

Optimisation et modélisation du graphe des systèmes autonomes d'Internet (AS graph)

José Ignacio Alvarez-Hamelin[†] et Nicolas Schabanel[‡]

Nous proposons dans cet article un nouveau modèle pour le graphe des systèmes autonomes d'Internet, basé sur le concept d'optimisation multi-critères gloutonne coût/efficacité introduit à l'origine par Fabrikant, Koutsoupias et Papadimitriou [4] pour construire un arbre aléatoire. Nous proposons ici une généralisation de cette approche engendrant un graphe général candidat à représenter Internet. Nous y présentons les résultats de simulations et une analyse des mesures prises sur notre modèle par rapport à celles du graphe physique réel d'Internet.

Mots-clé: Topologie d'Internet, modèles, graphes aléatoires, algorithmique.

1 Introduction

1.1 Motivations

La parution de l'article des frères Faloutsos [5] en 1999 fut à l'origine d'un réel bouleversement pour la communauté informatique : la topologie d'Internet n'est pas telle qu'on le croyait. De nombreuses mesures, comme la distribution des degrés des sommets et bien d'autre, ne vérifient pas les lois standards des graphes aléatoires classiques (typiquement des Gaussiennes). Les modèles utilisés jusqu'alors pour les simulations, les prédictions, et les preuves mathématiques ne correspondent donc pas au "vrais réseaux". Au centre de ces préoccupations, les lois de puissance, "sans échelle"[§], c'est-à-dire une loi qui ne soit pas centrée autour d'une valeur précise mais pour laquelle les très grandes valeurs sont raisonnablement probables. La distribution de degrés des systèmes autonomes[¶] d'Internet vérifie la loi de puissance suivante : le nombre d'AS connectés à plus de d autres AS est proportionnel à $d^{1-\beta}$ avec $\beta \approx 2.1$. Fait remarquable : cette loi est stable depuis plusieurs années. Depuis cette découverte, de nombreux groupes de recherche tentent d'expliquer ce fait en proposant de bonnes alternatives aux modèles classiques (par exemple, celui de Waxman [10]) afin de permettre des prévisions et des simulations fiables pour les réseaux, mais aussi de construire un cadre théorique pour des résultats formelles.

1.2 Travaux antérieurs

Différents modèles se proposent de reproduire le plus fidèlement possible les lois de puissance mesurées régulièrement sur Internet : par exemple, BRITE [9], iNET [6],... Ces modèles sont actuellement les plus sophistiqués et suivent des distributions raisonnablement en adéquation avec les mesures réalisées sur Internet (pour peu qu'on arrive à compiler leurs sources). Ils n'offrent

[†]LRI, Université Paris Sud, Bât. 490, 91405 Orsay CEDEX, France, <http://www.lri.fr/~ihameli>.

[‡]CNRS, LIP, ÉNS Lyon, 46 allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07, France, <http://www.ens-lyon.fr/~nshaban>.

[§] Les physiciens qualifient ces lois de « sans échelle » car la valeur typique n'est pas la valeur moyenne et car les moments divergent à partir d'un certain ordre, d'où l'absence de "point de repère".

[¶] Il existe essentiellement deux niveaux d'étude pour le graphe d'Internet : le graphe des routeurs (env. 700 000 sommets) et le graphe des systèmes autonomes (env. 12000 nœuds). Un système autonome, abrégé AS, est une entité indépendante (au minimum un réseau local). Le graphe des AS semble le plus pertinent car il s'agit d'un niveau hiérarchique bien défini et que c'est le long des arêtes de ce graphe que les paquets sont routés globalement.

cependant pas de réelles explications du phénomènes, et ne permettent en aucun cas de construire un cadre théorique suffisamment simple.

