N° d'anonymat:

Année Universitaire 2022-2023
Session 1 de printemps

Parcours/Étape: L3 Informatique **Code UE:** 4TIN602U
Épreuve: Techniques Algorithmiques et Programmation
Date: 28/04/2023 **Heure:** 9h00 **Durée:** 1h30
Documents: une seule feuille A4 recto-verso autorisée.
Épreuve de M. Cyril Gavoille

université de BORDEAUX

Collège Sciences et Technologie

RÉPONDRE DIRECTEMENT SUR LE SUJET
QUI EST À RENDRE DANS LA FEUILLE DOUBLE D'EXAMEN

Question de cours

Question 1. *Parmi les notions suivantes, quelles sont celles qui ont été abordées en CM ou en TD ? [Cochez la ou les cases correspondantes.]*

- ☐ *le Master Theorem*
- ☐ *les algorithmes de Deep Learning*
- ☐ *les algorithmes distribués*
- ☐ *la compilation*
- ☐ *l'indécidabilité*
- ☐ *la programmation dynamique*
- ☐ *les heuristiques*
- ☐ *les algorithmes parallèles*
- ☐ *les algorithmes probabilistes*
- ☐ *les tables de hachage*
- ☐ *la logique temporelle*
- ☐ *la programmation par contraintes*

Tas minimum de caractères alphabétiques

Question 2. *Donnez le tas résultant de l'insertion dans un tas minimum supposé vide au départ des 10 lettres du mot* `algorithme` *ajoutées une par une en le lisant de gauche à droite. On trie les lettres selon l'ordre alphabétique. Par exemple :* `g`$<$`r` *et* `m`$>$`e`.

Question 3. *Appliquer trois fois l'opération de suppression du minimum au tas de la question précédente. Donner le tas obtenu après l'exécution de chacune opérations.*

Question 4. *Quelles sont dans l'ordre les trois lettres ainsi supprimées ?*

Minimum local dans un rectangle

On appelle *rectangle* toute grille rectangulaire R de dimensions $L \times C$ où chaque case $R[i][j]$ contient un nombre avec $i \in \{1, \ldots, L\}$ et $j \in \{1, \ldots, C\}$. Par convention on supposera que i représente le numéro de ligne et j le numéro de colonne. On note par $R[l_1..l_2][c_1..c_2]$ le sous-rectangle composé de tous les éléments $R[i][j]$ avec $i \in \{l_1, \ldots, l_2\}$ et $j \in \{c_1, \ldots, c_2\}$. Ainsi $R = R[1..L][1..C]$.

Voici l'exemple d'un rectangle $R[1..3][1..7]$.

	1	2	3	4	5	6	7
1	19	63	28	63	84	65	69
2	77	73	51	51	27	40	23
3	62	73	35	65	27	88	20

Minimum Local est le problème qui consiste à trouver dans un rectangle R la position d'un *minimum local*, c'est-à-dire la position (i, j) d'un élément $R[i][j]$ plus petit ou égal à tous ses éléments voisins dans R. Les éléments voisins de $R[i][j]$ sont $R[i][j-1]$, $R[i][j+1]$, $R[i-1][j]$ et $R[i+1][j]$ s'ils existent. Certaines positions $(i \pm 1, j \pm 1)$ pouvant être en dehors de R, certains de ces éléments peuvent ne pas exister. La taille de R, notée n, est le nombre total d'éléments, c'est-à-dire $n = LC$.

Question 5. *Trouver tous les minimum locaux de l'exemple ci-dessus. [Encerclez-les directement sur l'exemple du sujet.]*

Question 6. *Montrez que tout rectangle contient toujours au moins un minimum local.*

Pour résoudre le problème Minimum Local, on propose l'algorithme Gradient qui consiste à partir d'une position arbitraire du rectangle. Puis tant que l'élément de la position courante n'est pas un minimum local on se déplace vers un élément voisin strictement inférieur.

Question 7. *Montrez que la complexité de l'algorithme* Gradient *n'est pas plus que* $O(n)$.

