

TECHNIQUES ALGORITHMIQUES ET PROGRAMMATION

Devoir Maison 14h-16h (2h)

CONSIGNES

Toutes vos réponses sont à saisir dans le fichier `reponses.txt` qui une fois rempli sera à déposer sur la page [Moodle](#) du cours. Il est impératif de ne pas renommer ce fichier de réponses, ni de le compresser ou de changer son format. Vous pouvez mettre des commentaires directement dans `reponses.txt` si cela vous semble nécessaire. Enfin, ne cherchez pas à me remettre votre sujet (.pdf) que je possède déjà.

Le sujet comporte **5** pages. Vous avez le droit d'utiliser les documents accessibles sur la [page de l'UE](#), en particulier les [notes de cours](#), ainsi que vos propres documents. Il s'agit d'un devoir **individuel**. Tout constat de manquement à cette consigne sera sanctionné.

Distance de Tchebychev

Dans cette partie, on considère uniquement des points à coordonnées entières ainsi que la distance dite de Tchebychev, qu'on notera d_{\max} . Il s'agit du nombre minimum de coups que doit réaliser un roi pour se déplacer entre deux cases d'un échiquier. On rappelle qu'un roi placé sur une case d'échiquier peut visiter en un coup les 8 cases autour de lui, pour peu qu'il ne soit pas sur un bord. C'est aussi la distance dans le graphe composé d'une grille à laquelle on ajoute les diagonales, comme vu en TP sur A^* . Plus formellement, si $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ sont deux points, alors $x_A, y_A, x_B, y_B \in \mathbb{Z}$ et $d_{\max}(A, B) = \max\{|x_A - x_B|, |y_A - y_B|\}$.

Q1a. Calculer la distance d_{\max} entre les points $(8, -4)$ et $(-5, -6)$.

Soient V un ensemble de n points (à coordonnées entières donc) et P une tournée pour l'entrée (V, d_{\max}) du voyageur de commerce. Ici, une tournée sera la suite des n points de V donnés dans l'ordre de visite des points. Une arête de P est simplement le segment de droite liant deux points consécutifs de P , le dernier et le premier étant considérés comme consécutifs. Pour résumer, si v_i et v_j sont deux points consécutifs de P , alors l'arête $v_i - v_j$ est une ligne droite et sa longueur vaut $d_{\max}(v_i, v_j)$.

Un *croisement* de P est un ensemble de deux arêtes de P qui s'intersectent, les extrémités ne pouvant faire partie de l'intersection.

Q1b. Proposez un ensemble V d'au plus 7 points ainsi qu'une tournée P ayant un croisement tout en étant de longueur minimum pour (V, d_{\max}) . Votre tournée, si elle existe, devra impérativement comporter les points $(-6, -2)$ $(3, -2)$.

Q1c. Est-il possible d'avoir une tournée avec deux croisements ? dans les mêmes conditions que la question précédente, c'est-à-dire de longueur minimum, comportant au plus 7 points et passant par les points $(-6, -2)$ $(3, -2)$.

Questions de cours

Mise en garde. Si les questions de cette partie sont essentiellement l'application du cours, elles nécessitent cependant chacune un peu de réflexion. Méfiez-vous des réponses automatiques !

Q2a. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont fausses ?

- L'heuristique h dans A^* peut être monotone et sous-estimer toutes les distances.
- Une instance particulière d'un problème indécidable peut être résolue par un programme \mathbf{C} .
- Pour un problème donné, un algorithme d'approximation a toujours une complexité en temps plus faible qu'une heuristique.
- Dans un graphe (G, ω) arête-valué par une fonction de poids ω , toute arête $u - v$ est un plus court chemin entre u et v .
- Le problème du voyageur de commerce est indécidable.
- Les problèmes indécidables n'ont pas de solution algorithmique.
- Pour un problème de complexité polynomiale, une heuristique est de complexité au plus polynomiale.
- L'heuristique h dans A^* peut être monotone et sur-estimer toutes les distances pour G , c'est-à-dire vérifier $h(x, y) > \text{dist}_G(x, y)$ pour toute paire de sommets (x, y) où h est définie.
- La complexité en temps d'un algorithme est au moins sa complexité en espace.
- Pour un problème donné, une heuristique a toujours une complexité en temps plus faible qu'un algorithme exact.
- Un algorithme pour un problème donné peut boucler à l'infini sur certaines de ces instances.
- En \mathbf{C} on peut déterminer si un ensemble $X \subseteq \{0, \dots, n - 1\}$ possède k éléments en temps $O(k)$ au lieu de $O(n)$, si X est codé sur un `int` ou un `long`.

Q2b. L'algorithme A^* , dont l'heuristique h est monotone, est (une seule réponse) :

- Un algorithme exact.
- Une heuristique quelconque.
- Un algorithme d'approximation.