Le premier modèle conduisant à des lois de puissance sur les degrés fut celui de Albert et Barabasi [1]. Ce modèle incrémental est dit à préférence linéaire : les sommets sont insérés un à un, et tout nouveau sommet est relié à un nombre fixé des sommets précédents, choisis aléatoirement proportionnellement à leur degré courant. [1] démontre que les degrés suivent une loi en d^{-2} . Une explication plus convaincante pour l'apparition de lois de puissance fut proposée par Kumar et al [8] pour le graphe du Web cette fois-ci. Leur modèle est également incrémental ; chaque nouveau noeud 1) est relié à un nombre fixé de nœuds choisis uniformément, puis 2) recopie partiellement les liens d'un nombre fixé d'autres nœuds choisis uniformément. Ce modèle conduit également à une loi de puissance sur les degrés. Plus intéressant encore, s'inspirant de [2], Fabrikant, Koutsoupias et Papadimitriou [4] proposent un modèle incrémental construisant un arbre : chaque nouveau nœud est relié au nœud qui réalise le meilleur compromis entre coût/efficacité du lien. Les auteurs de cet article se risquent à conjecturer que les lois de puissance, qualifié par de nombreux analystes de « signature de l'activité humaine », pourraient bien être le fruit d'un processus d'optimisation multi-critères gloutonne. Cette question mérite à elle seule d'être étudiée en détails.

1.3 Contribution

Nous nous proposons dans cet article d'étudier dans quelle mesure le schéma d'optimisation multi-critères gloutonne suggéré par [4] peut s'appliquer effectivement à Internet. Le premier challenge à relever est d'obtenir un modèle plus conforme à la dynamique observée d'Internet, détaillée dans [3], tout en restant simple. Le second est d'obtenir un modèle qui soit techniquement réalisable, c'est-à-dire dont le temps de calcul ne soit pas prohibitif. Notre nouveau modèle généralise le modèle de [4] en obtenant un graphe général de dynamique comparable à celle d'Internet observée dans [3]. Nous confrontons notre modèle aux mesures faites sur la topologie d'Internet sur la bases de campagnes de simulations et proposons une analyse des paramètres de notre modèles permettant d'adhérer au mieux à ces objectifs. L'adéquation des mesures sur notre modèle avec Internet valide l'approche de [4], qui présente l'avantage de proposer une nouvelle explication plausible pour l'apparition de lois de puissance pour Internet. Cette étude se termine par des suggestions d'améliorations possibles de notre modèle, en particulier la prise en compte de la capacité des liens, qui correspond à un réel besoin de la part de la communauté réseau.

2 Description du modèle

Nous proposons ici une généralisation du modèle FKP introduit par Fabrikant, Koutsoupias et Papadimitriou [4] dont nous commençons par rappeler brièvement le principe.

2.1 Le modèle FKP

En s'inspirant des travaux de Carlson et Doyle sur les relations entre optimisation et lois de puissance [2], les auteurs de [4] proposent de construire un arbre aléatoire de la façon suivante. Les sommets forment une suite de points (x_i) tirés uniformément dans le carré $[0, 1]^2$. Le premier point x_0 est la racine de l'arbre, et chaque nouveau point x_i est relié au point $x_j, j < i$, de l'arbre qui minimise :

$$d(x_i, x_j) + \theta \cdot h(x_j, x_0) \tag{1}$$

où θ est le paramètre du modèle, et où $d(x_i, x_j)$ et $h(x_j, x_0)$ désignent respectivement la distance Euclidienne de x_i à x_j , c'est-à-dire la longueur de l'arête $x_i x_j$ dans le plan, et la distance de x_j à x_0 dans l'arbre, c'est-à-dire le "coût de fonctionnement". Le choix du point d'attache x_j est donc guidé par l'optimisation gloutonne d'un compromis entre deux coûts contradictoires : le coût de construction de l'arête, et le coût d'utilisation du réseau ainsi construit. Les auteurs démontrent que ce modèle présente un phénomène de transition de phases assez fascinant sur la distribution de degrés des sommets du graphe restreint à ses n premiers sommets : les valeurs extrêmes de

θ ($\theta > 1/\sqrt{2}$ ou $\theta = o(1/\sqrt{n})$) induisent des lois exponentielles alors qu'un compromis équilibré des coûts ($\theta \in [1/4; \omega(1/\sqrt{n})]$) induit des lois de puissance. Les auteurs se risquent à conjecturer que les lois de puissance observées dans les "structures humaines" pourraient être le fruit des optimisations dans leur processus de construction. Kenyon et Schabanel [7] ont démontré que cette transition de phase a également lieu lorsqu'on choisit de tirer deux arêtes, au lieu d'une, pour chaque insertion d'un nouveau sommet (vers les deux sommets x_j et $x_{j'}$ qui minimisent (1); nous appellerons ce modèle KS).

