

---

*Notes de cours prises pendant les Cours/TD/TP autorisées.*

---

## Coloration

Pour un sommet  $u$  d'un graphe  $G$  à  $n$  sommets, on notera  $\text{ID}(u)$  l'identifiant du sommet  $u$ , un entier unique de  $\{0, \dots, n-1\}$ . Comme vu en cours, on suppose que les algorithmes distribués à développer peuvent utiliser les instructions de communication suivantes (supposées être exécutées par un sommet  $u$  arbitraire de  $G$ ) :

- $\text{SEND}(v, M)$  : qui permet d'envoyer au voisin  $v$  de  $u$  le message  $M$ .
- $\text{RECEIVE}(v)$  : qui donne le message envoyé depuis le voisin  $v$  de  $u$ .
- $\text{SENDALL}(M)$  : qui permet d'envoyer à tous les voisins de  $u$  le message  $M$ .
- $\text{RECEIVEALL}$  : qui donne l'ensemble des couples  $(v, M_v)$ ,  $M_v$  étant le message envoyé par  $v$ .

Vous pourrez également utiliser l'instructions  $\text{NEWPULSE}$  permettant d'indiquer dans l'algorithme le démarrage d'une nouvelle ronde. Notez que contrairement aux instructions  $\text{SEND}/\text{RECEIVE}$  de base, les extensions n'ont pas besoin de connaître explicitement le voisinage du sommet  $u$ . Au démarrage de l'algorithme, chaque sommet  $u$  supposera connu  $n$ ,  $\text{ID}(u)$  et  $N(u)$ .

Dans tout l'exercice, on considèrera des algorithmes distribués s'exécutant dans le modèle LOCAL. Pour un sous-ensemble  $W \subseteq V(G)$  de sommets de  $G$ , on notera  $\text{ID}(W) = \{\text{ID}(u) : u \in W\}$  l'ensemble des identifiants des sommets de  $W$ . Pour tout sous-ensemble  $X \subset \mathbb{N}$ , on notera  $\text{FIRSTFREE}(X) = \min(\mathbb{N} \setminus X)$ , c'est-à-dire le plus petit entier naturel qui n'est pas dans  $X$ . Par exemple,  $\text{FIRSTFREE}(\{0, 1, 2, 4, 8\}) = 3$  et  $\text{FIRSTFREE}(\{0\}) = 1$ .

**Question 1.** Montrez que  $\text{FIRSTFREE}(X) \leq |X|$  où  $|X|$  représente le nombre d'éléments de  $X$ .

**SOLUTION.** [3 pts |3] Si  $\text{FIRSTFREE}(X) = k$ , alors  $X$  contient au moins tous les entiers de  $[0, k[$ , soit au moins  $k$  entiers. Donc  $|X| \geq k = \text{FIRSTFREE}(X)$ .

On considère l'algorithme  $A$  consistant, pour chaque sommet  $u$  d'un graphe  $G$ , à calculer en parallèle  $\text{FIRSTFREE}(\text{ID}(N(u)))$ , et on notera  $c(u)$  cet entier. Rappelons que  $N(u)$  représente l'ensemble des voisins de  $u$  dans  $G$ .

**Question 2.** Écrivez l'algorithme  $A$  et donner le nombre de rondes.

**SOLUTION.** [3 pts |6] Code exécuté par un sommet  $u$  quelconque :

- $\text{SENDALL}(\text{ID}(u))$
- $R_u := \bigcup_{v \in N(u)} \text{RECEIVE}(v)$  NB :  $R_u = \{\text{ID}(v) : v \in N(u)\}$
- $c(u) := \text{FIRSTFREE}(R_u)$

ce qui prend une seule ronde.

**Question 3.** Donnez un graphe connexe  $G$  à  $n$  sommets, et les identifiants pour ses sommets, où l'application de  $A$  ne produit que deux valeurs différentes pour la variable  $c$ . Quelles sont ces valeurs ?

**SOLUTION.** [2 pts |8] On peut considérer le graphe  $K_n$  avec les sommets numérotés de 0 à  $n-1$  où toutes les arêtes incidentes à 0 ont été supprimées sauf l'arête  $0-1$ . Tous les sommets vont se colorier en 0 (car ils sont pas adjacent à 0) sauf le sommet 1 qui lui va se colorier 1. Un cycle ou un chemin à  $n$  sommets, ou encore une étoile à  $n-1$  feuilles dont le centre est numéroté 0 ou 1, produisent le même résultat.

NB : Un exemple de graphe  $G$  de taille fixée, comme un cycle à quatre sommets, ou une clique à deux sommets, ne constitue pas un exemple de graphe  $G$  à  $n$  sommets.

**Question 4.** *Donnez un graphe connexe  $G$  à  $n$  sommets, et les identifiants pour ses sommets, où l'application de  $A$  produit  $c(u) = \text{ID}(u)$  pour chaque sommet  $u$ .*

**SOLUTION.** [2 pts |10] On peut considérer le graphe  $K_n$  avec les sommets numérotés de 0 à  $n - 1$ . Le sommet  $u$  va se colorier  $c(u) = u$  puisque  $N(u) = \{0, \dots, n - 1\} \setminus \{u\}$ .

On considère l'algorithme  $B$  consistant à faire, pour chaque sommet  $u$  d'un graphe  $G$  :

1.  $c(u) := \text{ID}(u)$
2. pour  $k := n - 1, n - 2, \dots, 4, 3$  faire :
  - (a) NEWPULSE
  - (b) si  $c = k$ , alors  $c(u) := \text{FIRSTFREE}(\text{ID}(N(u)))$

**Question 5.** *Quel est le nombre de rondes de l'algorithme  $B$  ?*

**SOLUTION.** [2 pts |12] L'algorithme produit une ronde par boucle. Et, une boucle du type "pour  $k \in [a, b]$  faire : ..." produira  $b - a + 1$  rondes (pour un intervalle  $[a, b]$  d'entiers). Pour être précis, c'est  $\max\{b - a + 1, 0\}$  car le nombre rondes (ou de répétitions de la boucle) est toujours un entier non nul. Cela fait donc  $((n - 1) - 3) + 1 = n - 3$  avec  $a = 3$  et  $b = n - 1$ , soit  $\max\{n - 3, 0\}$  rondes.

**Question 6.** *Exprimez en fonction du degré maximum  $\Delta$  de  $G$  le nombre maximum de valeur différentes pour  $c(u)$  pour l'ensemble des  $u \in V(G)$  ?*

**SOLUTION.** [3 pts |15] En utilisant la propriété  $\text{FIRSTFREE}(X) \leq |X|$ , il est alors clair que  $c(u) \leq |N(u)| = \text{deg}(u)$ , et donc  $c(u) \in [0, \text{deg}(u)]$ . Cela fait donc  $\text{deg}(u) + 1 \leq \Delta + 1$  valeurs possibles pour  $c(u)$ .