

TECHNIQUES ALGORITHMIQUES ET PROGRAMMATION

Test de contrôle continu

1h30 - seul document autorisé: une feuille (recto/verso) A4 manuscrite.

RÉPONDRE DIRECTEMENT SUR LE SUJET. PENSEZ À UTILISER DU BROUILLON!

Questions de cours

Question 1. *Que signifie l'expression « l'algorithme A est de complexité polynomiale. »*

Question 2. *Donner un exemple d'algorithme vu en cours ayant une complexité non polynomiale, tout en donnant cette complexité.*

Question 3. *Qu'est-ce qu'un algorithme glouton ? Donner l'exemple d'un tel algorithme résolvant un problème d'optimisation de manière exacte, en indiquant le problème.*

Question 4. *Citer une heuristique qui n'est pas un algorithme d'approximation.*

Question 5. *Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elles sont vraies (V) ou fausses (F). [Aide : chacune des questions nécessite de la réflexion. Méfiez-vous des réponses automatiques !]*

- Pour un problème donné, une heuristique a toujours une complexité en temps plus faible qu'un algorithme exact.*
- Pour un problème de complexité polynomiale, une heuristique est de complexité au plus polynomiale.*
- Une instance particulière d'un problème indécidable peut être résolue par un programme C.*
- La complexité en temps d'un algorithme est au moins sa complexité en espace.*
- Un algorithme pour un problème donné peut boucler à l'infini sur certaines de ces instances.*
- Les problèmes indécidables n'ont pas de solution algorithmique.*
- Le problème du voyageur de commerce est indécidable.*
- Pour un problème donné, un algorithme d'approximation a toujours une complexité en temps plus faible qu'une heuristique.*

Question 6. *Quelle est la solution en x de l'équation $2^x = 25$? (on ne demande pas d'expression numérique exacte, mais une expression de x). De quel entier x est le plus proche ?*

Questions TD/TP

Question 7. Pour la 2-approximation du voyageur de commerce sur n points, on a utilisé le calcul (par Kruskal) d'un arbre couvrant de poids minimum d'un graphe complet. Quelle est la complexité de la première étape de l'algorithme de Kruskal comme implémentée en TP, à savoir remplir un tableau d'arêtes et les trier selon leur poids ? (à exprimer en fonction de n , justifiez).

Question 8. Pour tout entier $i \in \mathbb{N}$, on souhaite calculer une valeur $D(n)$ selon la formule (de récurrence) suivante :

$$D(i) = \begin{cases} i & \text{si } i \leq 3 \\ \min_{\lfloor i/2 \rfloor \leq j \leq i-2} \{D(j) + j^2 - i\} & \text{sinon} \end{cases}$$

On rappelle que $\lfloor i/2 \rfloor$ est la partie entière inférieure de $i/2$. Calculer $D(i)$ pour $i = 0, 1, \dots, 7$.

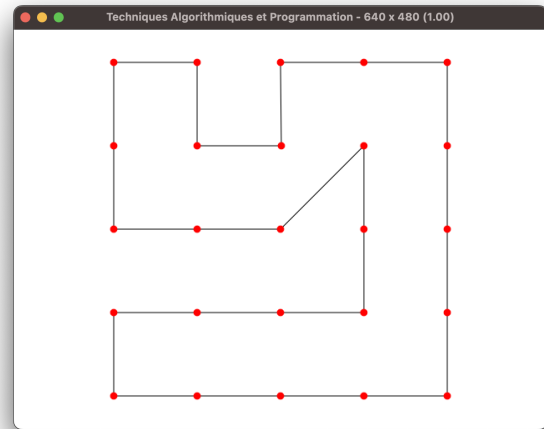
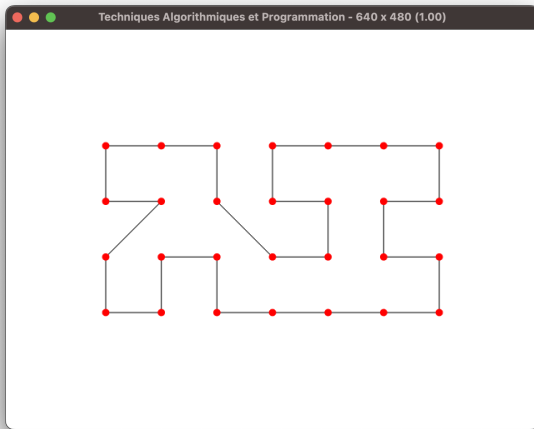
Question 9. Coder en C une fonction `int D_prog_dyn(int n)` permettant de calculer $D(n)$ (définie précédemment) par programmation dynamique. Vous pourrez supposer connue la constante `MAX_INT` (l'`int` maximum). On rappelle qu'en C, $\lfloor i/2 \rfloor$ se code simplement par `i/2`.

Question 10. On considère une instance (V, d_1) du voyageur de commerce où $V = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ un ensemble de $n > 2$ points, et d_1 une fonction de distance définie par $d_1(v_i, v_j) = |j - i|$. En admettant que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $|x + y| \leq |x| + |y|$, montrer que d_1 vérifie l'inégalité triangulaire.

Question 11. On reprend la question précédente en changeant la distance par $d_2(v_i, v_j) = \min \{i, j\}$. Est-ce que l'inégalité triangulaire est vérifiée ? Justifiez.

Question 12. On reprend la question précédente en changeant la distance par $d_3(v_i, v_j) = \max \{i, j\}$. Montrer, en les dessinant, que les arbres couvrants de poids minimum des graphes complets correspondant à (V, d_2) et (V, d_3) , lorsque $n = 6$, peuvent être les mêmes. Quels sont leurs poids ?

Question 13. *Ci-dessous sont représentées les tournées pour des points placés régulièrement sur les sommets de grilles 4x7 et 5x5. Elles ont été obtenues par un programme développé en TP par un étudiant de L3.*



Il se pose la question de savoir si les tournées sont optimales. En supposant que deux points voisins de la grille sont à distance 1, argumenter en faveur ou en défaveur de l'optimalité de la tournée de gauche. Même question pour la tournée de droite. [Aide : une grille $p \times q$ possède un cycle hamiltonien si et seulement si au moins une des dimensions est paire.]

Empty box for the answer.

Notations asymptotiques

Pour les QCM suivants, vous devez entourer les lettres devant vos réponses.

Question 14. Parmi les notations asymptotiques ou expressions suivantes, quelles sont celles qui sont à éviter (s'il y en a) :

- a. $2^{O(n)}$
- b. $\Omega(n) = O(n^2)$
- c. $O(\log_2 n)$

Question 15. Parmi les expressions suivantes sur les asymptotiques, lesquelles sont incorrectes ?

- a. $3^n = O(2^n)$
- b. $n + n^2 = \Omega(n^3)$
- c. $2n + 1 = O(n^2)$
- d. $2^n = O(n^2)$
- e. $2^n = 2^{n/8 - O(1)}$

Question 16. Pour un entier $n > 0$, combien vaut la somme $n - 1 + n - 2 + n - 3 + \dots + 2 + 1$? Indiquer parmi les expressions ci-dessous toutes celles correspondant à cette somme (s'il y en a une !).

- a. n^2
- b. $(n + 1)^2/2$
- c. $(n - 1)^2/2$
- d. $(n - 1)!/2$
- e. $n(n + 1)/2$
- f. $(n + 1)(n - 2)/2$
- g. $\binom{n}{2}$
- h. $n!/(2!(n - 2)!)$
- i. $\sum_{i=1}^{n-1} i$
- j. $\sum_{i=0}^{n-1} i$