2.2 Notre modèle

Les modèles FKP, qui produit un arbre, ou bien KS, qui produit un graphe où aucun sommet n'a degré 1, ne sont pas des modèles crédibles d'Internet. Nous reprenons l'approche FKP pour proposer un nouveau modèle plus conforme à la dynamique réelle d'Internet. Les auteurs de [3] donnent les informations suivantes sur la dynamique du graphe des systèmes autonomes (AS) sur Internet entre 1998 et 2000 :

Fait n°1 : Les nouveaux sommets ont en majorité degré 1 (87%) ou 2 (12%) lors de leur création.

Fait n°2 : Environ 50% des liens naissent indépendamment des insertions de nouveaux sommets.

Fait n°3 : Un sommet (resp. un lien) est éliminé pour 3 sommets (resp. 2 liens) créés respectivement (d'où une croissance exponentielle). Et surtout il existe une *très forte corrélation* entre les créations de nouveaux AS (resp. liens) et les disparitions d'AS (resp. liens).

La corrélation relevée dans le fait n°3 nous conduit à penser que la plupart des disparition de liens ou de sommets correspond à des mises à jour technologiques. Nous proposons donc de négliger la disparition des liens ou des sommets dans notre modèle. À notre connaissance, aucun des modèles proposés pour Internet n'intègre la disparition de nœuds ou de liens actuellement.

Notre modèle. Notre modèle se base sur les faits n°1 et n°2 pour construire notre graphe. Ce modèle admet dans toute sa généralité cinq paramètres ($\theta, \gamma, k, q, \tau$) que nous détaillerons par la suite. Les nœuds forment une suite de points (x_i) tirés aléatoirement sur le plan suivant une loi donnée; nous en verrons deux dans cet article : la loi uniforme sur le carré $[0, 1]^2$ et la loi induite par la répartition de la population américaine sur le sol des USA suivant le recensement de 1990. Au départ, le point x_0 est placé sur le plan et est désigné comme origine. L'origine du graphe, qu'on notera ω , est déplacée régulièrement dans notre modèle pour remédier à la centralisation du modèle FKP. L'insertion du sommet $x_i, i \geq 1$, se fait en trois étapes :

1. Le nouveau sommet x_i est relié aux k sommets x_{j_1}, \dots, x_{j_k} qui minimisent :

$$d(x_i, x_j) + \theta \cdot h(x_i, \omega) \quad (2)$$

2. q nouvelles arêtes e_1, \dots, e_q sont ajoutées successivement. Si on note G , le graphe avant l'insertion de l'arête e_j , e_j est l'arête qui minimise la quantité suivante :

$$\ell(e_j) + \frac{\gamma}{i} \sum_{u=0}^i (h_{G \cup e_j}(x_u, \omega) - h_G(x_u, \omega)) \quad (3)$$

où $\ell(e_j)$ désigne la longueur Euclidienne de l'arête dans le plan et où $h_G(x_u, \omega)$ et $h_{G \cup e_j}(x_u, \omega)$ dénotent respectivement les distances du nœud x_u à l'origine courante ω dans les graphes G et $G \cup e_j$ respectivement. La quantité pondérée par γ dans (3) est donc la réduction moyenne de la distance à l'origine courante ω , pour les sommets actuels du graphe.

3. Toutes les τ insertions de sommets, choisir pour nouvelle origine, un sommet x_u aléatoirement avec une probabilité proportionnelle au degré du sommet : $\omega := x_u$.

Remarquons que pour $k = 1$ (resp. $k = 2$), $q = 0$ et $\tau = \infty$ nous retrouvons le modèle FKP (resp. KS).

Choix des valeurs de k, q, τ pour modéliser le graphe des AS. L'étape n°1 correspond à l'insertion des nouveaux sommets. Nous avons vu au fait n°1 que les nouveaux avaient en majorité degré 1, nous choisissons donc $k = 1$ dans nos simulations (nous pourrions également faire de k une variable aléatoire). L'étape n°2 correspond à l'insertion d'arêtes indépendamment des insertions des nouveaux sommets, nous choisissons donc $q = 1$, pour se conformer au fait n°2 affirmant que celles-ci correspondent à la moitié des arêtes. Enfin, afin d'assurer la meilleure isotropie possible pour le modèle, nous fixons $\tau = 1$: l'origine est déplacée à la fin de chaque étape. *Les paramètres de notre modèle sont donc maintenant θ et γ .*