Question 8. *Construisez un rectangle où l'algorithme* Gradient *a une complexité* $\Omega(n)$.

Un *minimum global* est un élément de R qui est plus petit ou égal à tous les autres.

Question 9. *Montrez que le problème de la recherche d'un minimum global dans un rectangle a pour complexité* $\Theta(n)$.

On propose une approche « diviser-pour-régner » pour résoudre le problème Minimum Local. La *coupe médiane* d'un rectangle R est une ligne ou une colonne telle que sa suppression coupe R en deux sous-rectangles chacun de taille deux fois plus petite ou moins. Le choix de prendre une ligne ou une colonne se fait selon la taille d'une ligne ou d'une colonne : on choisit celle de plus petite taille.

Par exemple, si $R = R[1..3][1..7]$ est un rectangle 3×7, alors la colonne centrale $M = R[1..3][4..4]$ découpe R en deux sous-rectangles qui sont $A = R[1..3][1..3]$ et $B = R[1..3][5..7]$. Ici M est de taille 3, ce qui est plus petit que la taille d'une ligne qui vaut 7. De plus la taille de R est 21, alors que les tailles de A et de B valent 9.

L'algorithme Dichotomique consiste :

(1) à découper R en deux sous-rectangles A et B obtenus en supprimant la coupe médiane ;
(2) à chercher la position (i, j) du minimum global de la coupe médiane ;
(3) si $R[i][j]$ est un minimum local pour R on renvoie (i, j), sinon on recommence récursivement dans le sous-rectangle A ou B contenant un voisin de (i, j) strictement plus petit.

Question 10. *Appliquez l'algorithme* DICHOTOMIQUE *à l'exemple initial* $R[1..3][1..7]$. *Donnez la position et la valeur du minimum trouvé.*

On suppose qu'on dispose d'une fonction `C` donnant une implémentation de l'algorithme DICHOTOMIQUE, et dont le prototype est :

```
position Dicho(double **R, int l1, int l2, int c1, int c2);
```

où `position` est une structure permettant de décrire un couple d'indices. Avec cette fonction, il suffit donc d'appeler `Dicho(R,1,3,1,7)` pour répondre à la question précédente. Pour simplifier, on supposera que les indices `0` de `R` ne sont pas utilisés.

Question 11. *Donnez l'arbre des appels pour* `Dicho(R,1,3,1,7)`. *[Plusieurs arbres sont possibles. N'en donnez qu'un seul.]*

Question 12. *Pourquoi la technique de mémorisation ne semble pas intéressante pour l'algorithme* DICHOTOMIQUE *?*

On s'intéresse à la complexité en temps $T(n)$ de l'algorithme DICHOTOMIQUE appliqué à un rectangle de taille n. Pour cela, on remarque qu'en jouant sur les indices de R, dans les étapes (1) et (3) de l'algorithme, il n'est pas nécessaire de créer les sous-rectangles A et B. Ainsi l'étape la plus couteuse est l'étape (2).

Question 13. *Montrez que pour tout* $L, C \geqslant 0$, $\min(L, C) \leqslant \sqrt{LC}$.

Question 14. *Donnez une équation de récurrence pour $T(n)$. Justifiez.*

Question 15. *En déduire la complexité de l'algorithme* DICHOTOMIQUE. *[Aide : Utilisez le Master Theorem sur $T(n)$ ou le fait que $\sum_{i\geqslant 0} q^i < \frac{1}{1-q}$ pour $q \in]0,1[$.]*

Question 16. *Même question dans le cas où R est de dimension $1 \times n$.*

Un étudiant propose une variante plus rapide pour l'algorithme DICHOTOMIQUE où l'étape (2) est remplacée par (2') chercher récursivement la position (i, j) du minimum local de la coupe médiane.

Question 17. *Montrez alors que la complexité $T(n)$ de cette variante vérifie la récurrence $T(n) = O(\log n) + T(n/2)$. Quelle est alors la complexité de cette variante ?*

Question 18. *Montrez que, malheureusement, cette variante peut dans certains cas ne pas trouver de minimum local. Exhibez un contre-exemple.*

FIN.