble des sous-ensembles de  $A$  est  $2^{|A|}$ .