Implémentation. L'efficacité du calcul de notre modèle est une préoccupation centrale. Le choix de déplacer aléatoirement l'origine permet de gagner un ordre de grandeur en n pour le temps de calcul : ceci maintient l'isotropie du modèle sans avoir à minimiser la distance des nouveaux sommets à tous les autres. L'étape difficile est l'étape n°2, dont la complexité est en $O(n^3)$ dans le pire cas ; notre implémentation est actuellement en temps $O(n^4)$, ce qui rend problématique la génération de graphes de grande taille (> 2000 sommets) : la génération d'un graphe de 1000 sommets prend environ 1h actuellement (1500 sommets environ 3h). Nous pensons pouvoir améliorer considérablement les performances de notre implémentation en utilisant la géométrie du graphe, mais préférons tout d'abord valider ce choix de modèle avant d'optimiser le code du générateur.

3 Validation du modèle

Pour valider notre modèle, nous avons comparé les mesures les plus utilisées pour Internet sur une campagne de simulations.

3.1 Choix des valeurs des paramètres θ et γ

Étudions tout d'abord l'influence des paramètres θ et γ de notre modèle. Ces paramètres ont une influence déterminante sur la loi de puissance vérifiée par les degrés :

$$\Pr\{\text{degré} \geq d\} \approx Cte \cdot d^{1-\beta} \quad (4)$$

Influence de γ . Les mesures réalisées indiquent qu'il faut choisir $\theta = \gamma$: lorsque $\gamma < \theta$, les graphes obtenus sont indépendants de la valeur effective de γ ; et si $\gamma > \theta$, les lois obtenus pour les différentes mesures ne sont pas satisfaisantes. Nous fixons donc à présent $\gamma = \theta$.

Influence de θ . L'exposant β de la loi de puissance observée sur les degrés (cf. [5]) apparaît être une fonction décroissante de θ . Nos simulations indiquent que $\theta \approx 0.03 \pm 50\%$ donnent les meilleurs résultats pour β . Nous proposons dans la suite deux valeurs d'étude pour θ , 0.03 et 0.001.

3.2 Mesures standards

Nous avons pris sur notre modèle, les mesures suivantes, standards dans la littérature :

- le degré moyen, \overline{deg} ($4 - \epsilon$ trivialement pour notre modèle).
- la connectivité locale (ou clustering coefficient), \overline{Clust} : la probabilité moyenne qu'il existe un lien entre deux voisins d'un même nœud.
- l'excentricité minimum et moyenne des nœuds, ex_m et \overline{ex} resp.
- Le diamètre du graphe, D .
- La distance moyenne entre deux nœuds du graphe, $\overline{d_h(\cdot, \cdot)}$.
- L'exposant β de la loi de puissance approchée : $\Pr\{\text{degré} \geq d\} \sim d^{1-\beta}$. Nous calculons également l'exposant β' de la loi obtenue en omettant les sommets de degré 1 : $\Pr\{\text{degré} \geq d \mid d \geq 2\} \sim d^{1-\beta'}$.
- Le coefficient de corrélation ACC de la loi $f(d) = \Pr\{\text{degré} \geq d\}$ avec la loi de puissance $y(d) = \alpha \cdot d^{1-\beta}$ la plus proche. ($|ACC| \in [0, 1]$; $|ACC| = 1$ correspond à une adéquation parfaite, alors que $|ACC| = 0$ correspond à une décorrélation totale.)

Le tableau 1 présente le résultat statistique de ces mesures sur 100 graphes aléatoires selon notre modèle, de 1000 sommets, pour chaque valeur des paramètres $\theta = \gamma \in \{0.005, 0.01, 0.05, 0.1\}$. La figure 3 illustre la loi de puissance sur les degrés sur un graphe engendré par notre modèle. Le tableau 2 confronte les valeurs de ces mesures à celles des graphes des AS d'une part et des routeurs internet (IR) d'autre part. Nous constatons que lorsque le nombre de sommets n augmente, pour les choix des paramètres $k = q = 1$, et $\theta = \gamma = 0.03$ ou 0.001 , ces valeurs convergent assez rapidement vers les valeurs attendues pour le graphe des AS, en particulier en ce qui concerne l'exposant de la loi sur les degrés (avec un assez bon coefficient de corrélation) et la connectivité locale. Quelques remarques sur des points particuliers : les graphes que nous générons ont pour l'instant trop peu de sommets pour pouvoir les comparer de façon fiable au graphe des IR (qui en compte plus de 700 000 actuellement). Ceci est dommage car étant donné le placement géométrique des sommets dans notre modèle, ces sommets seraient plus logiquement appelés à être des routeurs que des AS, non-localisés dans plus de 10% des cas. Les simulations sur des graphes de cette taille sont pour l'instant hors de portée de l'implémentation actuelle de notre modèle. Remarquons de plus que le graphe des IR est actuellement assez mal connu : en particulier, l'existence d'une loi de puissance pour la distribution des degrés dans ce graphe prête à controverse (il y a un décrochage net à partir d'un certain rang).

