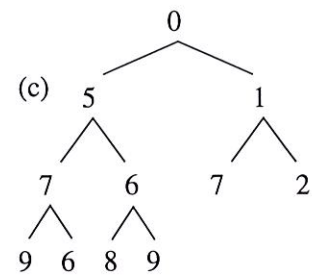
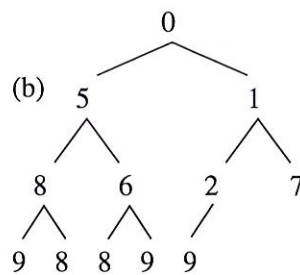
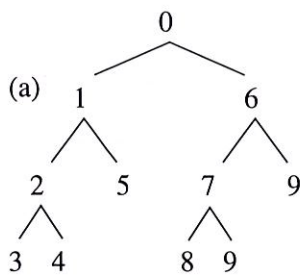


TECHNIQUES ALGORITHMIQUES ET PROGRAMMATION

sur 33 ns

Test de contrôle continu
 1h20 - aucun document autorisé

Tas minimum /8 ns



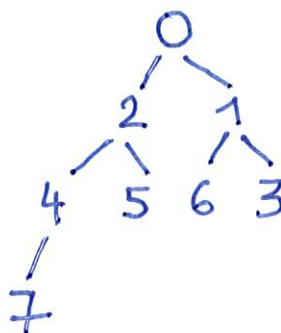
Question 1. Pour chacun des arbres (a), (b), (c) dessinés ci-dessus, indiquez s'il s'agit d'un tas minimum et dans le cas négatif donnez une justification.

(a) non, car 5 devrait avoir deux fils

(b) oui, chaque ^{nœud} est + petit que ses deux fils et le dernier niveau est plein à gauche.

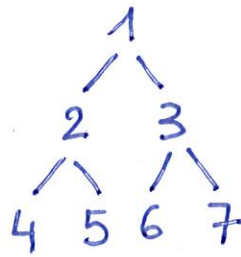
(c) non, car 7₁ est père de 6 qui est + petit.

Question 2. Donnez le tas résultant de l'insertion dans un tas minimum supposé vide au départ des entiers 1, 5, 6, 7, 4, 3, 0, 2 dans cet ordre.



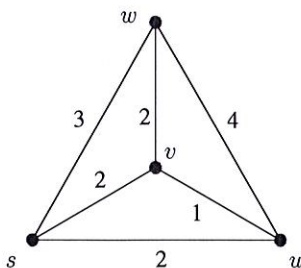
Question 3. Donnez le tas après le dépilement du sommet du tas obtenu à la question 2.

2



Voyageur de commerce / 15 pts

On considère le problème du voyageur de commerce sur un ensemble de 4 points $V = \{s, u, v, w\}$ dont la distance $d(\cdot, \cdot)$ est donnée par la table et le graphe ci-dessous :



d	s	u	v	w
s	0	2	2	3
u	2	0	1	4
v	2	1	0	2
w	3	4	2	0

Question 4. Est-ce que la fonction d définie ci-dessus vérifie l'inégalité triangulaire ? Justifier.

2

Non, car $d(u, w) = 4 > d(u, v) + d(v, w) = 2 + 1$

Dans la suite on notera $V^* = V \setminus \{s\} = \{u, v, w\}$. L'algorithme de programmation dynamique vu en cours repose sur la variable $D(t, S)$, définie pour tout sous-ensemble de points $S \subseteq V^*$ et tout point $t \in S$, comme étant la longueur minimum d'un chemin allant de s à t et qui visite tous les points de S .

et que

Question 5. Donnez la valeur de $D(v, \{u, v\})$ tout en justifiant.

2

$$D(v, \{u, v\}) = d(s, u) + d(u, v) = 2 + 1 = 3$$



On rappelle que cette variable vérifie la formule de récurrence suivante :

$$D(t, S) = \begin{cases} d(s, t) & \text{si } |S| = 1 \\ \min_{x \in S \setminus \{t\}} \{D(x, S \setminus \{t\}) + d(x, t)\} & \text{si } |S| > 1 \end{cases}$$

La table ci-dessous doit accueillir toutes les valeurs de $D(t, S)$. Les lignes de la table représentent les points (t) et les colonnes les sous-ensembles (S). La première colonne est déjà remplie, en notant que certaines cases n'ont pas à être remplies.

