



Vous devez justifier toutes vos réponses.

Algorithme GHS

Dans cette partie, on considère l'algorithme GHS vu en cours permettant de calculer un arbre couvrant de poids minimum (MST).

Question 1. *Rappeler ce qu'est un fragment T et ce qu'est $\text{MCOE}(T)$.*

Question 2. *Dans le cours il est indiqué que la relation sur les fragments induit par la relation MCOE (c'est-à-dire on met un arc $T \rightarrow T'$ entre les fragments T et T' si $\text{MCOE}(T)$ connecte T à T') est telle que chaque composante connexe contient exactement deux fragments T, T' mutuellement en relation, c'est-à-dire tels que $\text{MCOE}(T) = \text{MCOE}(T')$. Expliquer pourquoi cela est vrai.*

Question 3. *Est-il vrai qu'à chaque nouvelle phase, le nombre de sommets du plus grand fragment a au moins doublé ?*

Question 4. *Expliquer pourquoi le nombre de phases de l'algorithme appliqué à un graphe à n sommets est au plus $\log_2 n$?*

Coloration des cycles

Dans cette partie on considère exclusivement des algorithmes distribués s'exécutant dans le modèle LOCAL. La couleur d'un sommet u sera toujours identifiée par une variable notée $\text{COLOR}(u) \in \mathbb{N}$. Le sommet u , quant à lui, sera identifié par $\text{ID}(u)$. Les graphes seront considérés comme non-orientés. Pour un cycle cela signifie qu'il n'y a pas de notion de successeur et de prédécesseur coordonnée entre les sommets. Il n'y a pas de variable PARENT par exemple. Un sommet peut seulement envoyer ou recevoir des messages d'un ou plusieurs de ses voisins sans pouvoir déterminer quel voisin est à sa droite par exemple.

Question 5. *Rappeler les caractéristiques du modèle LOCAL.*

Question 6. *On suppose donnée une 6-coloration d'un cycle. Donner un algorithme produisant en une seule ronde une 4-coloration. (Vous devez justifier.)*

Question 7. *En déduire un algorithme en deux rondes permettant de passer de 6 à 3 couleurs dans un cycle.*

On dira qu'un cycle possède une (a, b) -coloration si chaque sommet u possède une couleur $\text{COLOR}(u) \in \{1, 2\}$ de sorte qu'il y ait au plus a sommets de couleur 1 et b sommets de couleur 2 consécutifs sur le cycle. Ainsi une $(1, 1)$ -coloration d'un cycle de longueur paire est simplement une 2-coloration classique (alternance des couleurs 1 et 2). Notez que contrairement à une k -coloration classique, une (a, b) -coloration peut avoir deux voisins d'une même couleur dès que $a > 1$ ou $b > 1$.

Question 8. Montrer qu'une $(1, 2)$ -coloration définit un ensemble indépendant maximal, c'est-à-dire un sous-ensemble de sommets deux à deux non-adjacents et qui soit maximal pour l'inclusion.

Question 9. Donner un algorithme permettant de produire une 3-coloration pour un cycle à partir d'une $(1, 2)$ -coloration. Préciser le nombre de rondes qui devra être aussi faible que possible.

Question 10. Généraliser votre algorithme de façon à produire une 3-coloration à partir d'une (a, b) -coloration, tout en précisant le nombre de rondes. Vous pourrez supposer que les valeurs a et b sont connues de tous les sommets.

On admettra la borne inférieure vue en cours sur le nombre de rondes nécessaires pour calculer une 4-coloration dans un cycle à n sommets. Rappelons que la borne inférieure pour un cycle orienté reste valable également pour une 3-coloration d'un cycle non-orienté.

Question 11. À l'aide de cette borne inférieure, montrer que tout algorithme de (a, b) -coloration d'un cycle à n sommets nécessite au moins $(\frac{1}{2} \log^* n) - O(a + b)$ rondes.

Question 12. Soient $x, y \in \mathbb{N}$. Montrez que $\max\{x, y\} \geq \frac{1}{2}(x+y)$. En déduire que $\log^*(\max\{x, y\}) \geq (\log^*(x+y)) - 1$. (Vous pourrez utiliser le fait que $2^{z/2} \geq z$ et que $\log^*(2^z) = 1 + \log^*(z)$ pour tout $z \in \mathbb{N}$.)

Question 13. À l'aide de cette propriété, montrer que tout algorithme produisant dans un cycle une 3-coloration à partir d'une (a, b) -coloration nécessite $(\frac{1}{2} \log^*(a+b)) - \frac{3}{2}$ rondes.