Le tableau 3 présente également les mesures sur les graphes générés par les modèles FKP ($k = 1$, le graphe est un arbre) et KS ($k = 2$, tous les sommets ont degré ≥ 2) proposés dans [4]. Ces deux modèles ne peuvent en aucun cas prétendre à modéliser Internet mais on constate que conformément à [4] l'exposant β tend bien vers la bonne valeur du graphe des AS pour le modèle FKP.

Simulation sur la population des États-Unis d'Amérique. Notre modèle présente l'avantage d'avoir un support géométrique. Nous avons ainsi pu tester notre modèle sur la population américaine : les points sont tirés au hasard sur le sol des USA conformément à la distribution de la population (source : recensement de 1990). On constate, figure 1 et tableau 4 que les mesures sont assez semblables à ceux obtenus avec le tirage uniforme dans le carré $[0, 1]^2$ pour le même nombre de sommets.

4 Conclusion et Perspectives

Dans cet article, nous pensons avoir démontré la pertinence du schéma d'optimisation gloutonne multi-critère suggéré dans [4], pour la modélisation de la topologie d'Internet. Ce schéma a l'avantage de donner une explication raisonnable d'un point de vue économique, pour l'apparition toujours mal comprise des lois de puissance dans les "structures humaines". Un plus certain de ce modèle est qu'il admet une représentation géométrique naturelle (cf. fig. 1) permettant une grande lisibilité sur son fonctionnement. Il reste également suffisamment simple pour espérer servir de base théorique à des analyses mathématiques.

La plus grande faiblesse du modèle actuellement est la lenteur de son exécution. Nous pensons pouvoir accélérer considérablement l'implémentation en tenant compte de la géométrie sous-jacente. Un défaut commun à tous les modèles actuels est l'absence de prise en compte de la capacité des liens. Ceci correspond à une demande très vive de la communauté réseau pour pouvoir mener ses simulations. Nous pensons pouvoir intégrer cette nouvelle donnée assez simplement dans notre algorithme de génération.

Un point important à soulever est que nous avons basé nos comparaisons sur les mesures actuellement effectuées sur Internet. Or le caractère discriminant de ces mesures n'est pas encore très clair. Il nous semble très important de rechercher des mesures pertinentes, typiquement liés à l'usage que l'on souhaite faire de ces graphes. Il ne faut également pas perdre de vue qu'un unique modèle ne pourra sans doute jamais approcher la complexité d'Internet. Internet est sûrement un mélange des différents principes (attachement préférentiel [1], imitation [8], optimisation [4],...) qu'il faudra à terme savoir équilibrer.

