

UE: ALGORITHMIQUE APPLIQUÉE - 4TIN915U

(test – durée 1h30)

– *Documents (cours et notes personnelles) autorisés* –

Dans toute la suite, la grille $p \times q$ représente le graphe classique à pq sommets répartis sur p lignes chacune de q sommets, les arêtes étant horizontales ou verticales. Par exemple, la grille 2×2 est un cycle de longueur 4, la grille $1 \times n$ est un chemin à n sommets, la grille 8×8 un échiquier.

Couverture par sommets

On considère un des algorithmes d'approximation de COUVERTURE PAR SOMMETS vu en cours appliqué à un graphe G et qui consiste à :

1. Calculer un arbre couvrant T selon un parcours DFS ;
2. Renvoyer l'ensemble S des sommets internes de T .

Question 1. *Rappelez le facteur d'approximation de cet algorithme et proposez une instance critique.*

On considère une variante de l'algorithme précédent. La première étape est identique. Pour la deuxième, plutôt que de renvoyer S , on renvoie un sous-ensemble $C \subseteq S$ calculé en appliquant l'algorithme glouton vu en cours pour résoudre COUVERTURE PAR ENSEMBLES.

Question 2. *Détaillez l'instance précise de COUVERTURE PAR ENSEMBLES qui va être utilisée ici, c'est-à-dire donnez l'ensemble B et la famille \mathcal{F} .*

Question 3. *Appliquez ce nouvel algorithme à une grille $2 \times n$ en donnant la taille de la couverture obtenue. Justifiez votre réponse en expliquant le choix du DFS et la construction de l'ensemble C .*

Question 4. *Donnez, en fonction de n , la taille minimum d'une COUVERTURE PAR SOMMETS pour la grille $2 \times n$. Justifiez pourquoi cette valeur est optimale.*

Question 5. *Donnez, en fonction de n , la taille minimum d'une COUVERTURE PAR SOMMETS pour une clique à n . Justifiez pourquoi cette valeur est optimale.*

Question 6. *Pour l'algorithme présenté en premier et la variante proposée, donnez le facteur d'approximation si G est une clique à n sommets.*

Question 7. *Donnez un majorant (le plus petit possible) sur le facteur d'approximation de la variante proposée. Justifiez.*

Parasols

On considère un graphe G qui est une grille $p \times q$ ayant un certain ensemble W de sommets marqués. Pour des raisons techniques, on supposera que p et q sont plus grands que 5. On souhaite trouver un ensemble \mathcal{C} de sous-graphes de G tels que :

1. Chaque sous-graphe $H \in \mathcal{C}$ est une grille carrée 3×3 ou 5×5 .
2. Pour tout sommet $u \in W$, il existe une grille $H \in \mathcal{C}$ contenant u .

On appellera ce problème celui du PARASOL, en imaginant qu'il s'agit de positionner des parasols (les sous-graphes H) sur une plage rectangulaire (la grille G) afin de protéger de l'ensoleillement les clients d'une plage privée (l'ensemble W). L'objectif est de trouver un ensemble \mathcal{C} de cardinalité la plus petite possible. Notez bien que rien n'empêche les parasols de se chevaucher.

Question 8. *Ce problème se réduit à un problème vu dans le chapitre 2. Expliquez lequel et quelle est la réduction.*

Question 9. *Donnez un algorithme naïf permettant de résoudre PARASOL de cardinalité k . Donnez et justifiez sa complexité.*

Question 10. *Connaissez-vous un algorithme permettant de résoudre PARASOL de cardinalité k qui soit FPT en k et en $|W|$? Rappelez son principe et donnez sa complexité.*

On considère maintenant une variante du problème PARASOL, qu'on appellera PARASOL-PAYANT. La différence est que chaque grille H choisie dans \mathcal{C} est de dimension 2×2 ou 3×3 , et possède un coût. Plus précisément $\text{coût}(H)$ est le nombre de sommets du côté de la grille H , soit 2 ou 3. Il s'agit maintenant de calculer un ensemble \mathcal{C} de coût total le plus petit possible.

Question 11. *À quel problème vu en cours peut-on réduire PARASOL-PAYANT de coût minimum ? Justifiez.*

Question 12. Appliquez un algorithme d'approximation pour PARASOL-PAYANT de coût minimum pour la grille 6×9 représentée ci-après où les sommets de W sont symbolisés par des X. Donnez la solution renvoyée et son coût. (Éventuellement recopier la grille et dessiner les parasols).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
1	.	.	X	X	X	X	1
2	.	X	X	2
3	.	.	.	X	3
4	X	.	X	.	.	.	4
5	.	.	X	X	X	5
6	.	X	.	.	.	X	.	.	.	X	6
	1	2	3	4	5	6	7	8	9		

Question 13. Donnez le facteur d'approximation théorique de cet algorithme pour une grille $p \times q$ (et pas seulement dans l'exemple ci-dessus) pour le problème PARASOL-PAYANT.

Question 14. Même question en supposant que W est un ensemble indépendant de G .

Question 15. Dans l'exemple de la grille 6×9 et l'ensemble W ci-dessus, pouvez-vous trouver une meilleure solution? Justifiez.

FIN.