Question sur A^*

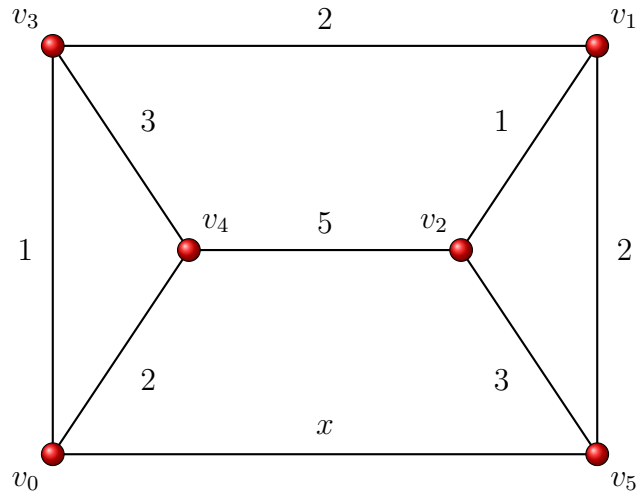
On considère un graphe orienté symétrique (G, ω) arête-valué. Le terme "orienté symétrique" signifie que si (u, v) est un arc, alors (v, u) est aussi un arc. On suppose que la valuation ω est telle qu'il existe une fonction positive f telle que pour tous voisins u, v , $\omega(u, v) = f(v)$ et $\omega(v, u) = f(u)$. La valuation n'est donc, elle, pas forcément symétrique puisque il est possible d'avoir $\omega(u, v) \neq \omega(v, u)$. Il suit que $\text{dist}_G(u, v)$ n'est pas forcément symétrique.

C'est le cadre du TP pour A^* où le poids d'un arc (u, v) entre deux cases voisines ne dépendait que de la "texture" de la case d'arrivée v .

Q3. Si $f(s) = f(t)$, c'est-à-dire que les points de départ et d'arrivée sont de même texture, déterminer si oui ou non on a toujours $\text{dist}_G(s, t) = \text{dist}_G(t, s)$? Une justification est attendue.

Plus courts chemins et TSP

On considère le graphe arête-valué (G, ω) dessiné ci-dessous où le poids $\omega(v_0, v_5)$ est un réel x inconnu. On supposera que $\omega(u, v) \geq 0$ pour toute arête $u - v$.



Pour toute paire de sommets (u, v) , on définit la fonction d comme ceci :

$$d(u, v) = \begin{cases} \omega(u, v) & \text{si } u \text{ et } v \text{ sont voisins} \\ \text{dist}_G(u, v) & \text{sinon} \end{cases}$$

Q4a. *Donnez une valeur entière pour x , si elle existe, de façon à ce que la fonction d viole l'inégalité triangulaire.*

Q4b. *Donnez un intervalle I de valeurs pour x de sorte que la fonction d vérifie l'inégalité triangulaire si et seulement si $x \in I$.*

Vous devrez préciser si l'intervalle est fermé, semi-ouvert ou ouvert, comme par exemple $[7, 15]$, $[7, 15[$ ou $]7, 15]$]0, 0[ou par $[2, -1]$. En fait, la virgule n'est pas nécessaire. Pour coder $+\infty$ et $-\infty$ vous utiliserez les mots `+inf` et `-inf` respectivement.

Dans toute la suite du problème, on fixe $x = 3$.

Q4c. *Donnez les distances pour toutes les paires de sommets de G , c'est-à-dire $\text{dist}_G(v_i, v_j)$ pour tout $i, j \in \{0, \dots, 5\}$. Par symétrie, seules les entrées avec $i < j$ sont demandées.*

On pose $V = \{v_0, \dots, v_5\}$ l'ensemble des sommets de G , x étant toujours fixé à 3. On considère maintenant (V, dist_G) comme une instance du problème du voyageur de commerce. Dans ce cadre, chaque $v_i \in V$ peut être vu comme un point, et la distance entre les points v_i et v_j sera donnée par $\text{dist}_G(v_i, v_j)$. Comme dans le cours, on notera $n = |V| = 6$ et $V^* = V \setminus \{v_{n-1}\} = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Pour tout sous-ensemble $S \subseteq V^*$ et point $t \in S$, on considère $D(t, S)$ la variable comme définie dans les notes de cours au paragraphe 3.3 (page ~ 80).

Q4d. *Calculer les valeurs $y_1 = D(v_0, \{v_0\})$ et $y_2 = D(v_3, \{v_3\})$.*

Q4e. *Calculer la valeur $y_3 = D(v_3, \{v_3, v_4, v_2\})$.*

Notation asymptotique

Q5a. Parmi les notations asymptotiques ou expressions suivantes, quelles sont celles qui sont à éviter (s'il y en a) :

- a. $O(2n + 1)$
- b. $2^{O(n)}$
- c. $2n + 1 = O(n^2)$

Q5b. Parmi les expressions suivantes sur les asymptotiques, lesquelles sont incorrectes ?

- a. $2n - \lceil \sqrt{n} \rceil = O(n \log n)$
- b. $n + n^2 = \Omega(n^3)$
- c. $2^n = \Omega(2^{n/8}) = 2^{n/8 - O(1)}$
- d. $n^2 = O(2^{n/2})$

Q5c. Dans le cours il est donné la formule de Stirling fournissant un équivalent asymptotique pour $n!$. Plus précisément $n! \sim (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$. Est-il vrai que cette formule asymptotique implique que $\ln(n!) = O(n)$?

Q5d. Pour un entier $n > 0$, combien vaut la somme $n - 1 + n - 2 + n - 3 + \dots + 2 + 1$? Indiquez parmi les expressions ci-dessous toutes celles correspondant à cette somme (s'il y en a une!).

- a. $(n - 1)!$
- b. $n^2/2$
- c. $\sum_{i=0}^n i$
- d. $(n - 1)(n - 2)/2$
- e. $n(n - 1)/2$
- f. $\binom{n-1}{2}$
- g. $\binom{n}{2}$
- h. $(n - 1)^2/2$
- i. $\sum_{i=0}^{n-1} i$
- j. n^2
- k. $n!$