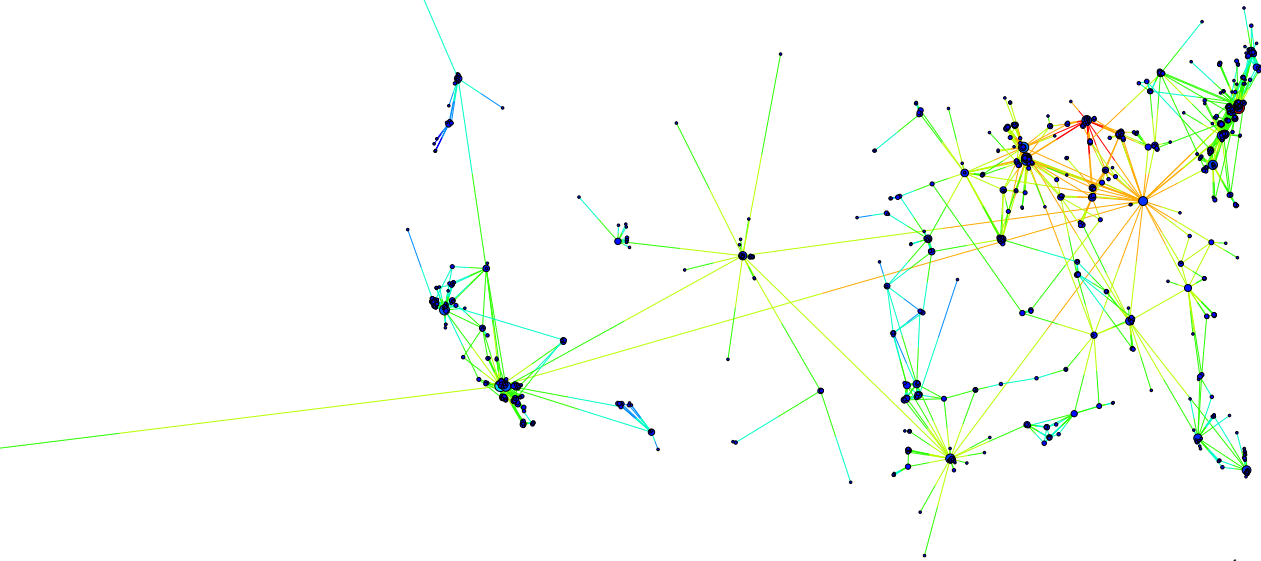


Fig. 1: Exemple de graphe de 1000 nœuds généré par notre modèle sur la population des États-Unis, avec $k = 1$, $q = 1$, et $\theta = \gamma = 0.03$. Le rayon du disque de chaque sommet est proportionnel à son degré.

Remerciements. Nous tenons à remercier C. Kenyon pour nos entrevues très enrichissantes.

References

- [1] R. Albert and A.-L. Barabasi. Topology of evolving networks : Local events and universality. *Physical Review Letters*, 85 :5234–5237, 2000.
- [2] J. M. Carlson and J. Doyle. Highly optimized tolerance : a mechanism for power laws in designed systems. *Physics Review E*, 60(2) :1412–1427, 1999.
- [3] Q. Chen, H. Chang, R. Govindan, S. Jamin, S. Shenker, and W. Willinger. The origin of power laws in internet topologies revisited. In *IEEE Infocom 2002*, 2002.
- [4] Alex Fabrikant, Elias Koutsoupias, and Christos H. Papadimitriou. Heuristically optimized trade-offs : A new paradigm for power laws in the internet. *LNCS*, (2380) :110–, Jun 2002.
- [5] Michalis Faloutsos, Petros Faloutsos, and Christos Faloutsos. On power-law relationships of the internet topology. In *SIGCOMM*, pages 251–262, 1999.
- [6] C. Jin, Q. Chen, and S. Jamin. Inet : Internet topology generator. Technical Report CSE-TR443-00, Department of EECS, University of Michigan, 2000.
- [7] C. Kenyon and N. Schabanel. Finer analysis of HOT models for the Internet. En cours de rédaction, 2003.
- [8] R. Kumar, P. Raghavan, S. Rajagopalan, D. Sivakumar, A. Tomkins, and E. Upfal. Stochastic models for the Web graph. In *Proc. 41st Ann. Symp. on Foundation of Computer Science (FOCS)*, pages 57–65, 2000.
- [9] A. Medina, I. Matta, and J. Byers. On the origin of power laws in internet topologies. *Computer Communications Review*, 30(2) :18–28, apr 2000.
- [10] Bernard M. Waxman. Routing of Multipoint Connections. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 6(9) :1617–1622, December 1988.