S	$\{u\}$	$\{v\}$	$\{w\}$	$\{u, v\}$	$\{u, w\}$	$\{v, w\}$	$\{u, v, w\}$
t							
u	2	X	X	3	7	X	6
v	X	2	X	3	X	5	8
w	X	X	3	X	6	4	5

2 Question 6. Indiquez par une croix les cases qui ne doivent pas être remplies.

4 Question 7. Complétez les autres cases de la table.

2 Question 8. Expliquez comment on calcule à l'aide de cette table la longueur de la tournée optimale. Donnez cette longueur.

On calcule la longueur grâce à la dernière colonne, celle correspondant à $S = V^* = \{u, v, w\}$.
Il faut ajouter le retour $d(t, s)$ avec $t = u, v$ ou w .

$$\text{OPT}(V, d) = \min_{t \in \{u, v, w\}} \{D(t, V^*) + d(t, s)\}$$

$$D(u, V^*) + d(u, s) = 6 + 2 = 8$$

$$D(v, V^*) + d(v, s) = 8 + 2 = 10$$

$$D(w, V^*) + d(w, s) = 5 + 3 = 8$$

La longueur min est donc 8.

Question 9. Tout en justifiant, donnez la complexité de l'algorithme de programmation dynamique pour un ensemble V arbitraire de n points.

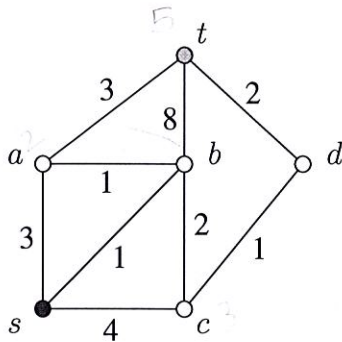
en temps

Il faut remplir chaque case de la table.
Il y a $n-1$ lignes et 2^{n-1} colonnes.

3 Chaque case est un min sur $n-1$ lignes.
Au total la complexité est en $O(n^2 \cdot 2^n)$.

Algorithme A* 1/10 pts

On considère le graphe valué suivant, ainsi que les deux heuristiques h_1 et h_2 estimant la distance entre un sommet donné et t :



	(s, t)	(a, t)	(b, t)	(c, t)	(d, t)	(t, t)
h_1	2	2	3	3	2	0
h_2	2	3	6	1	0	0

Question 10. Appliquez l'algorithme A* sur le graphe entre s et t en utilisant l'heuristique h_1 . Indiquez dans la table ci-dessous dans quel ordre les sommets sont ajoutés à P en donnant à chaque fois $\text{parent}[u]$, $\text{coût}[u]$ et $f[u]$ au moment de l'ajout de u dans P .

3

P	s	b	a	t
parent	\perp	s	b	a
coût	0	1	2	5
f	2	4	4	5

la dernière colonne n'était pas exigée

Donnez le chemin de s à t ainsi construit et son coût.

1

$s \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow t$, coût = 5

Question 11. Même question en utilisant l'heuristique h_2 .

3

P	s	c	d	a	t
parent	\perp	5	5	3	6
coût	0	4	5	3	6
f	2	5	5	6	6

la dernière
colonne n'était
pas exigée

1

$s \rightarrow a \rightarrow t$, coût = 6

Question 12. Comparez le coût des deux chemins, expliquez.

2

Le coût du chemin pour h_2 n'est pas optimal, soit 5,
car h_2 n'est pas monotone: $h_2(b,t) = 6$
alors que $w(b,a) + h_2(a,t) = 1 + 3 = 4$.

ou bien

h_2 surestime la distance de b à t ,

$h_2(b,t) = 6$ alors que $\text{dist}_G(b,t) = 1 + 3 = 4$.