Optimisation et modélisation du graphe des systèmes autonomes d'Internet (AS graph)

$\theta = \gamma$	\overline{deg}	\overline{Clust}	ex_m	\overline{ex}	D	$d_h(\cdot, \cdot)$	$\overline{\beta}$	ACC
0.005	3.99 ± 10^{-3}	$0.2131 \pm 6 \cdot 10^{-3}$	7.19 ± 0.5	10.56 ± 0.5	14 ± 0.8	6.160 ± 0.19	2.50 ± 0.09	0.97
0.010	3.99 ± 10^{-3}	$0.1887 \pm 4 \cdot 10^{-3}$	6.95 ± 0.4	10.06 ± 0.5	13 ± 0.7	6.015 ± 0.18	2.42 ± 0.08	0.98
0.050	3.99 ± 10^{-3}	$0.1887 \pm 5 \cdot 10^{-3}$	5.59 ± 0.6	7.84 ± 0.5	9.8 ± 0.6	5.069 ± 0.14	2.08 ± 0.13	0.99
0.100	3.99 ± 10^{-3}	$0.1887 \pm 8 \cdot 10^{-3}$	4.35 ± 0.5	6.60 ± 0.5	8.3 ± 0.5	4.406 ± 0.11	2.44 ± 0.07	0.98

Tab. 1: Valeurs moyennes et écarts types des mesures sur 100 graphes aléatoires de $n = 1000$ sommets avec $k = 1$ et $q = 1$, en fonction des paramètres θ et γ .

n	$\theta = \gamma$	\overline{deg}	\overline{Clust}	ex_m	\overline{ex}	D	$d_h(\cdot, \cdot)$	β	ACC	β'	ACC'
20	0.001	3.50	0.2619	3	3.950	5	2.345	0.42	0.43	1.00	0.70
20	0.030	3.50	0.2444	3	3.850	5	2.235	0.72	0.75	1.16	0.86
50	0.001	3.80	0.2519	4	5.560	7	3.186	0.98	0.80	1.47	0.89
50	0.030	3.80	0.2305	4	5.400	7	3.064	0.88	0.76	1.29	0.85
100	0.001	3.90	0.2268	5	6.850	9	3.862	1.27	0.89	1.65	0.93
100	0.030	3.90	0.2217	5	6.660	9	3.663	1.27	0.87	1.56	0.89
200	0.001	3.95	0.2378	5	7.565	10	4.499	1.54	0.89	1.97	0.93
200	0.030	3.95	0.1992	5	6.830	9	4.129	1.45	0.95	1.73	0.97
500	0.001	3.98	0.2038	6	9.070	12	5.495	1.85	0.92	2.26	0.95
500	0.030	3.98	0.1910	5	7.480	9	4.864	1.77	0.94	2.05	0.96
1000	0.001	3.99	0.2186	7	10.436	14	6.240	1.94	0.93	2.37	0.97
1000	0.030	3.99	0.1887	6	8.510	11	5.377	2.02	0.94	2.31	0.96
2000	0.001	3.99	0.2186	7	10.436	14	6.240	2.14	0.93	2.61	0.97
2000	0.030	3.99	0.1798	6	8.773	11	5.821	2.12	0.96	2.38	0.98
AS graph		4.18	0.22	—	7	10	3.62	2.1	>0.96	—	—
IR graph		2.8	0.03	—	20	30	9.51	2.1 (?)	>0.96	—	—

Tab. 2: Mesures sur des graphes générés par notre modèle avec $k = 1$ et $q = 1$, comparées aux mesures sur graphes réels des AS et des IR.

n	k	q	\overline{deg}	\overline{Clust}	ex_m	\overline{ex}	D	$d_h(\cdot, \cdot)$	β	ACC	β'	ACC'
100	1	0	1.98	0	6	8.94	11	5.379	1.85	0.96	1.97	0.94
100	2	0	3.94	0.2563	4	5.61	7	3.714	—	—	1.92	0.95
200	1	0	1.99	0	6	9.36	12	5.884	1.93	0.97	1.94	0.94
200	2	0	3.97	0.2931	4	6.42	8	4.190	—	—	2.03	0.98
500	1	0	2	0	7	10.15	13	6.521	2.16	0.98	2.19	0.96
500	2	0	4	0.2495	5	7.218	9	4.886	—	—	2.21	0.98
1000	1	0	2	0	8	11.4	15	7.018	2.08	0.98	2.04	0.96
1000	2	0	4	0.2538	5	7.75	10	5.289	—	—	2.32	0.98

Tab. 3: Mesures sur des graphes générés par les modèles FKP ($k = 1$) et KS ($k = 2$) avec $\theta = \gamma = 0.03$ ($q = 0$).

n	k	q	\overline{deg}	\overline{Clust}	ex_m	\overline{ex}	D	$d_h(\cdot, \cdot)$	β	ACC	β'	ACC'
1000	1	1	3.99	0.2081	5	7.103	9	4.364	1.46	0.91	1.44	0.89

Tab. 4: Mesures d'un graphe généré par notre modèle à partir de la population des États-Unis, pour $\theta = \gamma = 0.03$.

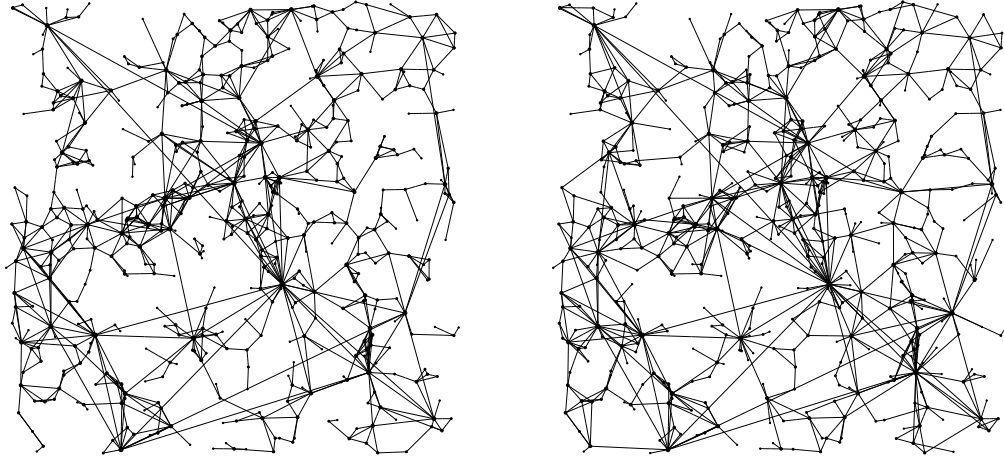


Fig. 2: Exemples de graphes de 500 nœuds générés par notre modèle avec $k = 1$ et $q = 1$. À gauche $\theta = \gamma = 0.001$ et à droite $\theta = \gamma = 0.03$.

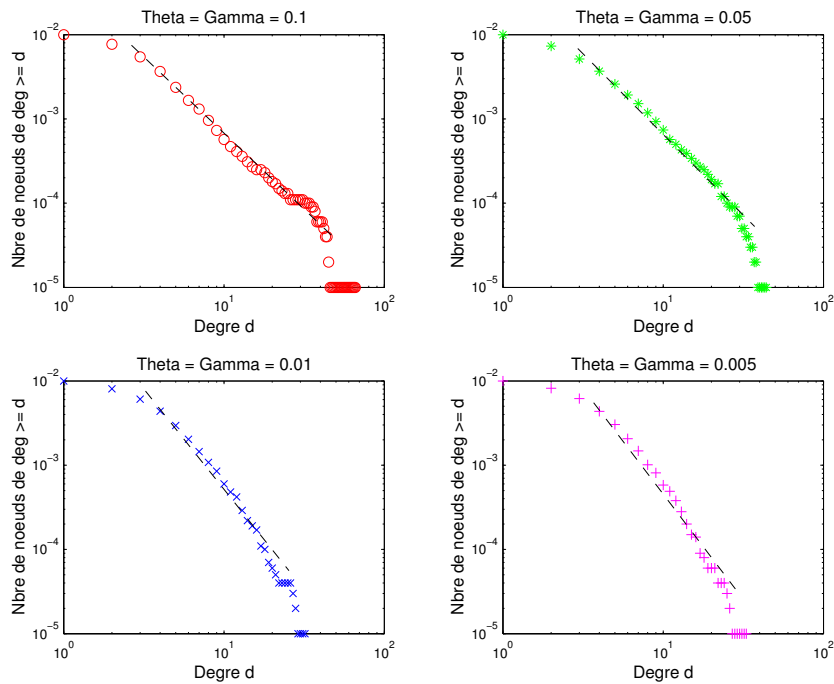


Fig. 3: Lois de puissance sur les degrés pour un graphe aléatoire selon notre modèle, de 1000 nœuds ($k = 1$, $q = 1$) en fonction des valeurs de θ et γ . (Les lois de puissance pour les petites valeurs de θ ne sont pas très marquées car le nombre de sommets est un peu faible – il faut environ $n \gtrsim 1/\theta^2$ [4].)